

KF

30866

NEED TRANSFER



HN 31FC S





ex libris Joannice Raphaël hure' Clerici 1782.

29^e rue de la Harpe
N^a

page 285 ligne 19 au lieu de $g + b = f$ écrire $g + h = f$.
Libb. Indis ardev. cette faute ~~paraît~~, dans son traité
du Calcul Differential de 4^e paris, 1740 joint, voyez
page 143 ligne 17.

Tricotomy Delangle page 418

T R A I T É
A N A L Y T I Q U E
D E S
S E C T I O N S C O N I Q U E S
E T D E L E U R U S A G E

POUR LA RESOLUTION DES EQUATIONS
dans les Problèmes tant déterminez qu'indéterminez.

O U V R A G E P O S T H U M E

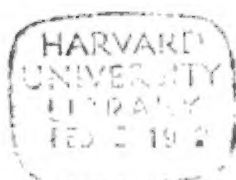
De M. LE MARQUIS DE L'HOSPITAL, *Académicien
Honoraire de l'Academie Royale des Sciences.*



A P A R I S,
Chez MONTALANT, Quay des Augustins, à la descente
du Pont saint Michel

M. D C C X X.
A V E C P R I V I L E G E D U R O Y.

KF 30866



63*137



AVERTISSEMENT

DU LIBRAIRE.



'Illustre & sçavant Auteur de cet Ouvrage étoit sur le point de le donner au Public, lorsqu'il mourut en 1704. âgé de quarante-trois ans.

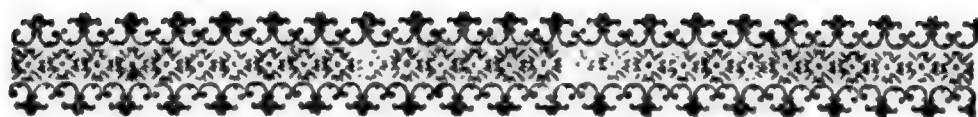
Le Manuscrit en étoit sans Preface, que ce seul Auteur pouvoit bien faire : c'est pour cela qu'il ne s'en trouve point ici. Mais le titre doit suffire aux Connoisseurs, pour juger de quelle consequence est en Géometrie la Matiere de ce Livre. La grande réputation de M. le Marquis de l'Hôpital en ce genre d'Etude, répond autant, ce me semble, de l'habileté avec laquelle cette matiere est traitée, que du succès qu'on doit attendre de l'Ouvrage. C'est ce qui m'a déterminé à l'imprimer tel qu'il étoit, sans autre soin que de faire en sorte qu'il le fût le plus correctement qu'il me seroit possible, en cherchant quelque habile Géometre, qui voulût

AVERTISSEMENT.

bien veiller à l'impression. La considération & l'estime des Sçavans pour l'Auteur , m'en ont fait heureusement trouver deux celebres. C'est par leurs soins que pour répondre à l'empressement d'un très-grand nombre de Mathématiciens pour cet Ouvrage , & sur tout les jeunes Geometres , qui le regardoient comme devant leur faciliter l'entrée à la sublime Analyse des Infiniment petits , je le publie avec toute la confiance possible , quoique dénué de la Preface que la maladie de l'un de ces deux Geometres, & les grandes occupations de l'autre, ne leur ont pas permis de faire ; & je me persuade que les Lecteurs contents du fond de l'Ouvrage , ne le seront pas moins de son execution , tant pour la beauté du papier & du caractère , que pour l'exactitude.



TABLE



T A B L E.

LIVRE PREMIER.

De la Parabole. page 1

LIVRE SECOND.

De l'Ellipse. 19

LIVRE TROISIÈME.

De l'Hyperbole. 47

LIVRE QUATRIÈME.

Des trois Sections Coniques. 87

LIVRE CINQUIÈME.

*De la Comparaison des Sections Coniques entr'elles ,
& de leurs Segmens.* 122

LIVRE SIXIÈME.

Des Sections Coniques considérées dans le Solide. 166

LIVRE SEPTIÈME.

Des Lieux Geometriques. 206

LIVRE HUITIÈME.

Des Problèmes indéterminés. 249

LIVRE NEUVIÈME.

De la construction des Egalités.

291

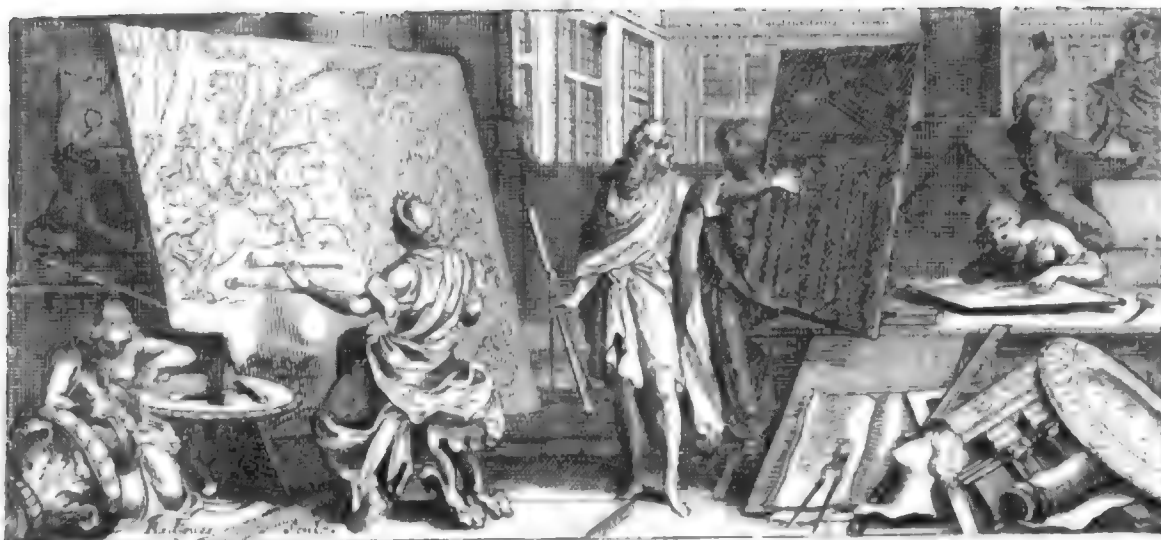
LIVRE DIXIÈME.

Des Problèmes déterminés.

362

F I N.

TRAITE



TRAITÉ ANALYTIQUE DES SECTIONS CONIQUES,

*Et de leur usage pour la Résolution des Equations dans les
Problèmes tant déterminés qu'indéterminés.*

LIVRE PREMIER.

De la Parabole.

DÉFINITIONS.



I.
YANT placé sur un plan une Regle Fig. 12.
 BC , & une E'querre GDO , en sorte
que l'un de ses côtés DG soit couché
le long de cette regle, on prendra
un fil FMO égal en longueur à
l'autre côté DO de cette équerre,
duquel l'on attachera un bout à l'ex-
tremité O de ce côté DO , & l'autre
bout en un point quelconque F pris sur ce plan du mê-
me côté de l'équerre par rapport à la regle. Maintenant
A.

Si l'on fait glisser le côté DG de l'équerre le long de la règle BC , & qu'en même tems l'on se serve d'un style M pour tenir toujours le fil tendu, & sa partie MO toute jointe & comme collée contre le côté OD de l'équerre; la courbe AMX que le style M décrit dans ce mouvement, est une portion de Parabole.

Si l'on renverse l'équerre de l'autre côté du point fixe F , on décrira en la même façon l'autre portion AMZ de la même Parabole; de sorte que la ligne XAZ ne fera qu'une même courbe qu'on appelle *Parabole*.

2.

La ligne BC dans laquelle le bord inférieur de la règle immobile BC touche le plan & le côté DG de l'équerre GDO , est appelée *Directrice*.

3.

Le point fixe F du plan, est nommé le *Foyer* de la Parabole.

4.

Si l'on mène du point fixe F , sur la directrice BC une perpendiculaire FE qui rencontre la parabole au point A ; la ligne AF indéfiniment prolongée du côté de F , est appelée l'*Axe* de la parabole.

5.

La ligne p quadruple de AF , est appelée *Parametre* de l'axe.

6.

Toutes les lignes comme MP menées des points de la parabole perpendiculairement à l'axe, sont appelées *Ordonnées* à l'axe.

7.

Toutes les lignes comme MO menées des points de la parabole parallèlement à l'axe, en sont les *Diametres*.

8.

Une ligne droite qui ne rencontre la parabole qu'en un point, & qui étant continuée de part & d'autre n'entre point dedans, mais tombe au dehors, est appelée *Tangente* en ce point.

COROLLAIRE I.

1. IL suit de la définition de la Parabole que si l'on tire par un de ses points quelconques M au foyer F une ligne droite MF , & sur la directrice BC une perpendiculaire MD ; les droites MF , MD , seront toujours égales entre elles. Car si l'on retranche du côté OD de l'équerre & du fil OMF qui * lui est égal, la partie commune OM , * *Def. 1.* il est visible que les parties restantes MD , MF , seront toujours égales entre elles.

COROLLAIRE II.

2. DE LA il est évident, que si l'on mene une ligne droite quelconque KK parallèle à la directrice BC , & que d'un point quelconque M de la parabole, on tire sur cette ligne la perpendiculaire MK , & au foyer la droite MF ; la différence ou la somme KD des deux droites MF , MK , sera toujours la même : sçavoir la différence lorsque le point M tombe au dessous de KK , & la somme lorsqu'il tombe au dessus.

COROLLAIRE III.

3. IL est évident que FE est divisée en deux parties égales par la parabole au point A . Car supposant que le point M tombe au point A , la ligne MF tombe sur AF , & la ligne MD sur AE , qui seront par conséquent égales entre elles; puisque MF est toujours * égale à MD , en * *Art. 1.* quelque endroit de la parabole que tombe le point M .

COROLLAIRE IV.

4. DE LA on voit comment on peut décrire une parabole XAZ , l'axe AP dont le point A est l'origine étant donné, avec son paramètre p . Car ayant pris sur l'axe AP de part & d'autre du point A les parties AF , AE égales chacune au quart de son paramètre p , & mené par le point E la perpendiculaire indéfinie BC sur FE ; si l'on couche le bord inférieur d'une règle sur cette ligne.

A ij

BC qui sert de directrice, & que par le moyen d'une équerre ODG , & d'un fil FMO égal au côté OD , & attaché par l'un de ses bouts au foyer F , & par l'autre bout à l'extrémité O de ce même côté, l'on décrive une Parabole XAZ comme l'on a enseigné dans la définition première, il est visible qu'elle sera celle qu'on demande.

* *Def. 1.* Il n'est pas moins visible que plus le côté OD de l'équerre & le fil OMF (qui * lui doit être égal) sera long, plus aussi la portion de la parabole qu'on décrira sera grande; de sorte qu'on la peut augmenter autant que l'on voudra, en augmentant également le côté OD de l'équerre & le fil OMF .

COROLLAIRE V.

5. Si d'un point quelconque M de la Parabole l'on mène une ordonnée MP à l'axe, & au foyer F la droite MF ; il est clair que cette ligne $MF = AP + AF$, puisque $MF = MD = AP + AE$, & que * $AF = AE$.

* *Art. 3.*

PROPOSITION I.

Theorème.

FIG. I.

6. LE carré d'une ordonnée quelconque MP à l'axe AP , est égal au rectangle du paramètre p , par la partie AP de l'axe prise entre son origine A & la rencontre P de l'ordonnée.

Il faut prouver que $MP^2 = p \times AP$.

* *Art. 5.* Ayant nommé la donnée AF , m ; & les indéterminées AP , x ; PM , y ; on aura $MF = m + x$, & $PF = x - m$ ou $m - x$, selon que le point p se trouve au dessous ou au dessus du foyer F . Or le triangle rectangle MPF donne en l'un & l'autre cas $MF^2 (mm + 2mx + xx) = MP^2 (yy) + PF^2 (mm - 2mx + xx)$; d'où l'on tire $4mx = yy$. Donc puisque selon la 5^e définition $p = 4m$, on aura aussi $yy = px$. Ce qu'il falloit démontrer.

DE LA PARABOLE.

5

COROLLAIRE PREMIER ET FONDAMENTAL.

7. IL est donc évident que si l'on nomme p le parametre de l'axe AP ; chacune de ses parties AP, x ; & FIG. 2.
chacune de ses ordonnées correspondantes PM, y ; on
aura toujours $yy = px$. Or comme cette propriété con-
vient à tous les points de la parabole, & en détermine la
position par rapport à son axe AP ; il s'ensuit que l'équa-
tion $yy = px$ exprime parfaitement la nature de la para-
bole par rapport à son axe.

COROLLAIRE II.

8. SI l'on mene deux ordonnées quelconques MP , FIG. 2.
 NQ à l'axe AP , leurs quarrés seront entreux comme
les parties AP & AQ de l'axe, prises entre son origine A
& les rencontres P & Q de ces mêmes ordonnées. Car * Art. 6.
 $\overline{PM} \cdot \overline{QN} :: p \times AP. p \times AQ :: AP. AQ.$ 7.

COROLLAIRE III.

9. SI l'on mene par un point quelconque P de l'axe
 AP une parallele MPM à ses ordonnées, elle rencon-
trera la parabole en deux points M & M également éloi-
gnés de part & d'autre du point P , & non en davan-
tage. Car afin que les points M & M soient à la parabo-
le, il faut * que les quarrés de chaque PM (y) prise de * Art. 7.
part & d'autre du point P , soient égaux chacun au mê-
me rectangle px .

COROLLAIRE IV.

10. IL suit de ce que * $yy = px$, que plus AP (x) est * Art. 7.
grande, plus aussi l'ordonnée PM (y) prise de part &
d'autre de l'axe AP augmente, & cela à l'infini ; & qu'au
contraire plus AP (x) diminue, plus aussi l'ordonnée
 PM (y) devient petite : de sorte que AP (x) étant nulle
ou zero, chaque PM (y) prise de part & d'autre de l'axe
 AP devient aussi nulle ; c'est-à-dire que le point P tom-
bant en A , les deux points de rencontre M & M se ren-

A iij

nissent en ce point. D'où il est clair.

1°. Que si l'on mène par l'origine A de l'axe une ligne LL parallèle à ses ordonnées, elle sera tangente en A .

1°. Que la Parabole s'éloigne de part & d'autre de plus en plus à l'infini de son axe AP à commencer par son origine A ; & qu'ainsi toute parallèle comme LM à l'axe AP , ne rencontre la Parabole qu'en un seul point M , & passe au dedans, puisque la distance de l'axe demeure partout la même.

COROLLAIRE V.

II. S I d'un point quelconque M de la Parabole l'on tire une parallèle ML à l'axe AP , laquelle rencontre en L la parallèle AL à ses ordonnées; il est clair en menant l'ordonnée MP , que $AL = PM$ (y), & que $ML = AP$ (x) $= \frac{yy}{p}$, puisque * $px = yy$. D'où il suit que les droites ML ($\frac{yy}{p}$), ML ($\frac{yy}{p}$) prises de part & d'autre de l'axe AP sont égales entr'elles, lorsque les points L, L sont également éloignés du point A ; & partant que si une ligne quelconque MM terminée par la parabole est coupée en deux parties égales par l'axe en P , elle sera parallèle à la ligne LL , c'est à dire qu'elle sera ordonnée de part & d'autre à l'axe. Car ayant mené les parallèles ML, ML à l'axe AP , il est évident que LL sera divisée par le milieu en A , puisque MM l'est en P . Les droites ML, ML , seront donc égales entr'elles comme on vient de le prouver; & par conséquent la ligne MM sera parallèle à LL .

COROLLAIRE VI.

12. I L suit de ce que toutes les perpendiculaires MPM à l'axe AP , terminées de part & d'autre par la parabole, sont * coupées par le milieu en P ; que l'axe divise la parabole en deux portions entièrement égales & semblablement posées de part & d'autre. Car si le plan sur lequel elle est tracée, étoit plié le long de l'axe en sorte

que les deux parties se joignent, il est visible que les deux portions de la parabole tomberoient exactement l'une sur l'autre.

PROPOSITION II.

Theorème.

13. *Si l'on mène par l'origine A de l'axe AP une ligne droite quelconque AM dans l'un ou l'autre des angles PAL, PAL, faits par l'axe AP & par la ligne LL parallèle à ses ordonnées; je dis qu'elle ira rencontrer la parabole MAM en un autre point M.* FIG. 3.

Ayant pris sur AL de part ou d'autre du point A la partie AG égale au paramètre p de l'axe, & tiré GF parallèle à l'axe AP , & qui rencontre la ligne AM (prolongée s'il est nécessaire) au point F ; on prendra sur la ligne AL du même côté où tombe la ligne AM par rapport à l'axe AP , la partie AL égale GF ; & ayant tiré LM parallèle à l'axe, je dis que le point M où cette ligne rencontre la droite AM , sera à la parabole MAM .

Car menant MP parallèle à AL , les triangles semblables FGA , APM , donneront FG ou AL ou PM . $GA :: AP.PM$. Et partant $PM^2 = GA(p) \cdot AP$. La ligne PM sera donc une ordonnée à l'axe AP . *Ce qu'il falloit démontrer.* * Art. 7.

COROLLAIRE I.

14. *DE LA on voit comment l'axe AP d'une parabole MAM étant donné avec son paramètre p , & ayant mené par l'origine A de l'axe dans l'un ou l'autre des angles PAL, PAL, faits par l'axe AP & par la ligne LL parallèle à ses ordonnées, une ligne droite quelconque AM; on voit, dis-je, ce qu'il faut faire pour trouver sur cette ligne le point M où elle rencontre la parabole MAM.*

COROLLAIRE II.

- * Art. 10. 15. IL est évident * qu'il n'y a que la ligne ZAZ parallèle aux ordonnées à l'axe AP , qui puisse être tangente de la parabole MAM au point A origine de l'axe; puisqu'il n'y a que cette seule ligne qui passant par le point A , & étant continuée de part & d'autre, ne rencontre la parabole en aucun autre point, & n'entre pas dedans.

DÉFINITIONS.

9.

- FIG. 4. & 5. Si l'on mene par un point quelconque M de la parabole un diamètre MO , une ordonnée MP à l'axe AP , & une ligne droite MT qui coupe sur l'axe AP prolongé au delà de son origine A , la partie AT égale à AP ; toutes les lignes droites, comme NO , menées des points de la parabole parallèlement à MT , & terminées par le diamètre MO , sont appelées *Ordonnées* à ce diamètre.

10.

Si l'on prend la ligne q troisième proportionnelle à AT , MT ; cette ligne q sera nommée le *Parametre* du diamètre MO .

COROLLAIRE I.

16. SI l'on nomme l'indéterminée AP ou AT , x ; il est clair que $\overline{MT} = qx$, puisque $AT(x). MT :: MT.q$.

COROLLAIRE II.

- * Art. 7. 17. A Cause du triangle rectangle MPT , le carré $\overline{MT} (qx) = \overline{PT} (4xx) + \overline{MP}^2 (px)$; d'où en divisant par x , l'on tire $q = 4x + p$.

C'est à dire que le parametre q d'un diamètre quelconque MO , surpasse le parametre p de l'axe du quadruple de $AP(x)$.

COROLLAIRE III.

- * Art. 5. 18. SI l'on tire du point M au foyer F la droite MF , on aura $MF^2 = AP + AF$. Or selon la définition 5^e. le

DE LA PARABOLE.

le parametre de l'axe étant $p = 4 AF$, le parametre du diametre MO sera $q = 4 AP + 4 AF$. Donc le parametre q d'un diametre quelconque MO , vaut quatre fois la ligne MF tirée de son origine M au foyer F . Art. 17.

PROPOSITION III.

Theorème.

19. **L**E quarré d'une ordonnée quelconque ON au diametre MO , est égal au rectangle du parametre q , par la partie MO de ce diametre, prise entre son origine M & la rencontre O de l'ordonnée. Fig. 4. 5.

Il faut prouver que $\overline{ON}^2 = q * MO$.

Ayant mené l'ordonnée NQ à l'axe AP , laquelle rencontre le diametre MO au point R , & tiré QH parallele à MP , on nommera les données AP ou AT , x ; PM ou RQ , y ; & les indéterminées OR ou HQ , a ; MO ou PH , b ; les triangles semblables TPM , ORN , donneront cette proportion $TP (1x). PM (y) :: OR (a). RN = \frac{ay}{1x}$. Cela posé.

Puisque (fig. 4.) $NQ = RQ (y) - RN (\frac{ay}{1x})$, ou $RN (\frac{ay}{1x}) - RQ (y)$, & $AQ = AH (x + b) - HQ (a)$, lorsque le point N tombe du côté de l'axe AP par rapport au diametre MO ; & qu'au contraire (fig. 5.) $NQ = RQ (y) + RN (\frac{ay}{1x})$, & $AQ = AH (x + b) + HQ (a)$, lorsqu'il tombe du côté opposé : on aura $\overline{QN}^2 = yy \pm \frac{ayy}{x} + \frac{a^2yy}{4xx}$, & $AQ = x + b \pm a$, sçavoir — dans le premier cas, & + dans le second. Or $AP (x). AQ (x + b \pm a) :: PM^2 (yy). \overline{QN}^2 = yy \pm \frac{ayy}{x} + \frac{a^2yy}{4xx}$. Art. 8.

B.

deux valeurs de \overline{QN} , l'égalité $yy + \frac{by}{x} + \frac{ay}{x} = yy + \frac{ay}{x} + \frac{ay}{x}$, d'où en effaçant de part & d'autre $yy + \frac{ay}{x}$, divisant par yy , & multipliant par $4xx$, l'on tirera $\overline{OR} (aa) = 4bx$. Mais les triangles semblables MPT , NRO , donnent $\overline{PT} (4xx) \cdot \overline{OR} (4bx) :: \overline{MT} * (qx) \cdot \overline{ON} = bq = q * MO (b)$. *Ce qu'il falloit, &c.*

* Art. 16.

COROLLAIRE GENERAL.

20. IL est visible que ce qu'on a démontré dans la proposition premiere par rapport à l'axe AP , à ses ordonnées PM , & à son parametre p , s'étend par le moyen de cette dernière proposition à un diamètre quelconque MO , à ses ordonnées ON , & à son parametre q . Or comme les articles 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14 & 15 se tirent de la première proposition, & subsistent également, soit que les angles APM soient droits, ou bien qu'ils ne le soient pas; il s'ensuit que si l'on imagine dans ces articles que la ligne AP , au lieu d'être l'axe, soit un diamètre quelconque, qui ait pour ordonnées les droites PM , QN , & pour parametre la ligne p , ils seront encore vrais dans cette supposition; car leur démonstration demeurera la même, & il ne faut pour s'en convaincre entièrement, que les relire en mettant partout où se trouve le mot d'axe, celui de diamètre.

COROLLAIRE II.

FIG. 4. & 5.

21. COMME les articles 10 & 15 subsistent avec la même force, lorsque la ligne AP au lieu d'être l'axe, est un diamètre quelconque, tel que MO ; il s'ensuit que la ligne MT parallèle aux ordonnées ON à ce diamètre, est tangente en M , & qu'il n'y a que cette seule ligne qui puisse toucher la parabole en ce point.

D'où l'on voit que d'un point donné sur une parabole, on ne peut mener qu'une seule tangente.

COROLLAIRE III.

22. **D**E LA il est évident selon la définition 9. que si l'on mène par un point quelconque M d'une parabole, une ordonnée MP à l'axe AP , & une ligne droite MT qui coupe sur l'axe prolongé du côté de son origine A , la partie AT égale à AP ; cette ligne MT sera tangente en M . Et réciproquement que si la ligne MT est tangente en M , & qu'on mène l'ordonnée MP à l'axe; les parties AT , AP , de l'axe seront égales entr'elles.

COROLLAIRE IV.

23. **S**I l'on imagine dans les définitions 9 & 10, & dans la dernière proposition, que la ligne AP au lieu d'être l'axe, soit un diamètre quelconque, qui ait pour ordonnées les droites PM , QN ; on verra que cette FIG. 6. proposition sera encore vraie, puisqu'elle se démontrera de la même manière qu'auparavant, comme il est évident par la seule inspection de la fig. 6. où les triangles semblables donnent les mêmes proportions que dans le cas de l'axe.

D'où il suit 1°. Que le Corollaire précédent doit encore avoir lieu, lorsque la ligne AP au lieu d'être l'axe, est un diamètre quelconque. 2°. Que le diamètre MO peut être l'axe dans cette supposition; & qu'ainsi on peut regarder l'axe comme un diamètre qui fait avec ses ordonnées des angles droits.

PROPOSITION IV.

Théorème.

24. **S**I par un point quelconque M d'une parabole, l'on FIG. 7. mène une ordonnée MP à l'axe, & une perpendiculaire MG à la tangente MT qui passe par le point M ; je dis que la partie PG de l'axe sera toujours égale à la moitié de son paramètre p .

Il faut prouver que $PG = \frac{1}{2}p$.

B ij

Car à cause des angles droits TPM , TMG , on aura $TP (2x)$. $PM (y) :: PM (y)$. $PG = \frac{y^2}{2x} = \frac{1}{2}p$, en met-

* Art. 7. tant à la place de yy sa valeur * px .

PROPOSITION V.

Theorème.

FIG. 7.

25. Si par un point quelconque M d'une parabole, l'on mene au foyer F la droite MF , un diamètre MO , & une tangente TMS ; les angles FMT , OMS , faits par la tangente TMS d'un côté avec la droite MF , & de l'autre avec le diamètre MO , seront égaux entr'eux.

Car menant l'axe AP qui rencontre en T la tangente TMS , & l'ordonnée MP à l'axe; on aura * $TA + AF$ ou $TF = AP + AF$ ou * MF . Le triangle TFM sera donc isoscèle; & par conséquent l'angle FTM , ou sont égal OMS , sera égal à l'angle FMT . Ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE.

26. DE-LA il est clair que la tangente TMS prolongée indéfiniment de part & d'autre du point touchant M , laisse la parabole toute entière du côté de son foyer F . Et comme cela arrive toujours en quelque endroit de la parabole que tombe le point touchant M , il s'ensuit que cette ligne courbe est concave dans toute son étendue autour de son foyer F .

PROPOSITION VI.

Problème.

FIG 8.&9.

27. UN diamètre AP avec la tangente LAL qui passe par son origine A , & son paramètre étant donnés; trouver un diamètre BQ qui fasse de part ou d'autre avec ses ordonnées, un angle égal à l'angle donné K , son origine B , & son paramètre.

Ayant mené par l'origine A du diamètre donné la ligne AE qui fasse avec ce diamètre de part ou d'autre, l'angle PAE égal à l'angle donné K , & trouvé * sur * *Art. 14.* cette ligne (prolongée de l'autre côté de A lorsqu'elle *Fig. 10.* ne tombe point dans l'un ou l'autre des angles PAL , PAL) le point M où elle rencontre la parabole, on menera par le point du milieu Q de la ligne AM , une parallèle QD au diamètre AP , qui rencontre la tangente AL au point D ; & on divisera QD par le milieu en B . Je dis que la ligne BQ est le diamètre qu'on cherche, qu'il a pour origine le point B , & pour paramètre une troisième proportionnelle à BQ , & QA .

Car 1°. La ligne AM étant divisée en deux parties égales au point Q par le diamètre BQ , elle sera ordonnée * *Art. 11.* de part & d'autre à ce diamètre; & comme les lignes BQ , *Fig. 10.* AP sont parallèles entr'elles, l'angle BQA que fait le diamètre BQ avec son ordonnée QA sera égal à l'angle PAM égal à l'angle donné K ou son complément à deux droits. 2°. Le point du milieu B de la ligne QD sera l'origine * de ce diamètre, puisque AQ en est une *Art. 12.* ordonnée. 3°. Le paramètre du diamètre BQ est * la *Fig. 11.* troisième proportionnelle à BQ , QA . *Art. 19.*

Lorsque l'angle donné K n'est pas droit, il est clair *Fig. 8.* qu'on peut mener de part & d'autre du diamètre AP deux différentes lignes AE qui fassent avec ce diamètre des angles égaux à l'angle donné K ; & qu'ainsi on pourra toujours avoir deux solutions différentes, en observant que si l'une des deux lignes AE tomboit sur la tangente AL , le diamètre donné AP satisferoit lui-même à la question. Mais lorsque cet angle K est droit, comme l'on ne peut mener qu'une seule ligne AE qui *Fig. 9.* fasse avec le diamètre AP un angle droit, il s'ensuit qu'on ne peut avoir alors qu'une solution; & qu'ainsi * *Art. 13.* le diamètre cherché sera l'axe.

il est à remarquer que les deux diamètres BQ , BQ , qui satisfont au Problème lorsque l'angle donné K n'est *Fig. 10.* pas droit, sont semblablement posés de part & d'autre

de l'axe AP , & que leurs parametres sont égaux : ce qui se voit par la construction même, en supposant que le diametre donné AP soit l'axe, & en menant deux différentes lignes AE , AE de part & d'autre. Car les triangles rectangles ALM , ALM , & ADQ , ADQ étant visiblement égaux & semblables entr'eux, les lignes AD , AD ; DQ , DQ ; leurs moitiés BQ , BQ ; & les ordonnées QA , QA seront égales entr'elles; * & par conséquent les parametres le seront aussi.

* Art. 19.

COROLLAIRE.

28. IL est donc évident, 1°. qu'il n'y a qu'un seul diametre qui fasse avec ses ordonnées des angles droits; & qu'ainsi il ne peut y avoir qu'un seul axe. 2°. Qu'on peut toujours trouver deux differens diametres, qui fassent avec leurs ordonnées des angles égaux à un angle donné, lorsque cet angle n'est pas droit; que ces deux diametres seront semblablement posés de part & d'autre de l'axe, & qu'ils auront des parametres égaux.

PROPOSITION VII.

Problème.

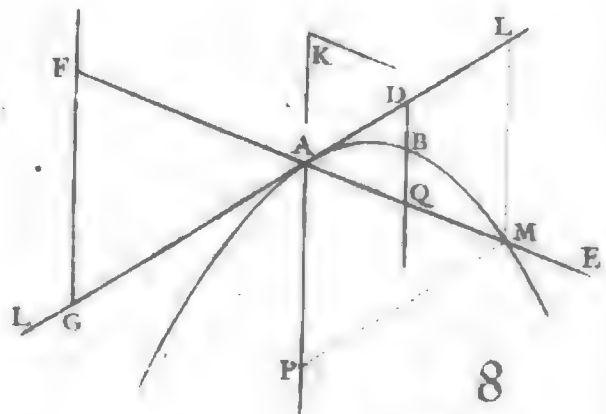
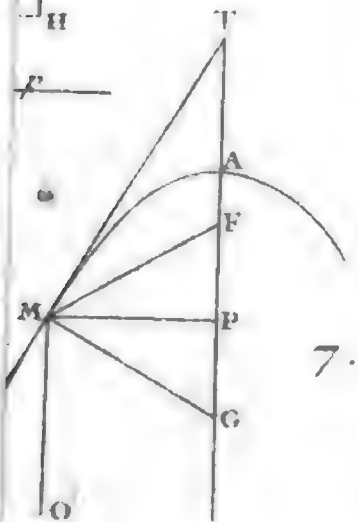
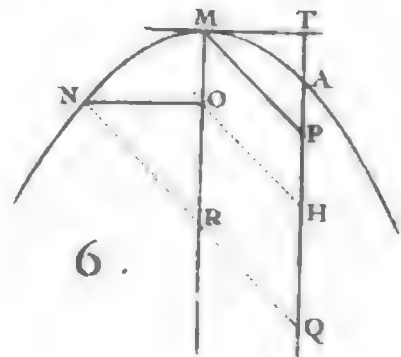
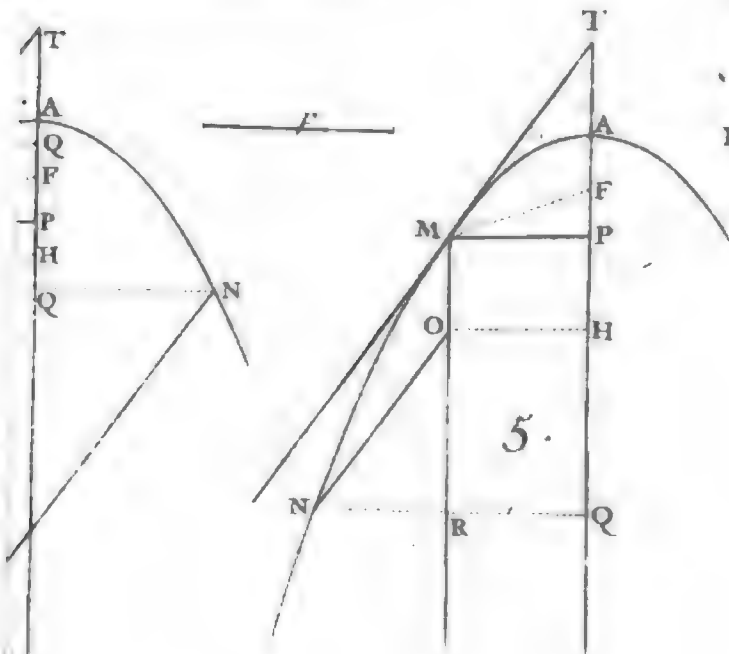
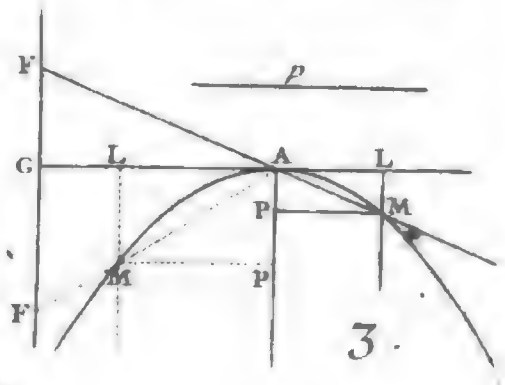
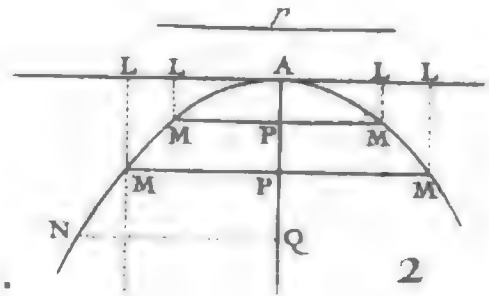
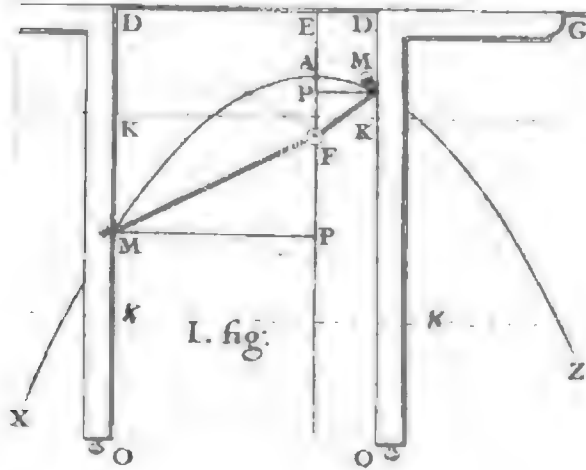
29. UN diametre étant donné avec la tangente qui passe par son origine, & son parametre; décrire la parabole par un mouvement continu.

PREMIERE MANIERE.

Si le diametre donné étoit l'axe, on la décriroit selon l'article 4^e; mais lorsqu'il ne l'est pas, soit MO le diametre donné, & TMS la tangente qui passe par son origine M . Cela posé.

FIG. II.

On prendra sur le diametre MO prolongé au delà de son origine M , la partie MD égale au quart de son parametre; & on tirera une perpendiculaire indéfinie DE à MD . On menera MF qui fasse avec la tangente TMS un angle FMT égal à l'angle OMS ; & ayant pris MF égale à MD , on décrira selon la définition



remière, une parabole qui ait pour directrice la ligne DE , & pour foyer le point F . Je dis qu'elle sera celle qu'on demande.

Car, 1°. La ligne MO étant perpendiculaire à la directrice DE , sera parallèle à l'axe; & par conséquent un diamètre selon la définition 7^e. 2°. La ligne TMS sera * * Art. 25. tangente en M . 3°. Le paramètre du diamètre MO sera * quadruple de MF . * Art. 18.

SECONDE MANIÈRE.

Soit AP le diamètre donné, & LAL la tangente qui FIG. 12. passe par son origine A . Cela posé.

Ayant pris sur le diamètre AP , prolongé au delà de son origine A , la partie AG égale à son paramètre, & mené une droite indéfinie DGD qui fasse avec AG l'angle AGD égal à l'angle GAL pris du même côté; on fera mouvoir une ligne droite indéfinie DM le long de GD toujours parallèlement à AG , en entraînant par son extrémité D le côté DA de l'angle DAM égal à l'angle GAL , & mobile par son sommet autour du point fixe A . Je dis que l'intersection continuelle M de la ligne DM & du côté AM , décrira dans ce mouvement la parabole qu'on demande.

Car menant MP parallèle à AL , les lignes MP, GD seront égales entr'elles, puisque l'angle APM ou GAL étant égal à l'angle AGD , elles seront également inclinées entre les parallèles GP, DM . Or les triangles AGD, MPA sont semblables: car l'angle MPA ou GAL est égal à l'angle AGD ; & l'angle PMA ou MAL égal à l'angle GAD , puisque retranchant des angles égaux GAL, DAM , le même angle DAL , les restes doivent être égaux. On aura donc $AG.GD$ ou $PM::PM.AP$, & partant $GA * AP = PM^2$; d'où il clair que PM est * * Art. 19. une ordonnée au diamètre AP qui a pour origine le FIG. 13. point A , pour tangente la ligne LAL , & pour paramètre la ligne AG . Ce qu'il falloit, &c.

Si le diamètre AP étoit l'axe, alors les lignes GD , FIG. 13.

AL , seroient paralleles, & la démonstration deviendrait plus facile; car l'on voit tout d'un coup que GD est égale à PM , & que les triangles rectangles AGD , MPA sont semblables; d'où il suit $AG \cdot GD$ ou $PM :: PM \cdot AP$. Donc $AG \cdot AP = PM^2$, &c.

PROPOSITION VIII.

Problème.

30. **U**N diametre AP étant donné avec son parametre, & la tangente AL qui passe par l'origine A de ce diametre; trouver autant de differens points que l'on voudra de la parabole, ou (ce qui est la même chose) la décrire par plusieurs points.

PREMIERE MANIERE.

FIG. 14.

Ayant pris sur le diametre AP prolongé au delà de son origine A , la partie AG égale à son parametre, divisé AG en deux parties égales au point D , & mené une ligne droite indéfinie AF perpendiculaire à AG ; on décrira d'un point C pris partout où l'on voudra sur DA prolongée indéfiniment du côté de A , comme centre, & du rayon CG , un arc de cercle PF qui coupera le diametre AP & sa perpendiculaire AF en deux points P , F . On menera par le point P une parallele PM à la tangente AL , sur laquelle on prendra de part & d'autre les parties PM , PM , égales chacune à AF . On trouvera de la même maniere autant de couple de points M que l'on voudra; par lesquels on fera passer une ligne courbe MAM qui sera la parabole qu'on demande.

Car tous les arcs PF passant par le même point G , & ayant leurs centres sur la ligne GA prolongée, s'il est nécessaire du côté de A , auront pour diametres les lignes GP ; & par conséquent la propriété de ces cercles donnera toujours $AF^2 = GA \cdot AP$. Mais chaque PM est * égale à sa correspondante AF , & de plus parallele.

* Hyp.

à la tangente AL qui passe par l'origine A du diamètre AP ; elle sera donc * ordonnée à ce diamètre. C'est * *Art. 19.* pourquoi la Parabole qu'on demande, doit passer par \odot 21. tous les points M , trouvés comme l'on vient d'enseigner.

Il est visible qu'on peut se tromper en traçant les parties de la parabole, qui joignent les points trouvés ; mais on voit en même temps que l'erreur ne peut être sensible, lorsque ces points sont fort près les uns des autres. Ceux qui ont besoin de décrire souvent des Sections Coniques, préfèrent ordinairement cette méthode, de les décrire par plusieurs points ; parce que les machines dont on se sert pour les décrire par un mouvement continu, étant composées, sont souvent fautives, & peu exactes dans la pratique.

SECONDE MANIÈRE.

Ayant mené par un point quelconque L de la tangente AL , une parallèle indéfinie LE au diamètre AP ; on prendra sur cette ligne & sur le diamètre AP prolongé au delà de son origine A , les parties LE , EE , EE , &c. AF , FE , FE , &c. toutes égales entr'elles, & de telle grandeur qu'on voudra. On marquera sur LE , le point M , en sorte que LM soit troisième proportionnelle au paramètre donné du diamètre AP , & à la partie AL de la tangente. On tirera enfin des points A , M , les lignes AE , AE , AE , &c. MF , MF , MF , &c ; je dis que les points d'intersection N , N , N , &c. de chaque AE , avec la correspondante MF , seront tous à la parabole qu'on demande. FIG. 15.

Car menant par le point marqué M , & par l'un des points trouvez N , les lignes MP , NQ , parallèles à la tangente AL , & nommant AP , x ; PM ou AL , y ; AQ , u ; QN , z ; les triangles semblables NQA , ALE , & MPF , NQF , donneront ces deux proportions QN (z), QA (u) :: AL (y), LE ou $AF = \frac{u^2}{z}$. & MP C.

(y). PF ou $PA + AF (x + \frac{xy}{z}) :: NQ (z). QF$ ou $QA + AF (u + \frac{xy}{z})$. D'où en multipliant les Extrêmes & les Moyens, l'on forme l'égalité $xy + \frac{xy^2}{z} =$

$xz + uy$; & effaçant de part & d'autre uy , & multipliant par z , il vient $xyy = xzz$, qui se réduit à cette proportion $AP (x). AQ (u) :: MP (yy) NQ (zz)$.

Or par la construction, le carré de AL ou de PM , est égal au rectangle de la partie AP du diamètre donné, par son parametre. Cette ligne PM sera donc *

* Art. 19.

☉ 21.

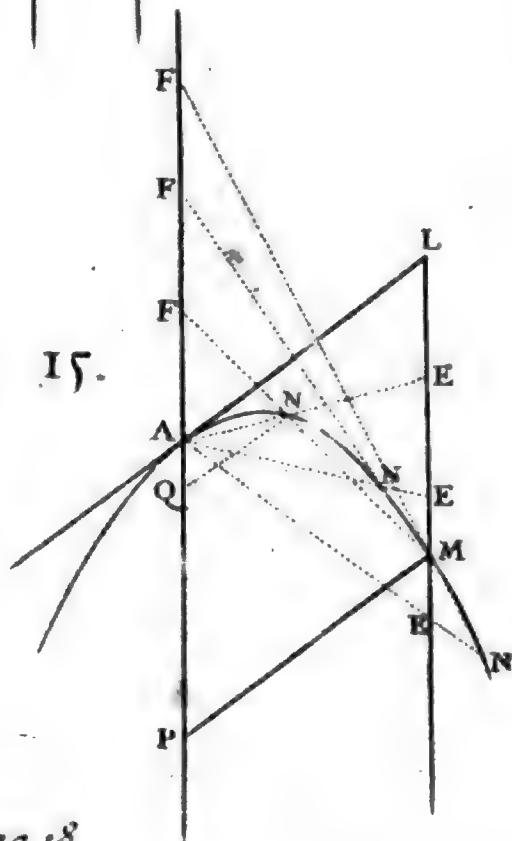
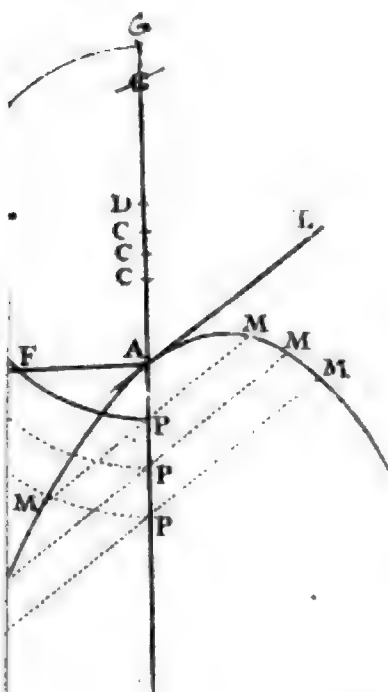
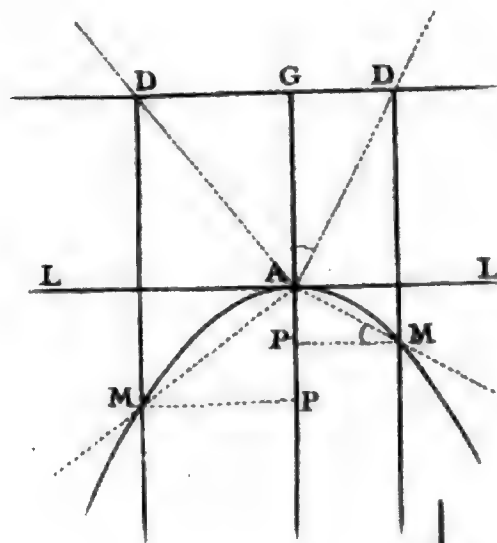
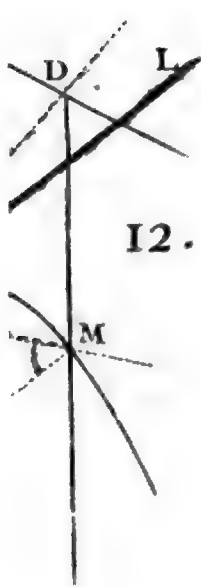
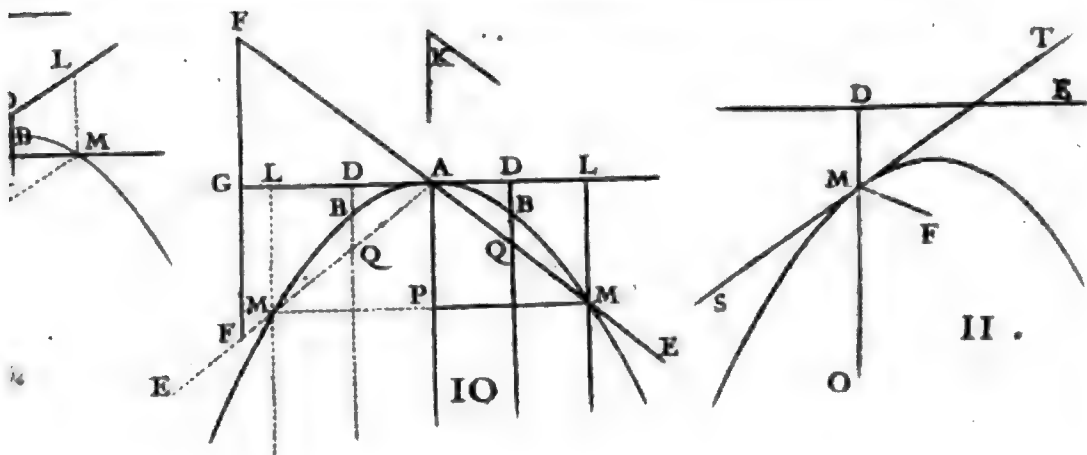
* Art. 8. ☉

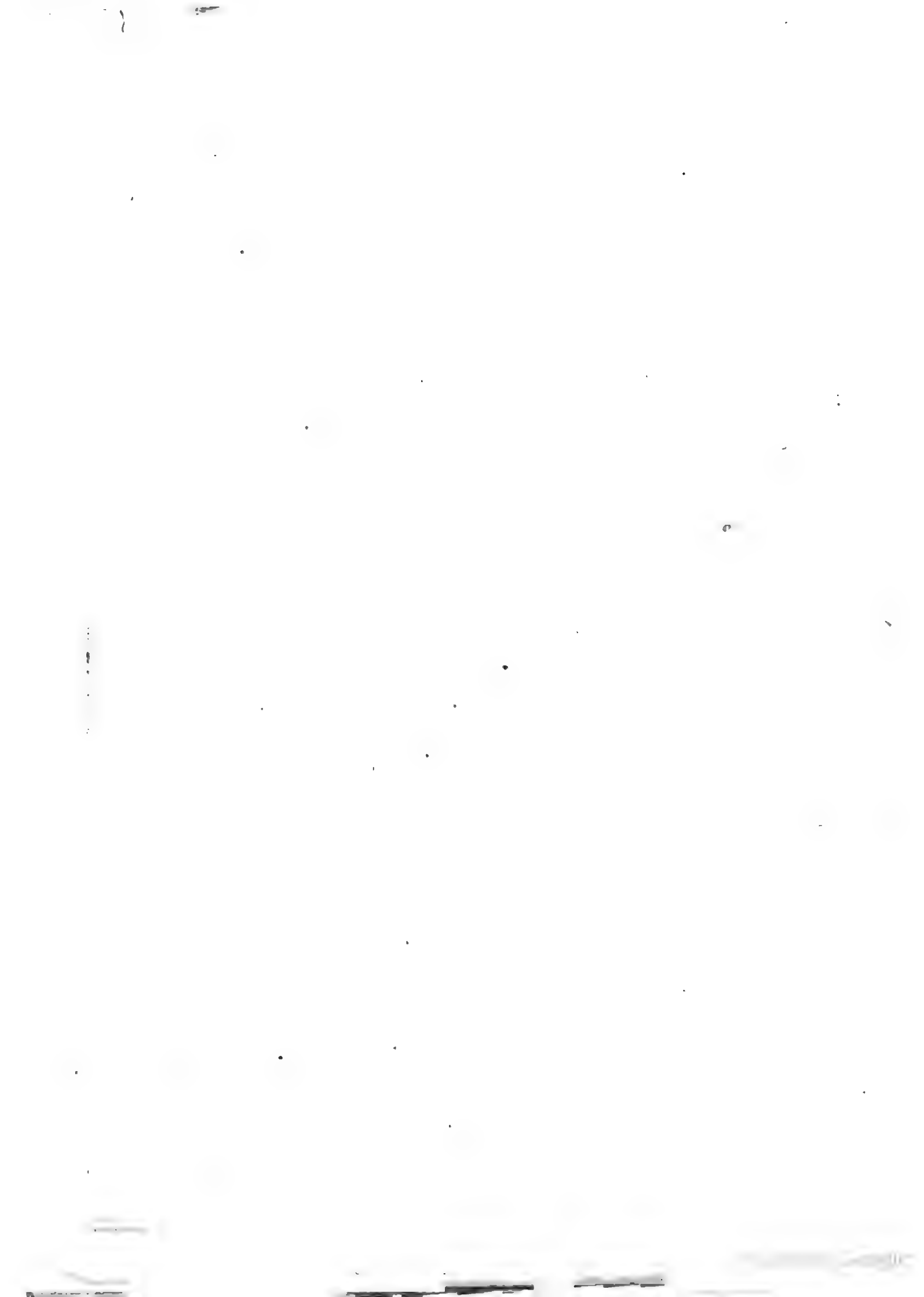
20.

ordonnée au diamètre AP ; & par conséquent QN en sera * une autre. Ainsi le point N sera l'un des points de la parabole qui tombent d'un côté du diamètre AP : pour les avoir de l'autre, il n'y a qu'à prendre sur les droites indéfinies LE, AF , les parties égales LE, EE , &c. AF, FF , &c de l'autre côté des points L, A .

Si au lieu du parametre du diamètre AP que l'on suppose ici donné, l'on avoit un des points M de la parabole; ce qui arrive souvent: il n'y auroit qu'à mener par ce point, une parallèle indéfinie LE , au diamètre AP , & achever le reste comme cy-dessus.







LIVRE SECOND.

De l'Ellipse.

DÉFINITIONS.

1.
A YANT attaché sur un plan les deux bouts d'un fil FIG. 169
 FMf , en deux points F, f , dont la distance Ff soit
 moindre que la longueur du fil, on se servira d'un stile
 M , pour tenir ce fil toujours tendu; & conduisant ce
 stile autour de ces deux points, en sorte qu'il revienne au
 même point d'où il étoit parti: ce stile décrira dans ce
 mouvement, une ligne courbe, qui sera nommée *Ellipse*.

2.
 Les deux points fixes F, f , sont nommés les deux
Foyers.

3.
 La ligne Aa , qui passe par les deux Foyers F, f , &
 qui est terminée de part & d'autre par l'Ellipse, est ap-
 pellée le *premier* ou le *grand Axe*.

4.
 Le point C , qui divise par le milieu le premier Axe
 Aa , est nommé le *Centre* de l'Ellipse.

5.
 La ligne Bb , menée par le Centre C , perpendicu-
 lairement au premier Axe Aa , & terminée de part &
 d'autre par l'Ellipse, est appelée le *second* ou le *petit Axe*.

6.
 Les deux Axes Aa, Bb , sont appelez ensemble, *Con-
 jugués*: de sorte que le premier Axe Aa , est dit conju-
 gué au second Bb ; & reciproquement le second Bb , conju-
 gué au premier Aa .

7.
 Les lignes MP, MK , menées des points M de l'El-
 lipse parallelement à l'un des Axes, & terminées par
 C. ij,

l'autre ; sont appellées *Ordonnées* à cet autre Axe : ainsi MP est Ordonnée à l'Axe Aa , & MK à l'Axe Bb .

8.

La troisième proportionnelle aux deux Axes, est appelée *Parametre* de celui qui est le premier terme de la proportion. Ainsi si l'on fait comme le premier Axe Aa , est au second Axe Bb , de même le second Bb , à une troisième proportionnelle p ; cette ligne p sera le *Parametre* du premier Axe.

9.

Toutes les lignes droites qui passent par le centre C , & qui sont terminées de part & d'autre par l'Ellipse, sont appellées *Diametres*.

10.

Une ligne droite qui ne rencontre l'Ellipse qu'en un seul point, & qui étant continuée de part & d'autre, n'entre point dedans, mais tombe au dehors, est appelée *Tangente* en ce point.

REMARQUE.

FIG. 17.

31. Si l'on conçoit que les deux foyers F, f , & le centre C se réunissent en un seul point ; il est visible que l'Ellipse se changera alors en un Cercle qui aura pour rayon la droite CM , égale à la moitié de la corde CMC , attachée par ces deux bouts au point C , qui en sera le centre. On pourra donc considérer un cercle comme une espèce particulière d'Ellipse, dans laquelle la distance des foyers est nulle ; de sorte que tout ce qu'on démontrera dans la suite de l'Ellipse, telle que puisse être la distance de ces deux foyers, se peut aussi appliquer au cercle, en supposant que cette distance devienne nulle.

COROLLAIRE I.

FIG. 16.

32. Il suit de la définition première, que si l'on mène d'un point quelconque M de l'Ellipse, aux deux foyers F, f , les droites MF, Mf ; leur somme sera toujours la même.

COROLLAIRE II.

33. LORSQUE le point M tombe en A , il est visible que MF devient AF , & que Mf devient Af : de même lorsque le point M tombe en a , il est encore visible que MF devient aF , & que Mf devient af . On aura donc $AF + Af$, ou $2AF + Ff = aF + af$, ou $2af + fF$; & partant $AF = af$. D'où il suit:

1°. Que la somme des deux droites MF , Mf , est toujours égale au premier axe Aa , puisque $Mf + MF = Af + AF = Af + fa$.

2°. Que la distance Ff des foyers, est divisée en deux parties égales par le centre C , puisque $CA - AF$ ou $CF = Ca - af$ ou Cf .

COROLLAIRE III.

34. SI de l'extrémité B du second axe Bb , l'on mène aux deux foyers F, f , les droites BF, Bf ; il est clair que les triangles rectangles BCF, BCf , seront égaux; & qu'ainsi l'hypothénuse BF , est égal à l'autre hypothénuse Bf : & par conséquent BF , ou $Bf = CA$ ou Ca , puisque $*BF + Bf = Aa$. On prouve de même * Art. 33, que Fb ou $bf = CA$ ou Ca . D'où l'on voit:

1°. Que le second axe Bb , est divisé en deux parties égales par le centre C ; car les triangles rectangles FCB, FCb seront égaux, puisqu'ils ont des hypothénuses égales FB, Fb , & le côté FC commun.

2°. Que le second axe Bb , est toujours moindre que le premier Aa ; puisque sa moitié BC étant l'un des côtés du triangle rectangle BCF , sera moindre que son hypothénuse BF , qui est égale à la moitié CA du premier axe Aa .

3°. Que si l'on décrit de l'une des extrémités B du petit ou second axe Bb comme centre, & du rayon BF égal à CA , moitié du premier ou grand axe Aa , un cercle, il coupera ce grand axe en deux points F, f , qui seront les deux foyers de l'Ellipse.

COROLLAIRE IV.

35. **L**es mêmes choses étant posées, si l'on nomme CA ou BF , t ; CF , m ; le triangle rectangle BCF , donnera $\overline{BC} = tt - mm$. Or $AF = t - m$, & $Fa = t + m$, & partant $AF * Fa = tt - mm$. D'où il est évident que le quarré de la moitié CB du petit axe Bb , est égal au rectangle de AF par Fa parties du grand axe Aa , prises entre l'un des foyers F , & ses deux extrémités A, a .

COROLLAIRE V.

* Art. 34. 36. **I**l sera facile à présent de décrire une Ellipse dont les deux axes Aa , Bb , sont donnez. Car ayant trouvé sur le premier ou grand axe Aa , les foyers F, f , on attachera dans ces points, les extrémités d'un fil $F M f$, dont la longueur égalera celle de cet axe; & ayant décrit par le moyen de ce fil, une Ellipse comme l'on a enseigné dans la définition première, il est évident qu'elle sera celle qu'on demande.

PROPOSITION I.

Theorème.

FIG. 16.

37. **S**i l'on mene l'ordonnée MP au premier ou grand axe Aa , & qu'on prenne sur cet axe la partie AD égale à MF ; Je dis que $CA. CF :: CP. CD$.

Ayant nommé, comme auparavant, les données CA , t ; CF , m ; & de plus les indéterminités CP , x ; PM , y ; & l'inconnue CD , z ; il peut arriver deux différens cas.

Premier cas. Lorsque le point P tombe au dessus du centre C . Comme PF est toujours moindre que Pf ; il s'ensuit que MF ou AD sera moindre que Mf ou aD ; c'est pourquoi AD ou $MF = t - z$, aD ou $Mf = t + z$, $FP = m - x$ ou $x - m$ (selon que le point P tombe au dessous ou au dessus du foyer F), $Pf = x + m$. Or les triangles rectangles MPF , MPf , donnent $tt -$

$2tz + zz = yy + mm - 2mx + xx$, & $tt + 2tz + zz = yy + mm + 2mx + xx$. Donc si l'on retranche par ordre chaque membre de la premiere égalité de ceux de la seconde, on aura $4tz = 4mx$; d'où l'on tire $CD(z) = \frac{mx}{t}$.

Second cas. Lorsque le point P tombe au dessous du centre C , comme PF est toujours plus grande que Pf , il s'ensuit que MF ou AD , sera plus grande que Mf ou aD : c'est pourquoi AD ou $MF = t + z$, aD ou $Mf = t - z$, $PF = x + m$, $Pf = x - m$ ou $m - x$ (selon que le point P tombe au dessous ou au dessus du foyer f). Or les triangles rectangles MPF , MPf , donnent $tt + 2tz + zz = yy + mm + 2mx + xx$, & $tt - 2tz + zz = yy + mm - 2mx + xx$. Donc si l'on retranche par ordre chaque membre de la seconde égalité de ceux de la premiere, on aura $4tz = 4mx$; d'où l'on tire encore $CD(z) = \frac{mx}{t}$. Par conséquent en l'un & l'autre cas, on aura $CA(t) : CF(m) :: CP(x) : CD(z)$. Ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE.

38. IL est donc évident que si l'on nomme les données CA ou Ca , t ; CF ou Cf , m ; & l'indéterminée CP , x ; on aura toujours $MF = t - \frac{mx}{t}$, & $Mf = t + \frac{mx}{t}$, lorsque le point P tombe au dessus du centre C : & qu'au contraire on aura $MF = t + \frac{mx}{t}$, & $Mf = t - \frac{mx}{t}$, lorsqu'il tombe au dessous.

PROPOSITION II.

Theorème.

39. LE quarré d'une ordonnée quelconque MP à l'axe Aa , est au rectangle de AP par Pa , parties de cet axe, comme le quarré de son conjugué Bb , est au quarré de l'axe Aa .

Il faut prouver que $\overline{PM}^2 \cdot AP \times Pa :: \overline{Bb}^2 \cdot \overline{Aa}^2$.

Les mêmes choses étant posées que dans l'article précédent, si l'on met dans l'égalité $tt \pm 2tz + zz = yy$

* Art. 37. $+ mm \pm 2mx + xx$ que l'on a trouvée * par le moyen du triangle rectangle MPF , à la place de z la valeur $\frac{mx}{t}$, on formera toujours celle ci $tt yy = t^2 - ttxx -$

* Art. 35. $mm tt + mm xx$, laquelle étant réduite à une proportion, donne $\overline{PM}^2 (yy) \cdot AP \times Pa (tt - xx) :: \overline{BC}^2 (tt - mm) \cdot \overline{CA}^2 (tt) :: \overline{Bb}^2 \cdot \overline{Aa}^2$. Ce qu'il falloit, &c.

COROLLAIRE I.

40. Si l'on mene une ordonnée MK à l'autre axe Bb , lequel j'appelle $2c$, il est clair que $MK = CP (x)$,

* Art. 39. & que $CK = PM (y)$. Or * $\overline{PM}^2 (yy) \cdot AP \times Pa (tt - xx) :: \overline{Bb}^2 (4cc) \cdot \overline{Aa}^2 (4tt)$. Et partant $4cc xx = 4cc tt - 4ttxy$; ce qui donne cette proportion $\overline{MK}^2 (xx) \cdot BK \times Kb (cc - yy) :: \overline{Aa}^2 (4tt) \cdot \overline{Bb}^2 (4cc)$.

C'est à dire que le quarré d'une ordonnée quelconque MK à l'axe Bb , est au rectangle de BK par Kb parties de cet axe, comme le quarré de son conjugué Aa , est au quarré de l'axe Bb .

COROLLAIRE FONDAMENTAL.

FIG. 18. 41. Si l'on nomme l'un ou l'autre axe Aa , $2t$; son
19. conjugué Bb , $2c$; son parametre p ; chacune de ses ordonnées PM , y ; chacune de ses parties CP prises entre le centre & les rencontres des ordonnées, x ; on
* Art. 39. aura * toujours $\overline{PM}^2 (yy) \cdot AP \times Pa (tt - xx) :: \overline{Bb}^2 (4cc) \cdot \overline{Aa}^2 (4tt) :: p \cdot Aa (2t) \cdot Bb (2c) :: Bb (2c) \cdot p$. D'où en multipliant d'abord les extrêmes & les moyens de la proportion $yy \cdot tt - xx :: 4cc \cdot 4tt$, & ensuite

ensuite de l'autre $yy. tt - xx :: p. 2t$. L'on tire $yy = cc - \frac{c^2 x^2}{tt}$, & $yy = \frac{1}{2}pt - \frac{p^2 x^2}{2t}$. Or comme cette propriété convient également à tous les points de l'Ellipse, & qu'elle en détermine la position par rapport aux deux axes conjugués Aa , Bb ; il s'ensuit que l'équation $yy = cc - \frac{c^2 x^2}{tt}$, ou $yy = \frac{1}{2}pt - \frac{p^2 x^2}{2t}$, exprime parfaitement la nature de l'Ellipse par rapport à ses axes.

COROLLAIRE III.

42. Si l'on mene deux ordonnées quelconques MP , NQ à l'axe Aa ; leurs quarrés seront entr'eux comme les rectangles $AP \times Pa$, $AQ \times Qa$, des parties de cet axe, faites par la rencontre de ces mêmes ordonnées; car $Bb. Aa :: PM. AP \times Pa :: QN. AQ \times Qa$. Et * Art. 39. partant $PM. QN :: AP \times Pa. AQ \times Qa$.

COROLLAIRE IV.

43. Si l'on mene par un point quelconque P de l'un des axes conjugués Aa , une parallèle MM à l'autre axe Bb ; elle rencontrera l'Ellipse en deux points M , M' ; également éloignés de part & d'autre du point P , & non en davantage. Car afin que les points M , M' , soient à l'Ellipse, il faut* que les quarrés de PM (y) prise de part & d'autre de l'axe Aa , soient égaux chacun à la même quantité $cc - \frac{c^2 x^2}{tt}$. * Art. 41.

COROLLAIRE V.

44. Il suit de ce que $yy = cc - \frac{c^2 x^2}{tt}$, que plus CP (x) prise de part & d'autre du centre C augmente plus chaque ordonnée PM (y) prise de part & d'autre de l'un ou de l'autre axe Aa , diminue; de sorte que CP (x) étant égale à CA ou Ca (t), chaque PM (y) devient alors nulle ou zero: & qu'au contraire plus CP (x) devient petite, plus aussi chaque ordonnée PM (y) prise

de part & d'autre de l'axe Aa augmente ; de sorte que $CP(x)$ devenant zero , chaque $PM(y)$, qui est alors CB ou $Cb(c)$, sera la plus grande des ordonnées. D'où il est clair.

1°. Que si l'on mene par les extrémités B, b , de l'un des axes conjugués , des parallèles à l'autre ; elles seront tangentes en ces points.

2°. Que l'Ellipse s'éloigne de part & d'autre de plus en plus de l'un ou de l'autre axe Aa , en commençant par l'extrémité A ; jusqu'à ce qu'elle rencontre son conjugué Bb ; après quoi elle va toujours en s'approchant du même axe Aa , jusqu'à ce qu'elle le rencontre en son autre extrémité a .

COROLLAIRE VI.

* Art. 41. 45. IL suit encore de ce que $*yy = cc - \frac{c^2 x^2}{a^2}$, que si l'on prend les points P, P , également éloignés de part & d'autre du centre C ; les ordonnées PM, PM , seront égales. D'où il est évident que si une ligne quelconque MM , terminée par l'Ellipse , est coupée en deux également par l'un des axes conjugués Bb en un point K autre que le centre ; elle sera parallèle à l'autre Aa . Car menant les parallèles MP, MP , à l'axe Bb , la ligne PP sera divisée par le milieu en C , puisque MM l'est en K ; & partant les ordonnées PM, PM seront égales. La droite MM sera donc parallèle à l'axe Aa .

COROLLAIRE VII.

* Art. 45. 46. SI l'on conçoit que le plan sur lequel l'Ellipse est tracée , soit plié le long d'un des axes Bb , en sorte que ses deux parties se joignent ; il est clair que les deux demi-Ellipses BAb, Bab , tomberont exactement l'une sur l'autre ; sçavoir , les points A, M , &c. sur a, M , &c. puisque * toutes les perpendiculaires Aa, MM , &c. à cet axe , sont coupées par le milieu aux points C, K , &c. D'où il est visible que l'Ellipse est coupée par les deux axes en qua-

tre portions parfaitement égales & uniformes, qui ne différent entr'elles que par leur situation.

PROPOSITION III.

Theorème.

47. *Si l'on mène par l'une des extrémités A de l'un des axes Aa, une ligne droite quelconque AM dans l'un des angles aAL, aAL, faites par cet axe, & par la ligne LAL parallèle à son conjugué Bb; je dis qu'elle rencontrera l'Ellipse en un autre point M.*

Ayant pris sur AL de part ou d'autre du point A, FIG. 20. la partie AG égale au paramètre p de l'axe Aa, & tiré GF parallèle à cet axe, & qui rencontre la ligne AM (prolongée, s'il est nécessaire) au point F, on prendra sur la ligne AL du même côté où tombe la ligne AM par rapport à l'axe Aa, la partie AL égale à GF, & ayant tiré par l'autre extrémité a de l'axe Aa la droite aL; je dis que le point M où elle coupe la ligne AM, est à l'Ellipse MAM.

Car menant MP parallèle à AL, & nommant les connues Aa, $2t$; AG, p; GF ou AL, a; & les inconnues CP, x; PM, y; les triangles semblables AGF, MPA, & LAa, MPa, donneront AG (p) GF (a) :: MP (y). AP ($t \pm x$) = $\frac{a^2}{p}$. Et AL (a). Aa ($2t$) :: PM (y). aP ($t \mp x$) = $\frac{2ty}{a}$. Et par conséquent on aura toujours AP * Pa ($tt - xx$) = $\frac{2ty^2}{p}$, soit que le point P tombe au dessus ou au dessous du centre C; d'où l'on tire $yy = \frac{1}{2}pt - \frac{px^2}{2t}$. La ligne PM sera donc * une ordonnée à l'axe * Art. 41. Aa; & partant le point M sera à l'Ellipse MAM. Ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE I.

48. *DE LA* on voit comment un axe Aa d'une Ellipse MAM étant donné avec son paramètre p; &

D ij

ayant mené par l'une des extrémités A de cet axe, une ligne droite quelconque AM dans l'un ou l'autre des angles aAL , aAL , fait par cet axe, & par la ligne LAL parallèle à son conjugué Bb ; on voit, dis-je, ce qu'il faut faire pour trouver sur cette ligne le point M où elle rencontre l'Ellipse $MA M$.

COROLLAIRE II.

49. IL est évident qu'il n'y a que la ligne LAL parallèle à l'axe Bb , qui puisse être tangente de l'Ellipse $MA M$ au point A , l'une des extrémités de son conjugué Aa ; puisqu'il n'y a que cette seule ligne, qui passant par le point A , & étant continuée de part & d'autre, ne la rencontre en aucun point, & n'entre pas dedans.

PROPOSITION IV.

Theorème.

FIG. 20. 50. T O U S les diametres comme MCm , sont coupés en deux également par le centre C , & ils ne rencontrent l'Ellipse qu'en deux points M, m .

Ayant mené l'ordonnée MP , & pris Cp égale à CP , si l'on mène la perpendiculaire pm terminée en m par la droite MCm ; il est évident que les triangles CPM , Cpm sont semblables & égaux, & qu'ainsi CM est égale à Cm , & Pm à pm . Or comme * les ordonnées qui sont également éloignées de part & d'autre du centre C , sont égales entr'elles, & que PM est une ordonnée, il s'ensuit que pm sera aussi une ordonnée; & par conséquent que le point m est à l'Ellipse.

* Art. 45.

De plus il est visible que si l'on imagine une parallèle à l'axe Bb , qui se meuve de C vers A ; la partie de cette parallèle renfermée dans l'angle ACM , ira toujours en augmentant à mesure que CP croît, & qu'au contraire la partie de cette parallèle renfermée entre le quart d'Ellipse AMB & l'axe CA , c'est à dire, l'ordon-

mée PM * ira toujours en diminuant ; d'où il suit que * *Art. 44.*
la ligne droite CM , qui passe par le centre, ne rencontre l'Ellipse qu'en un point M du même côté de l'axe,
& il en est de même pour le point m pris de l'autre côté.
Donc &c.

DÉFINITIONS.

II.

Si l'on mene par un point quelconque M de l'Ellipse, *Fig. 21. 22.*
un diamètre Mcm , une ordonnée MP à l'un ou l'autre
axe Aa , & une ligne droite MT , en sorte que CT soit
troisième proportionnelle à CP , CA ; le diamètre Scs
parallèle à MT , est appelé *Diamètre conjugué* au dia-
mètre Mm ; Et réciproquement le diamètre Mm est dit
conjugué au diamètre Scs : de sorte que les deux ensemble
sont appelés *Diamètres conjugués*.

12.

Toutes les lignes droites menées des points de l'Ellipse
parallement à l'un de ces deux diamètres, & terminées
par l'autre, sont appelées *Ordonnées* à cet autre.
Ainsi NO parallèle au diamètre Scs , est Ordonnée à son
conjugué Mm .

13.

La troisième proportionnelle à deux diamètres con-
jugués, est appelée *Paramètre* du premier de la propor-
tion. Ainsi la troisième proportionnelle à Mm , Scs , est
appelée *Paramètre* du diamètre Mm .

COROLLAIRE.

51. Si l'on nomme la donnée CA , t ; & les indé-
terminées CP , x ; PT , s ; il est clair, selon la défini-
tion 11^e que $CT(x + s) = \frac{t^2}{x}$; & qu'ainsi $xs = ts - xx$
 $= AP * Pa.$

PROPOSITION V.

Theorème.

52. Si l'on mène par les extrémités M, S , de deux diamètres conjugués Mm, Ss , deux ordonnées MP, SK , à un axe Aa : je dis que la partie CK de cet axe, prise entre le centre & la rencontre de l'une des ordonnées SK , est moyenne proportionnelle entre les deux parties AP, Pa , faites par la rencontre de l'autre ordonnée MP .

Il faut prouver que $\overline{CK} = AP * Pa$.

Ayant nommé les connues CA, t ; CP, x ; PT, s ; & * Art. 31. l'inconnue CK, m ; on aura $AP * Pa = tt - xx = s * s$, & $AK * Ka = tt - mm = sx + xx - mm$ en mettant pour tt sa valeur $xx + sx$. Cela posé, la propriété de * Art. 41. l'Ellipse* donnera $AP * Pa (sx)$. $AK * Ka (sx + xx - mm) :: \overline{PM} . \overline{KS} :: \overline{TP} (ss)$. $\overline{CK} (mm)$. à cause des triangles semblables TPM, CKS . D'où l'on tire en multipliant les extrêmes & les moyens, & en transposant à l'ordinaire, $\overline{CK} (mm) = \frac{sx + sx}{x + s} = sx = AP * Pa$. Ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE.

53. PUISQUE $\overline{CK} = tt - xx$, il s'ensuit que $\overline{CA} -$ * Art. 41. \overline{CK} ou $AK * Ka = xx$. Or * $\overline{CA} (tt)$. $\overline{CB} (cc) :: AK * Ka (xx)$. $\overline{SK} = \frac{cc * xx}{tt}$. Et $\overline{CA} (tt)$. $\overline{Cb} (cc) :: AP * Pa (tt - xx)$. $\overline{PM} = cc - \frac{cc * xx}{tt}$. De plus à cause des triangles rectangles CPM, CKS , on aura le carré \overline{CM} ou $\overline{CP} + \overline{PM} = xx + cc - \frac{cc * xx}{tt}$, & le carré \overline{CS} ou $\overline{CK} + \overline{KS} = tt - xx + \frac{cc * xx}{tt}$. Donc $\overline{CM} + \overline{CS} = tt + cc$. C'est à dire que la somme des carrés de deux diamètres conjugués quelconques Mm, Ss , est égale à la somme des carrés des deux axes Aa, Bb .

PROPOSITION VI.

Theorème.

54. **L**E quarré d'une ordonnée quelconque ON au diamètre Mm , est au rectangle de $MO \times Om$ fait des parties de ce diamètre ; comme le quarré de son conjugué Ss , est au quarré du même diamètre Mm .

Il faut prouver que $\overline{ON}^2 \cdot MO \times Om :: \overline{Ss}^2 \cdot \overline{Mm}^2$.

Ayant mené les paralleles NQ , OH , à l'axe Bb , & la parallele OR à son conjugué Aa , qui rencontre au point R l'ordonnée NQ prolongée, s'il est nécessaire ; on nommera les données CP , x ; PM , y ; CA , t ; PT , s ; & les indéterminées HQ ou OR , a ; CH , b ; & on aura à cause des triangles semblables CPM , CHO , & MPT , NRO , ces deux proportions $CP(x) \cdot PM(y) :: CH(b) \cdot HO$ ou $RQ = \frac{by}{x}$. Et $TP(s) \cdot PM(y) :: OR(a) \cdot RN = \frac{ay}{x}$. Cela posé.

Puisque (fig. 21.) NQ est toujours la difference de RQ ($\frac{by}{x}$), RN ($\frac{ay}{x}$), & CQ la somme de $CH(b)$, $HQ(a)$, lorsque le point N tombe entre les points M , S , ou m , s ; & qu'au contraire (fig. 22.) NQ est toujours la somme de RQ , RN , & CQ la difference de CH , HQ , lorsque le point N tombe par tout ailleurs : on aura $\overline{NQ}^2 = \frac{bbyy}{xx} \pm \frac{2abyy}{xx} + \frac{aayy}{xx}$, & $\overline{CN}^2 = aa \mp 2ab \mp bb$; sçavoir $-\frac{2abyy}{xx}$ & $-\frac{2abyy}{xx}$ dans le premier cas, & au contraire $+\frac{2abyy}{xx}$ & $-\frac{2abyy}{xx}$ dans le second cas. Or * * Art. 41.

$AP \times Pa(tt - xx)$. $AQ \times Qa$ ou $\overline{CA} - \overline{CQ}(tt - aa \pm 2ab - bb) :: PM^2(yy)$. $\overline{QN}^2 = \frac{ttsy - aayy \pm 2abyy - bbyy}{tt - xx}$. En comparant ensemble ces deux valeurs du quarré de NQ , on formera l'égalité $\frac{bbyy}{xx} \pm \frac{2abyy}{xx} + \frac{aayy}{xx} = \frac{ttsy - aayy \pm 2abyy - bbyy}{tt - xx}$, dans laquelle effaçant d'une part le

terme $+\frac{2aby}{sx}$ & de l'autre le terme $-\frac{2aby}{tt-xx}$ qui lui est égale, puisque $*sx=tt-xx$, & divisant par yy , il vient :

$$\frac{bb}{xx} + \frac{aa}{ss} = \frac{tt-aa-bb}{tt-xx}.$$

Si l'on multiplie par xx , & qu'on transpose bb , on trouvera $\frac{aaxx}{ss}$ ou $\frac{aax^2}{ssxx} = \frac{ttxx-aaxx-bbst}{tt-xx}$, & multipliant le premier membre par $ssxx$, & le second par le carré de $tt-xx$ valeur de ss (ce qui se fait en multipliant simplement le numérateur par $tt-xx$) on aura $aax^2 = t^2xx - aattxx - bbt^2 - ttx^2 + aax^2 + bbttxx$; d'où en effaçant de part & d'autre aax^2 , transposant $aattxx$, & divisant par $ttxx$, l'on tirera HQ ou OR (aa)

$$= tt - xx + bb - \frac{bbt^2}{xx}.$$

Maintenant si l'on nomme le demi-diamètre CM ou cm , z ; on aura à cause des triangles semblables CPM , CHO , cette proportion $CP(x) : CM(z) :: CH(b)$. $CO = \frac{bz}{x}$. Et partant $MO \times Om = z^2 - \frac{bbz^2}{xx}$. Or les triangles semblables ORN , CKS , donnent $ON : CS :: OR$

$$Art. 52. (tt-xx + bb - \frac{bbt^2}{xx}) : CK^2 (tt-xx) :: MO \times Om (\frac{xxz^2 - bbtz^2}{xx})$$

$$CM^2 (zz).$$

Puisqu'en multipliant les extrêmes & les moyens, on trouve le même produit. Donc ON .

Art. 50. $MO \times Om :: CS : CM :: SS : Mm$. Ce qu'il falloit, &c.

COROLLAIRE GENERAL.

55. IL est visible que ce qu'on a démontré dans la Proposition seconde par rapport aux deux axes Aa , Bb , s'étend par le moyen de cette Proposition à deux diamètres conjugués quelconques Mm , Ss . Or comme les articles 40, 41, 42, 43, 44, 45, 47, 48 & 49, se tirent de la seconde Proposition, & subsistent également, soit que l'angle ACB soit droit ou qu'il ne le soit pas; il s'ensuit que si l'on suppose dans ces articles, que les lignes Aa , Bb , au lieu d'être les deux axes soient deux diamètres.

diametres conjugués quelconques , ils seront encore vrais dans cette supposition : car leur démonstration demeurera toujours la même , & il ne faut pour s'en convaincre entierement , que les relire en mettant par tout où se trouve le mot d'*Axe* celui de *Diametre*.

COROLLAIRE II.

56. COMME les articles 44 & 49, subsistent avec la même force , lorsque les lignes Aa , Bb , au lieu d'être les deux axes , sont deux diametres conjugués quelconques , tels que Mm , Ss ; il s'ensuit que la ligne MT menée par le point M l'une des extremités d'un diametre quelconque Mm , parallelement à son diametre conjugués Ss , est tangente en M , & qu'il n'y a que cette seule ligne qui puisse toucher l'Ellipse en ce point. FIG. 23.

D'où l'on voit que d'un point donné sur une Ellipse, on ne peut mener qu'une seule tangente.

COROLLAIRE III.

57. DE-LA il est évident, selon la définition 11^e, que si l'on mene par un point quelconque M d'une Ellipse , une ordonnée MP à l'un ou l'autre axe Aa ; & qu'ayant pris CT du côté du point P , troisième proportionnelle à CP , CA , on tire la droite MT : cette ligne MT sera tangente en M . Et reciproquement, que si la ligne MT est tangente en M , & qu'on mene l'ordonnée MP à l'un ou l'autre axe Aa , les parties CP , CA , CT de cet axe, seront en proportion geometrique continuë.

COROLLAIRE IV.

58. SI l'on imagine dans les définitions 11, 12 & 13, & dans les deux dernieres Propositions , que les lignes Aa , Bb , au lieu d'être les deux axes , soient deux diametres conjugués quelconques ; on verra que ces Propositions seront encore vraies , puisqu'elles se démontreront de la même maniere qu'auparavant : comme il est évident par l'inspection de la figure 23 , où les triangles

E.

semblables donnent les mêmes proportions que dans le cas des axes.

D'où il suit 1°. Que le Corollaire précédent doit encore avoir lieu, lorsque la ligne Aa , au lieu d'être un axe, est un diamètre quelconque. 2°. Que les diamètres conjugués Mm , Ss , peuvent être les deux axes dans cette supposition ; & qu'ainsi on peut regarder les deux axes comme deux diamètres conjugués, qui font entr'eux des angles droits.

PROPOSITION VII.

Theorème.

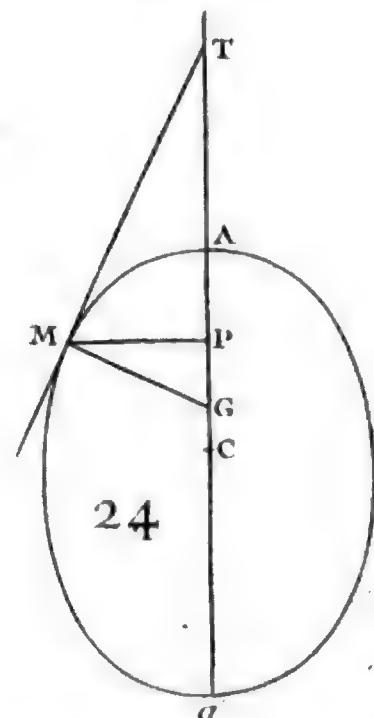
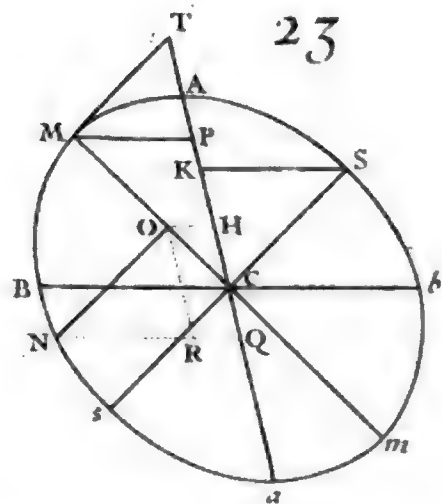
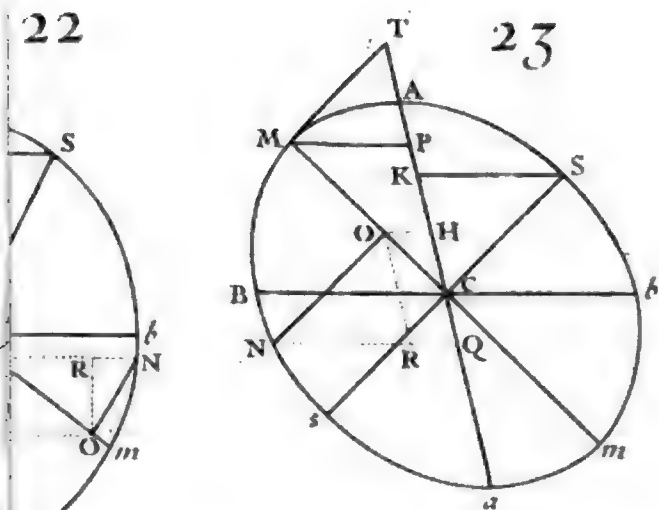
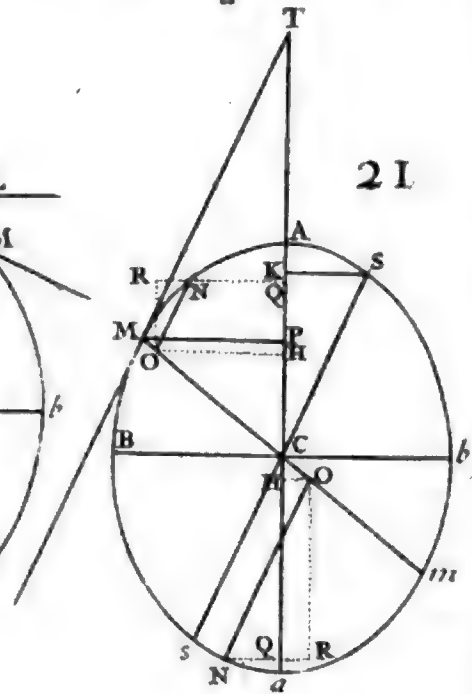
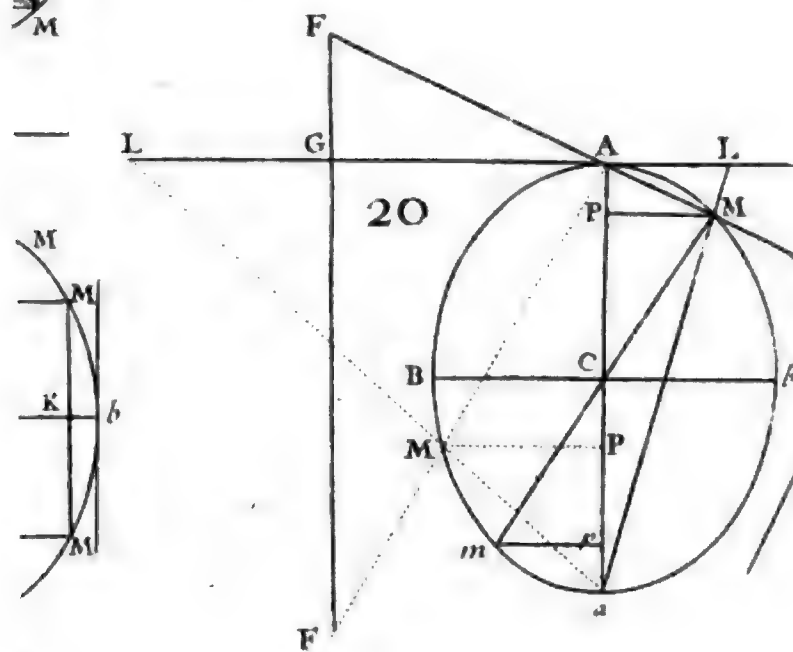
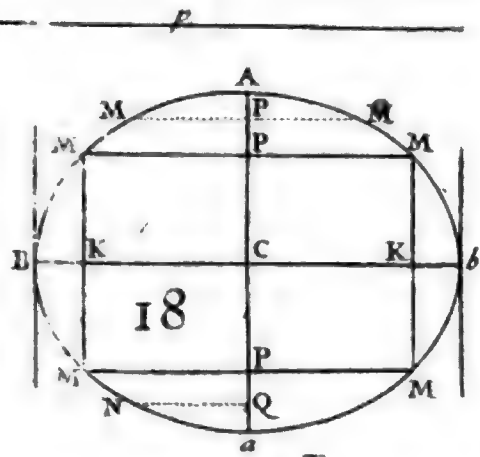
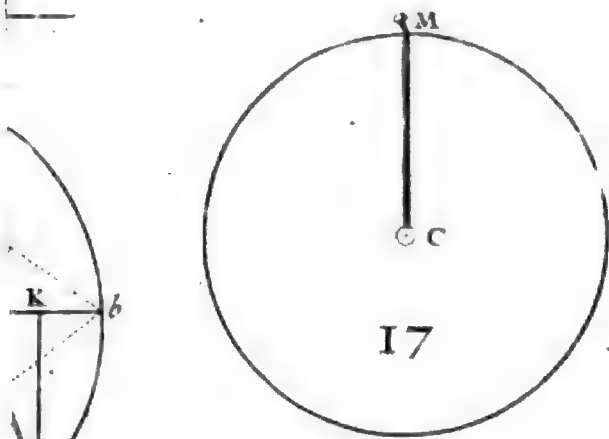
FIG. 14. 59. *Si par un point quelconque d'une Ellipse qui a pour centre le point C, l'on tire une ordonnée MP à l'un des axes Aa, & une perpendiculaire MG à la tangente MT qui passe par le point M : je dis que CP sera toujours à PG en raison donnée de l'axe Aa à son parametre.*

Car nommant le demi-axe CA ou Ca , t ; & les indéterminées CP , x ; PM , y ; on aura * $CT = \frac{t^2}{x}$; & partant $PT = \frac{t^2 - xx}{x}$. Or les triangles rectangles semblables TPM , MPG , donnent $TP \left(\frac{t^2 - xx}{x} \right) :: PM(y) :: PG$. $PG = \frac{xy}{t - x}$. D'où l'on tire cette proportion $CP(x) . PG \left(\frac{xy}{t - x} \right) :: AP * Pa (tt - xx) . PM^2 (yy)$. Puisqu'en multipliant les extrêmes & les moyens, on forme le même produit xyy . Mais le rectangle $AP * Pa$, * Art. 41. est * au quarré PM^2 , comme l'axe Aa est à son parametre. Donc &c.

PROPOSITION VIII.

Theorème.

FIG. 25. 60. *Si l'on mene par un point quelconque M d'une Ellipse, une tangente TMS, & aux deux foyers F, f, les droites MF,*



MF ; je dis que les angles FMT , fMS , faits par ces lignes de part & d'autre avec la tangente TMS , sont égaux entr'eux.

Car ayant mené les perpendiculaires FD , fd , sur cette tangente; le premier axe Aa qui la rencontre en T , & l'ordonnée MP à cet axe, & nommé les données CA ou Ca , t ; CF ou Cf , m ; & l'indéterminée CP , x ; on aura $MF^*(t - \frac{mx}{t})$. $Mf(t + \frac{mx}{t}) :: TF$, ou CT^* * Art. 38.
 $(\frac{t}{x}) - CF(m)$. Tf ou $CT(\frac{t}{x}) + Cf(m)$. Puisqu'en * Art. 37.
 multipliant les extrêmes & les moyens, on trouve le même produit. Or les triangles semblables TFD , Tfd , donnent $TF.Tf :: FD.fd$. L'hypothénuse MF du triangle rectangle MDF , sera donc à l'hypothénuse Mf du triangle rectangle Mdf , comme le côté DF est au côté df ; & par conséquent ces deux triangles seront semblables. Les angles FMD , fMd , ou FMT , fMS , qui sont opposés aux côtés homologues DF , df , seront donc égaux entr'eux. *Ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE.

61. **D**E LA il est évident que la tangente TMS étant prolongée indéfiniment de part & d'autre du point touchant M , laisse l'Ellipse toute entière du côté de ses deux foyers F, f . Or comme cela arrive toujours en quelque endroit de l'Ellipse que tombe le point M , il s'ensuit qu'elle sera concave dans toute son étendue autour de ses deux foyers, & par conséquent aussi autour de son centre.

PROPOSITION IX.

Theorème.

62. **S**I l'on mene par l'une des extrémités A d'un diame- FIG. 16.
 tre Aa une parallèle DAE à son conjugué Bb , laquelle ren-
 contre deux autres diamètres conjugués quelconques Mm , Ss ,
 E ij .

aux points D, E , je dis que le rectangle de DA par AE , est égal au quarré de la moitié CB du diamètre Bb .

Il faut prouver que $DA \times AE = CB^2$.

Ayant mené par les extrémités M, S , des diamètres conjugués Mm, Ss , les ordonnées MP, SK , au diamètre Aa , on nommera les données CA, t ; CB, c ; & les

* Art. 52. indéterminées CP, x ; PM, y ; & on aura * $CK^2 =$

$AP \times Pa = tt - xx$; & par conséquent $AK \times Ka$ ou CA

* Art. 54. $- CK^2 = xx$. Or * $BC^2 (cc)$, $CA^2 (tt) :: MP^2 (yy)$.

$AP \times Pa$ ou $CK^2 = \frac{yy}{cc}$. Et $CA^2 (tt)$, $CB^2 (cc) :: AK \times Ka$

(xx) . $KS^2 = \frac{ccxx}{tt}$. Donc en extrayant les racines quar-

rées, l'on tire $CK = \frac{t}{c}$, & $KS = \frac{cx}{t}$. Mais les triangles

semblables CPM, CAD , & CKS, CAE , donnent $CP (x)$, $PM (y) :: CA (t)$. $AD = \frac{t}{x}$. Et $CK (\frac{t}{c})$, KS

$(\frac{cx}{t}) :: CA (t)$. $AE = \frac{cx}{t}$. Donc $DA \times AE = cc = BC^2$.

Ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION X.

Problème.

FIG. 27.

63. DEUX diamètres conjugués Aa, Bb , d'une Ellipse étant donnés avec une ligne droite Mcm qui passe par le centre C ; marquer sur cette ligne les points M, m , où elle rencontre l'Ellipse.

Ayant mené par l'une des extrémités A du diamètre Aa , une parallèle infinie AD , à son conjugué Bb , laquelle rencontre la ligne CM donnée de position au point D ; on tirera par le point A perpendiculairement sur AD , la ligne AO égale à CB , & par les points O, D , la ligne OD . On décrira du rayon OA un cercle qui coupera la ligne OD en deux points N, n , par où l'on tirera des parallèles NM, nm , à la ligne OC qui joint

les centres de l'Ellipse & du cercle. Je dis que les points M, m , où elles rencontrent la ligne CD , seront à l'Ellipse, & détermineront par conséquent les extrémités du diamètre MCm donné de position.

Car menant les parallèles MP, NQ , à AD , qui rencontrent les lignes CA, OA , aux points P, Q , les triangles semblables CDO, MDN , & CDA, CMP , & ODA, ONQ , donneront $CA.CP :: CD.CM :: OD.ON :: OA.OQ$. c'est à dire, $CA.CP :: OA.OQ$. Et partant si l'on mene la droite PQ , elle sera parallèle à OC ; & par conséquent aussi à MN supposée parallèle à OC . Ainsi les parallèles MP, NQ , seront égales entr'elles. Cela posé, si l'on nomme les données CA, t ; CB ou AO ou ON, c ; & les indéterminées CP, x ; PM ou NQ, y ; on aura $CA(t).CP(x) :: OA(c).OQ = \frac{cx}{t}$. Et à cause du triangle OQN rectangle en Q , le carré NQ ou $MP(y) = ON(cc) - OQ(\frac{cx}{t})$. La li-

gne MP sera donc * une ordonnée au diamètre Aa ; & par conséquent le point M appartiendra à l'Ellipse qui a pour diamètres conjugués les droites Aa, Bb . Mais à cause des parallèles NM, OC, nm , la ligne Mm est divisée en deux également par le centre C ; puisque par la propriété du cercle, Nn l'est au point O . Donc le point m appartiendra * aussi à la même Ellipse.

Si les diamètres conjugués Aa, Bb , étoient les deux axes, les parallèles CO, PQ , se confondroient alors avec les lignes CA, AO , qui n'en feroient qu'une seule; ce qui rendroit la construction & la démonstration un peu plus faciles.

PROPOSITION XI.

Problème.

64. DEUX diamètres conjugués Aa, Bb , d'une Ellipse FIG. 27; étant donnés; en trouver les deux axes Mm, Ss : & démontrer qu'il n'y en peut avoir que deux.

E iij

Ayant mené par l'une des extrémités A du diamètre Aa , une parallèle DE à son conjugué Bb , on tirera AO perpendiculaire à DE & égale à CB . Ayant joint OC , on mènera par son point de milieu F la ligne FG qui la coupe à angles droits, & qui rencontre au point G la ligne DE , sur laquelle on prendra de part & d'autre du point G les parties GD, GE , égales chacune à GO ou GC . Tirant enfin les droites CD, CE ; je dis que les deux axes Mm, Ss , sont situés sur ces droites.

* *Art. 38.* Car les deux axes pouvant être regardés * comme deux diamètres conjugués, qui font entr'eux un angle droit, ils rencontreront la ligne DE en des points D, E , tels que le cercle décrit de ce diamètre passera par les deux points C, O , puisque le rectangle $DA * AE$ étant égal * au carré de AO , l'angle DOE sera droit, aussi bien que l'angle DCE . Or il est évident que c'est précisément ce que l'on vient de faire par le moyen de cette construction; puisque les lignes GO, GC, GE, GD étant toutes égales entr'elles, sont les rayons d'un même cercle. Mais comme il ne peut y avoir sur la ligne DE que deux points D, E , qui satisfassent en même temps à ces deux conditions; savoir, que l'angle DCE & l'angle DOE soient chacun droit; il s'ensuit que les diamètres conjugués Mm, Ss , qui font entr'eux un angle droit, seront les mêmes que les axes; & qu'il n'y en peut avoir que deux.

* *Art. 62.* Maintenant pour en déterminer la grandeur, il n'y a qu'à tirer les droites OD, OE ; & par les points N, R , où elles rencontrent le cercle qui a pour rayon OA , mener les parallèles NM, RS . Car il est évident * que les points M, S , où elles rencontrent les droites CD, CE , appartiendront à l'Ellipse qui a pour diamètres conjugués les lignes Aa, Bb ; & qu'ainsi ils seront les extrémités de ses axes.

COROLLAIRE.

65. Si l'on propoſoit de trouver deux diametres conjugués Mm , Ss , qui fiſſent entr'eux un angle MCS égal à un angle donné ; deux autres diametres conjugués Aa , Bb , étant donnés. Il eſt viſible que la queſtion ſe reduiroit à trouver ſur la ligne DE donnée de poſition ; deux points D ; E , tels que menant aux deux points O , C , donnés hors cette ligne, les droites DO , OE , CD , CE , l'angle DOE fût droit, & l'angle DCE égal à l'angle donné. Mais comme la ſolution de ce Problème eſt aſſez difficile ; on l'a renvoyée dans le 10^e Livre, & on a ſuivi ici une autre voye, qui eſt plus ſimple ; c'eſt de trouver d'abord les deux axes, & de ſ'en ſervir enſuite pour trouver les deux diametres conjugués qu'on demande, comme l'on va enſeigner dans la Proposition ſuivante.

PROPOSITION XII.

Problème.

66. Les deux axes Aa , Bb , d'une Ellipſe étant donnés ; FIG. 28. 29. trouver deux diametres conjugués Mm , Ss , qui faſſent entr'eux l'angle MCS égal à un angle donné.

Je ſuppoſe que les diametres Mm , Ss , ſoient en effet ceux qu'on demande, & qu'ils rencontrent aux points D , E , la ligne droite indéfinie DE menée par l'extrémité A du petit axe Aa parallèlement au grand Bb . Et ayant tiré du centre C de l'Ellipſe, la ligne CF , qui faſſe avec DE au point F l'angle CFE égal à l'angle donné MCS , je nomme les données CA , t ; CB , c ; AF , a ; & l'inconnue AE , z ; ce qui donne $AD = \sqrt{\frac{c^2}{z}}$, $CE = \sqrt{\frac{t^2}{z}}$ Art. 62. $= \sqrt{tt + zz}$ à cauſe du triangle rectangle CAE . Cela poſé.

Les triangles FEC , CED , ſeront ſemblables ; puis-que l'angle au point E eſt commun, & que l'angle CFE a

été fait égal à l'angle MCS : c'est pourquoi $FE (x-a) : EC (\sqrt{tt+zz}) :: EC (\sqrt{tt+zz}) : ED (x+\frac{cc}{z})$. D'où en multipliant les extrêmes & les moyens, l'on forme l'égalité $zx - ax + cc = \frac{cc}{z} \sqrt{tt+zz}$; & effaçant de part & d'autre zz , multipliant ensuite par z , & divisant par a , il vient $zx - \frac{cc}{a}z + \frac{tt}{a}z + cc = 0$, Et en faisant (pour faciliter le calcul) $\frac{cc-tt}{a} = 2b$, on changera l'égalité précédente en celle ci $zx - 2bz + cc = 0$, ou $zx - 2bz + bb = bb - cc$ ce qui donne en extrayant de part & d'autre la racine quarré $x - b$ ou $b - x = \sqrt{bb - cc}$, & par conséquent l'inconnue $AE (x) = b \pm \sqrt{bb - cc}$. Voici maintenant la construction que cette dernière égalité fournit.

Ayant prolongé le petit axe Aa jusqu'au point O , en sorte que AO soit égale à la moitié CB du grand ; soit tirée CF , qui fasse avec DE menée par le point A parallèlement à Bb , l'angle CFE égal à l'angle donné. Ayant joint OF , soient tirées les droites OH , CG , perpendiculaires sur OF , CF , qui rencontrent DE aux points H , G (on n'a point marqué dans les figures 28, & 29, les points H , G , sur la ligne DE ; parce que ces figures auroient été trop grandes, & que d'ailleurs il est facile de les y imaginer). Soit décrit du centre O , & du rayon OK , égal à la moitié de GH , partie de AD prolongée, comprise entre G & H , un arc de cercle qui coupe DE aux points K , K , & ayant pris sur DE les parties KD , KE , égales chacune à KO , soient tirées par le centre C de l'Ellipse, les droites DC , EC . Je dis que les diamètres cherchés Mm , Ss , sont situés sur ces lignes.

Car à cause des angles droits FAC , FCG , & FAO , FOH , on aura $AG = \frac{tt}{a}$, $AH = \frac{cc}{a}$; & partant $GH = \frac{cc-tt}{a} = 2b$. Le rayon OK qui est égal à la moitié de GH , sera donc égal à b ; & à cause du triangle rectan-

gle.

gle OK ; on aura $AK = \sqrt{bb - cc}$, & AE ou $KE + AK = b + \sqrt{bb - cc}$, & AD ou $KD + AK = b + \sqrt{bb - cc}$. Or cela posé, si l'on multiplie la valeur de AE par celle de AD , il vient $AE * AD = cc = CB^2$; & partant * les dia- * Art. 61.
metres Mm , Ss , sont conjugués. Mais le rectangle de $AE + AD$ ou DE ($2b$) par $AE - AD$ ou EF ($b - \sqrt{bb - cc} - a$) est $= 2bb - 2b\sqrt{bb - cc} - 2ab = 2bb - 2b\sqrt{bb - cc} + tt - cc$ en mettant pour $2ab$ la valeur $cc - tt$, & à cause du triangle rectangle CAE le quarré $CE^2 = AE^2 + CA^2 = 2bb - 2b\sqrt{bb - cc} + tt - cc = DE * EF$: ce qui donne $FE : EC :: EC : ED$. Et partant les triangles FEC , CED , seront semblables ; puisqu'ils ont l'angle au point E commun, & que leurs côtés autour de cet angle sont proportionnels. L'angle MCS sera donc égal à l'angle donné CFE . C'est ce qui restoit à démontrer.

Maintenant pour avoir la grandeur CM , CS , des deux demi-diametres cherchés ; il n'y a qu'à tirer les lignes OD , OE , & mener par les points N , R , où elles rencontrent le cercle qui a pour rayon OA , les parallèles NM , RS , à OC . Car il est visible* que les points M , S , où elles ren- * Art. 63.
contrent les droites CD , CE , seront à l'Ellipse, & détermineront par conséquent les extrémités de ces diametres.

COROLLAIRE I.

67. IL suit de cette construction, 1°. Qu'afin que le Problème soit possible, il faut que OK ($\frac{cc - tt}{2a}$) surpasse ou soit égale à AO (a) ; car autrement le cercle décrit du rayon OK , ne rencontreroit la ligne DE en aucun point, ce qui est néanmoins nécessaire pour la construction.

2°. Que lorsque OK surpasse OA , on trouve toujours par le moyen des deux points K , K , deux differens diametres conjugués Mm , Ss , qui satisfont également : mais qu'alors le diametre Ss de la figure 29 est égal au diametre Mm de la figure 28 & semblablement posé de l'autre côté de l'axe Aa ; parce que AE de la figure

F₂

29. est égal à AD de la figure 28. Et de même que le diamètre Mm de la figure 29. est égal au diamètre Ss de la figure 28. & semblablement posé de l'autre côté de l'axe Aa ; parce que AD de la figure 29. est égal à AE de la figure 28. C'est à dire que les deux differens diametres conjugués Mm , Ss , qui satisfont également au Problème, sont semblablement posés de part & d'autre de l'axe Aa , & que dans ces deux différentes positions leurs grandeurs demeurent la même.

FIG. 30. 3°. Que lorsque $OK = OA$, les deux points d'intersection K, K , se réunissent au point touchant A ; & qu'ainsi il n'y a alors qu'à prendre les parties AE , AD , égales chacune à la moitié CB du grand axe : d'où l'on voit qu'il ne peut y avoir alors qu'une solution, & que les deux diametres conjugués Mm , Ss , qui satisfont, sont égaux entr'eux.

COROLLAIRE II.

FIG. 28. 29. & 30. 68. IL est clair aussi que plus AF (a) est grande, plus l'angle obtus donné CFE l'est aussi, & plus au contraire la ligne OK ($\frac{c-c''}{2a}$) diminuë : de sorte que AF étant la plus grande qu'il est possible, l'angle obtus CFE , sera aussi le plus grand; & au contraire la ligne OK , sera la moindre, c'est à dire égale à AO . Or si l'on mene alors les droites Ba , ab ; les triangles rectangles aCB , CAD . aCb , CAE , seront tous égaux entr'eux; puisque les lignes AE , AD , sont égales chacune à la moitié CB ou Cb de l'axe Bb , & que CA est égal à Ga . L'angle ACM , sera donc égal à l'angle CaB , & l'angle ACS à l'angle Cab ; & partant l'angle donné MCS ou CFE , sera aussi égal à l'angle Bab . D'où l'on voit voit :

FIG. 28. 29. & 30. 1°. Que si l'on mene de l'une des extremités a du petit axe Aa aux extremités B, b , du grand, les lignes aB , ab ; l'angle obtus donné CFE , doit être égal ou moindre que l'angle Bab , afin que* le Problème soit possible.

2°. Que lorsqu'il lui est égal, comme dans la figure 30.

il n'y a que deux diametres conjugués Mm , Ss , qui satisfassent, lesquels sont égaux entr'eux.

3°. Que lorsqu'il est moindre, comme dans les fig. 28 & 29. il y a toujours deux differens diametres conjugués qui satisfont également; qu'ils sont semblablement posés de part & d'autre du petit axe, cet angle demeurant le même entr'eux, & que leur grandeur demeure aussi la même dans ces deux différentes positions.

PROPOSITION XIII.

Problème.

69. **D**EUX diametres conjugués Aa , Bb , d'une Ellipse étant donnes; la décrire par un mouvement continu.

PREMIERE MANIERE.

On cherchera * les deux axes, & on la décrira ensuite * Art. 64. selon l'article 36.

SECONDE MANIERE.

Ayant mené par l'une des extremités A de l'un des diametres donnés Aa , une perpendiculaire AH sur l'autre Bb , on prendra sur cette ligne la partie AQ de part ou d'autre du point A égale à CB . Et ayant tiré la ligne CQ , on fera glisser la ligne GF égale à HQ par ses extremités le long des lignes Bb , CQ (prolongées de part & d'autre du centre C autant qu'il sera nécessaire) jusqu'à ce qu'après avoir parcouru successivement les quatre angles faits par ces deux lignes, elle revienne dans la même situation d'où elle étoit partie. Je dis que si l'on prend GM égale à AQ , le point M décrira dans ce mouvement l'Ellipse requise.

Car menant GP parallele à QA , qui rencontre en P le diametre Aa , & en O le diametre Bb ; les triangles semblables CHQ , COG , & CAQ , CPG , donneront $CQ.CG :: AQ$ ou $GM.GP :: HQ$ ou $GF.GO$. Et par consequent la ligne PM sera parallele au diametre Bb . Cela posé.

F ij

Si l'on nomme les données CA, t ; AQ ou CB ou Cb, c ; & les inconnues CP, x ; PM, y ; on aura $CA(t) CP(x) :: AQ(c) GP = \frac{cx}{t}$. Et le triangle rectangle $GP M$ donnera $PM^2 = GM^2 - GP^2$, c'est à dire en termes analytiques $yy = cc - \frac{ccx^2}{t^2}$. La ligne PM sera

* Art. 41.
 & 35.

FIG. 33.

donc * une ordonnée au diamètre Aa dans l'Ellipse qui a pour diamètres conjugués les lignes Aa, Bb . Donc &c.

Si les deux diamètres conjugués Aa, Bb , étoient les deux axes, il est clair que les lignes AQ, CQ , tomberoient sur le diamètre Aa qui seroit l'un des axes, & que le point H tomberoit sur le centre C . D'où l'on voit qu'il faudroit prendre alors GF égale à CQ , somme ou différence des deux demi axes CA, CB ; & la faire glisser par ses extrémités le long des axes Aa, Bb , prolonges s'il est nécessaire.

Comme les lignes Aa, Bb , s'entrecoupent à angles droits au point C ; il est clair qu'en quelque situation que se trouve la droite GF pendant qu'elle glisse le long de ces lignes, le cercle qui auroit cette ligne pour diamètre, passeroit toujours par le point C ; & qu'ainsi la ligne CD qui passe par le point D milieu de FG , sera toujours égale à DF , puisque les lignes CD, DF, DG , seront toujours des rayons de ce cercle. De là naît la description suivante.

Soient deux lignes droites CD, DF , égales chacune à la moitié de CQ , somme ou différence des deux demi-axes CB, CA ; attachées l'une à l'autre par leur extrémité commune D , en sorte qu'elles se puissent mouvoir autour de ce point, comme les jambes d'un compas autour de sa tête. Soit attachée l'extrémité C de la droite CD dans le centre de l'Ellipse; & soit entendu l'extrémité F de l'autre droite FD , se mouvoir le long de l'axe Bb , en entraînant avec elle la ligne DC mobile autour du point fixe C . Il est clair que si l'on prend sur FD (prolongée, s'il est nécessaire) la partie FM égale à CA , le

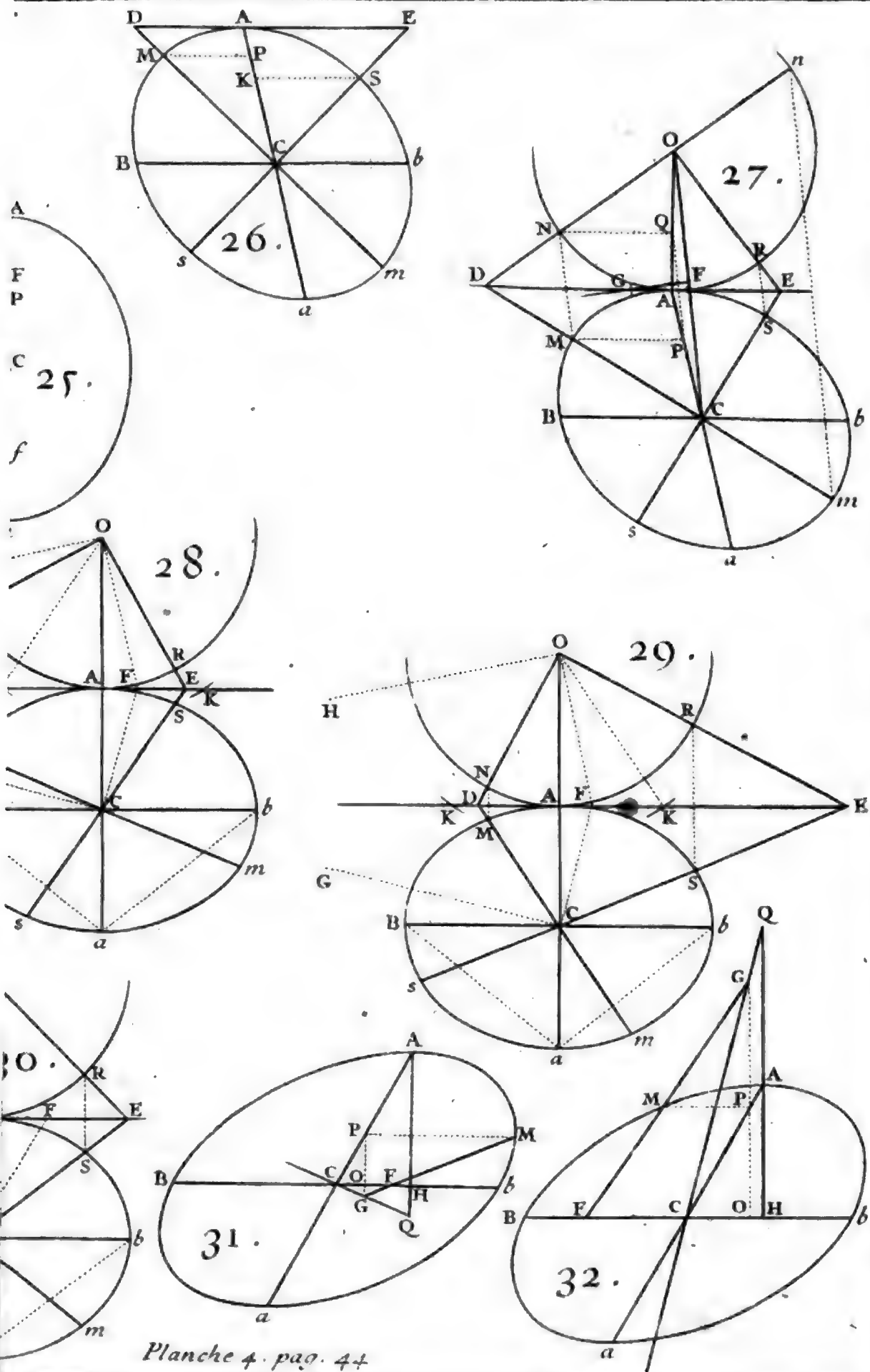
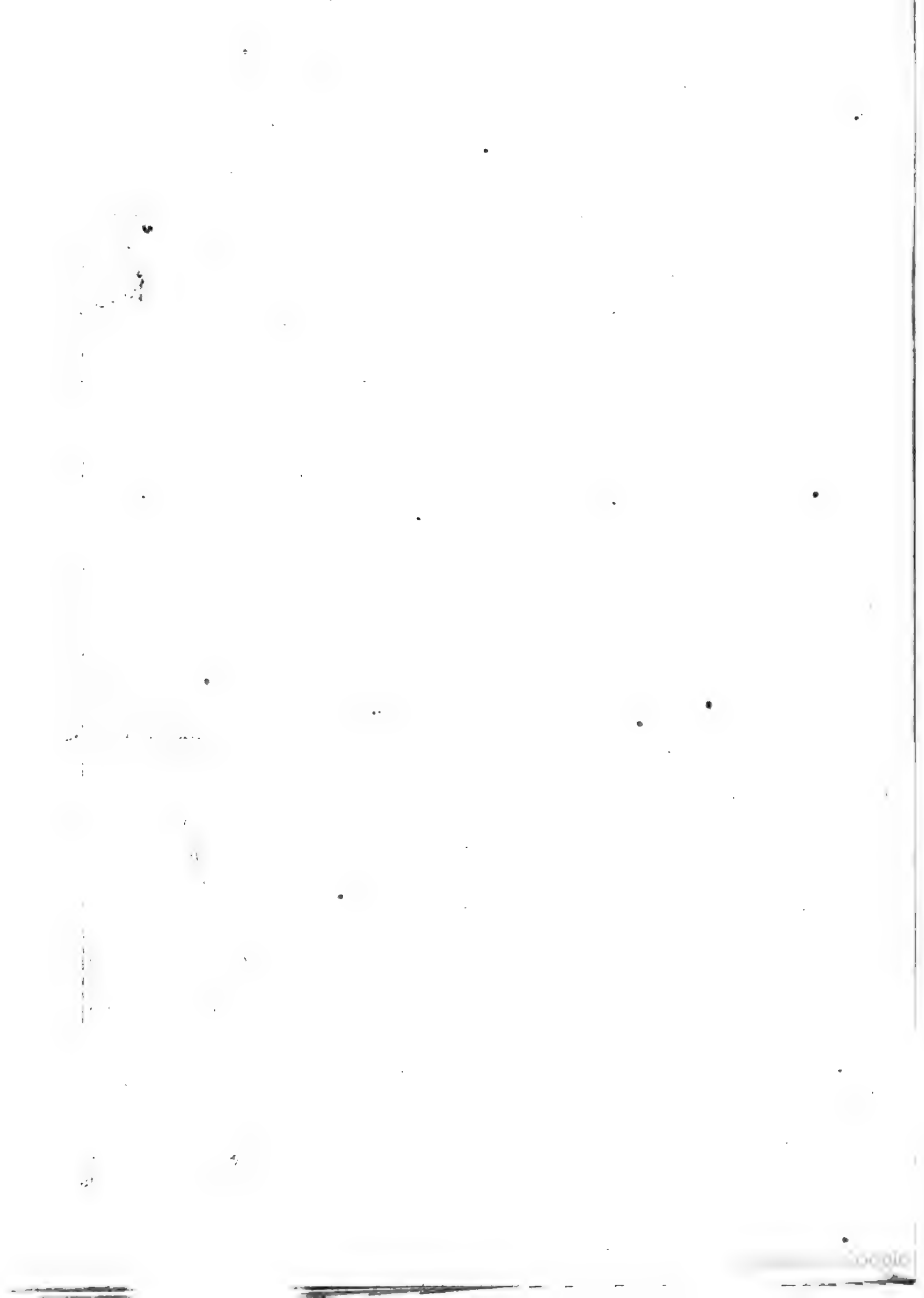


Planche 4. pag. 4+



point M décrira dans ce mouvement l'Ellipse qu'on cherche.

PROPOSITION XIV.

Problème.

70. **D**eux diamètres conjugués Aa , Bb , d'une Ellipse étant donnés ; la décrire par plusieurs points.

PREMIERE MANIÈRE.

Ayant mené par l'une des extrémités A de l'un des diamètres donnés Aa , une parallèle indéfinie DAD à son conjugué Bb , on tirera AO perpendiculaire à AD , & égale à la moitié CB du diamètre Bb ; on joindra OC ; & on décrira un cercle du centre O , & du rayon OA . Cela fait on menera librement de part & d'autre de CA , autant de lignes CD , CD , &c. qu'on voudra ; & ayant tiré des points D , D , &c. où elles rencontrent la ligne DAD , au centre O , les lignes DO , DO , &c. qui coupent la circonférence du cercle aux points N , N , &c. on menera des droites NM , NM , &c. parallèles à OC , lesquelles rencontrent aux points M , M , &c. les droites correspondantes CD , CD , &c. sur lesquelles on marquera de l'autre côté du centre C des points m , m , &c. qui en soient également éloignés. Il est évident * que la ligne courbe qui passera par * Art. 63. tous les points M , M , &c. ; m , m , &c. ainsi trouvés, aura pour diamètres conjugués les droites Aa , Bb .

SECONDE MANIÈRE.

Ayant pris sur l'un des demi-diamètres CB , de petites parties CE , EE , &c. égales entr'elles, de telle grandeur qu'on voudra, & autant que ce demi-diamètre en pourra contenir ; on lui menera les perpendiculaires ED , ED , &c. qui rencontrent la circonférence circulaire décrite du centre C & du rayon CB , aux points D , D , &c. Ayant joint AB , on tirera par celui des points E , qui est le plus proche du centre C , la ligne EP parallèle à AB ,

F iiij

qui rencontre CA au point P . On prendra sur le diamètre Aa de part & d'autre du centre C , autant de parties PP , PP , &c. égales à CP , qu'il en pourra contenir; & on menera par tous les points P , P , &c. des parallèles MPM , MPM , &c. au diamètre Bb , sur chacune desquelles on prendra de part & d'autre du point P , des parties PM , PM , égales chacune à sa correspondante ED . Je dis que la ligne courbe qui passe par tous ces points M , sera l'Ellipse qu'on demande.

Car nommant les données CA , t ; CB ou CD , c ; & les indéterminées CP , x ; PM , y ; on aura à cause des triangles semblables CAB , CPE , cette proportion CA (t). CB (c) :: CP (x). $CE = \frac{cx}{t}$. Et à cause du triangle

* Art. 41. CED rectangle en E , le quarré ED ou PM (yy) = CD (cc) — CE ($\frac{ccx^2}{t^2}$). La ligne PM sera donc * une

☞ 55.

ordonnée au diamètre Aa . Et comme cette démonstration convient à toutes les lignes PM ; puisque chaque CP est toujours à sa correspondante CE , en raison de CA à CB : il s'ensuit que la Courbe qui passe par tous les points M trouvés comme cy-dessus, sera l'Ellipse qu'on demande.



LIVRE TROISIÈME.

De l'Hyperbole.

DÉFINITIONS.

1.

AYANT attaché sur un plan en un point f l'une des Fig. 36. extrémités d'une longue règle fMO , en sorte qu'elle puisse tourner librement autour de ce point fixe f , comme centre; on attachera à son autre extrémité O , le bout d'un fil OMF , dont la longueur doit être moindre que celle de la règle, & duquel l'autre bout sera attaché en un autre point F , pris aussi sur ce plan. Maintenant, si l'on fait tourner la règle fMO autour du point fixe f , & qu'en même temps l'on se serve d'un stile M pour tenir le fil OMF , toujours également tendu, & sa partie MO toute jointe & comme collée contre le bord de la règle: la ligne courbe AX décrite dans ce mouvement, est une portion d'*Hyperbole*.

Si l'on renverse la règle de l'autre côté du point F , on décrira de la même sorte l'autre portion AZ de la même *Hyperbole*.

Mais, si sans changer la longueur de la règle, ni celle du fil, on attache l'extrémité de la règle en F , & celle du fil en f , on décrira en la même sorte une autre ligne courbe axz opposée à la première AXZ , qui est encore appelée *Hyperbole*, & les deux ensemble sont nommées *Hyperboles opposées*.

2.

Les deux points fixes F, f , sont nommés les *Foyers*.

3.

La ligne Aa , qui passe par les deux foyers F, f , & qui est terminée de part & d'autre par les *Hyperboles opposées*, est appelée le *premier Axe*.

4.

Le point C , qui divise par le milieu le premier axe Aa , est nommé le *Centre*.

5.

Si l'on mène par le centre C une perpendiculaire indéfinie Bb au premier axe Aa ; & que du point A , comme centre, & de l'intervalle CF , on décrive un arc de cercle qui la coupe aux points B, b : la partie Bb de cette perpendiculaire, est appelée le *second Axe*.

6.

Les deux axes Aa, Bb , sont appelés ensemble *Conjugués*; de sorte que le premier axe Aa , est dit *Conjugué* au second Bb ; & réciproquement le second Bb , *Conjugué* au premier Aa .

7.

Les lignes MP, MK , menées des points M des Hyperboles opposées parallèlement à d'un des axes conjugués, & terminées par l'autre, sont appelées *Ordonnées* à cet autre axe. Ainsi MP est *Ordonnée* au premier axe Aa , & MK au second Bb .

8.

La troisième proportionnelle aux deux axes, est appelée *Parametre* de celui qui est le premier terme de la proportion. Ainsi si l'on fait comme le premier axe Aa , est au second axe Bb , de même le second axe Bb , à une troisième proportionnelle p ; cette ligne p sera le *Parametre* du premier axe Aa .

9.

Toutes les lignes qui passent par le centre C , sont appelées *Diametres*: ceux qui rencontrent les Hyperboles opposées, *premiers Diametres*, & ceux qui ne les rencontrent point, quoique prolongés à l'infini, *seconds Diametres*.

10.

Une ligne droite qui ne rencontre une Hyperbole qu'en un seul point, & qui étant continuée de part & d'autre, n'entre point dedans, mais tombe au dehors, est appelée *Tangente* en ce point.

REMARQUE.

REMARQUE.

71. **O**N a dit dans la première définition que la longueur du fil FMO doit être moindre ou plus grande que celle de la règle fMO ; dont la raison est que s'il étoit égal à cette règle , le stile M décriroit dans ce mouvement , une ligne dont tous les points M seroient également distants des deux points F, f ; puisque retranchant du fil & de la règle , la partie commune MO , les restes MF, Mf , seroient toujours égaux entr'eux. D'où il est visible que cette ligne ne seroit autre qu'une ligne droite indéfinie Bb , menée perpendiculairement à la droite Ef par son point de milieu C . FIG. 37.

COROLLAIRE I.

72. **I**L suit de la définition première , que si l'on mène d'un point quelconque M , de l'une des Hyperboles opposées , aux deux foyers F, f , les droites MF, Mf ; leur différence sera toujours la même. Car elle sera toujours égale à la différence qui se trouve entre la longueur de la règle & celle du fil. FIG. 36.

COROLLAIRE II.

73. **L**ORSQUE le point M tombe en A , il est visible que MF devient AF , & que Mf devient Af ; & de même lorsque le point M tombe en a , en décrivant l'Hyperbole opposée xaz ; il est encore visible que MF devient aF , & que Mf devient af . Donc puisque la différence de ces deux droites est par tout la même , on aura $Af - AF$ ou $Ff - 2AF = af - aF$ ou $Ff - 2af$; & partant $AF = af$. D'où il suit :

1°. Que la distance Ff des foyers , est divisée en deux parties égales par le centre C ; puisque $CA + AF$ ou $CF = Ca + af$ ou Cf .

2°. Que la différence des deux droites MF, Mf , est toujours égale au premier axe Aa ; puisque dans l'Hyperbole XAZ , on a toujours $Mf - MF = Af - AF$ ou

G.

$Af - af$; & que dans son opposée xaz , on a aussi toujours $MF - Mf = aF - af$ ou $aF - AF$.

COROLLAIRE III.

74. IL suit de la définition cinquième.

1°. Que le second axe Bb , est divisé en deux parties égales par le centre C ; car les triangles rectangles ACB , ACb , seront égaux, puisqu'ils ont des hypoténuses égales AB , Ab , & le côté AC commun.

2°. Que si l'on prend sur le second axe Bb , la partie CE égale à la moitié CA du premier, & qu'on tire l'hypoténuse AE : le second axe Bb sera plus grand, égal, ou moindre que le premier Aa ; selon que la droite CF , est plus grande, égale, ou moindre que l'hypoténuse AE ; parce que l'hypoténuse Ab , prise égale à CF , se trouvera aussi pour lors plus grande, égale, ou moindre que l'hypoténuse AE .

3°. Que si l'on prend sur le premier axe Aa de part & d'autre du centre C , les parties CF , Cf , égales chacune à l'hypoténuse AB du triangle rectangle CAB , formé par les deux demi-axes CA , CB : les points F , f , seront les deux foyers.

COROLLAIRE IV.

75. LES mêmes choses étant posées, si l'on nomme CF ou AB , m ; CA , ou Ca , t ; le triangle rectangle ACB , donnera $BC = mm - tt$. Or $AF = m - t$, & $Fa = m + t$; & partant $At * Fa = mm - tt$. D'où il est évident que le carré de la moitié CB du second axe Bb , est égal au rectangle de AF par Fa parties du premier axe Aa , prises entre l'un des foyers F , & ses deux extrémités, A , a .

COROLLAIRE V.

76. IL sera maintenant facile de décrire les Hyperboles opposées dont les deux axes Aa , Bb , sont donnés, & dont l'on sçait que l'axe Aa doit être le premier. Car

ayant trouvé * sur le premier axe Aa , les foyers F, f , * *Art. 74.* on attachera dans le point F , le bout d'un fil FMO , duquel l'autre bout O , sera lié à l'extrémité d'une longue regle OMf , mobile sur son autre extrémité f autour du foyer f , & dont la longueur OMf doit * être moindre ou * *Art. 71.* plus grande que la longueur du fil OMF , de la ligne Aa . Ayant ensuite décrit par le moyen de cette regle & de ce fil, deux Hyperboles opposées XAZ, xaz , comme l'on a enseigné dans la définition première, il est évident qu'elles auront pour premier axe, la ligne Aa , & pour second, la ligne Bb . Et c'est ce qu'on demandoit.

Plus la regle OMf , sera longue, & plus les portions des Hyperboles opposées, qu'on décrira par le moyen de cette regle, seront grandes; de sorte qu'on les peut augmenter autant que l'on voudra, en augmentant également la longueur de la regle & celle du fil.

PROPOSITION I.

Theorème.

77. Si l'on mene l'ordonnée MP au premier axe Aa , & qu'on prenne sur cet axe prolongé la partie AD égale à MF , du côté du foyer F lorsque le point M tombe sur l'Hyperbole XAZ , & du côté du foyer f lorsqu'il tombe sur son opposée xaz ; je dis que $CA:CF::CP:CD$.

Ayant nommé comme auparavant les données CA ou Ca , t ; CF ou Cf , m ; & de plus les indéterminées CP , x ; PM , y ; & l'inconnue CD , z ; on aura dans le premier cas, AD ou $MF = z - t$, aD ou $Mf = z + t$, $FP = x - m$ ou $m - x$ (selon que le point P tombe au dessous ou au dessus du foyer F), $Pf = x + m$; & dans le second cas, AD ou $MF = z + t$, aD ou $Mf = z - t$, $FP = x + m$, $Pf = x - m$ ou $m - x$ selon que le point P tombe au dessus ou dessous du foyer f .

Cela posé, le triangle rectangle MPF donnera $zz - t^2 = yy - x^2 + 2mx - mm$; sçavoir, — dans le premier

G. ij,

cas, $+$ dans le second ; & l'autre triangle rectangle MPf donnera $zz \mp 2tz + tt = yy + xx \mp 2mx + mm$; sçavoir, $+$ dans le premier, & $-$ dans le second.

Maintenant, si l'on retranche par ordre dans le premier cas, chaque membre de la première équation de ceux de la seconde ; & au contraire dans le second cas, chaque membre de la seconde de ceux de la première, il vient $4tz = 4mx$; d'où l'on tire $CD(z) = \frac{mx}{t}$. Donc $CA(t). CF(m) :: CP(x) CD(z)$. *Ce qu'il falloit, &c.*

COROLLAIRE.

78. IL est évident que si l'on nomme les données CA ou Ca, t ; CF ou Cf, m ; & l'indéterminée CP, x ; on aura toujours $MF = \frac{mx}{t} - t$, & $Mf = \frac{mx}{t} + t$, lorsque le point M tombe sur l'Hyperbole XAZ , qui a pour foyer le point F : & qu'au contraire on aura $MF = \frac{mx}{t} + t$, & $Mf = \frac{mx}{t} - t$, lorsque le point M tombe sur son opposée xaz , qui a pour foyer le point f .

PROPOSITION II.

Theorème.

79. LE carré d'une ordonnée quelconque PM , au premier axe Aa , est au rectangle de AP par Pa , parties de cet axe prolongé, comme le carré de son conjugué Bb , est au carré du premier axe Aa .

*Il faut prouver que $\overline{PM}^2 . AP * Pa :: \overline{Bb}^2 . \overline{Aa}^2$.*

* Art. 77. Les mêmes choses étant posées que dans la Proposition précédente, si l'on met dans l'équation $zz \mp 2tz + tt = yy + xx \mp 2mx + mm$ que l'on a trouvée * par le moyen du triangle rectangle MPF , à la place de z , sa valeur $\frac{mx}{t}$, on formera toujours celle-cy $ttyy = mmxx - mmtt - ttxx + t^4$, laquelle étant réduite à une proportion, donne $\overline{PM}^2 (yy). AP * Pa (xx - tt) ::$

$\overline{BC} * (mm - tt)$. $\overline{CA} (tt) :: \overline{Bb} . \overline{Aa}$. Ce qu'il falloit * Art. 75. démontrer.

COROLLAIRE I.

80. Si l'on mene une ordonnée MK au second axe Bb , lequel j'appelle $2c$; il est clair que $MK = CP (x)$. & que $CK = PM (y)$. Or $\overline{PM} (yy)$. $\overline{AP} * \overline{Pa} (xx - tt) :: \overline{Bb} (4cc)$. $\overline{Aa} (4tt)$. Et partant $4ccxx = 4ccctt + 4ttsy$; ce qui donne cette proportion $\overline{MK} (xx)$. $\overline{CK} + \overline{CB} (yy + cc) :: \overline{Aa} (4tt)$. $\overline{Bb} (4cc)$.

C'est à dire que le quarré d'une ordonnée quelconque MK au second axe Bb , est au quarré de CK , joint au quarré de CB moitié du second axe Bb , comme le quarré de son conjugué Aa , est au quarré de ce second axe Bb .

COROLLAIRE II. FONDAMENTAL.

81. Si l'on nomme le premier ou second axe Aa ; FIG. 38. & 39.
 $2t$; son conjugué Bb , $2c$; son parametre p ; chacune de ses ordonnées PM , y ; & chacune de ses parties CP , prises entre le centre & les rencontres des ordonnées, x ; on aura toujours * $\overline{PM} (yy)$. $\overline{CP} \mp \overline{CA} (xx \mp tt) ::$ * Art. 79. & 80.
 $\overline{Bb} (4cc)$. $\overline{Aa} (4tt) :: p . \overline{Aa} (2t)$. puisque selon la définition du parametre $Aa (2t)$. $Bb (2c) :: Bb (2c)$.
 $p = \frac{4cc}{2t}$. où l'on doit observer que c'est le signe — lorsque l'axe Aa est le premier, & qu'ainsi on peut substituer alors à la place de $\overline{CP} \mp \overline{CA}$, le rectangle $\overline{AP} * \overline{Pa}$ qui lui est égal; & au contraire que c'est le signe + lorsque l'axe Aa est le second. D'où en multipliant d'abord les Extrêmes & les Moyens de la premiere proportion $yy . xx \mp tt :: 4cc . 4tt$. ensuite de l'autre $yy . xx \mp tt :: p . 2t$. l'on tire $yy = \frac{ccxx}{t} \mp cc$, & $yy = \frac{pxx}{2t} \mp \frac{1}{2}pt$. Or comme cette propriété convient également à tous les points des Hyperboles opposées, & qu'elle en

détermine la position par rapport aux axes ; il s'ensuit que l'équation $yy = \frac{c^2 x^2}{a^2} + cc$, ou $yy = \frac{b^2 x^2}{a^2} + \frac{1}{2} p^2$, en exprime parfaitement la nature par rapport à ses axes.

COROLLAIRE III.

82. Si l'on mène deux ordonnées quelconques MP , NQ à l'axe Aa , il est clair que $\overline{MP} : \overline{NQ} :: \overline{CP} + \overline{CA} : \overline{CQ} + \overline{CA}$. Car $\overline{PM} : \overline{CP} + \overline{CA} :: \overline{b} : \overline{a} :: \overline{QN} : \overline{CQ} + \overline{CA}$. Donc &c.

Il est bon de remarquer encore qu'on peut substituer à la place de $\overline{CP} + \overline{CA}$, & $\overline{CQ} + \overline{CA}$, les rectangles $AP \times Pa$, $AQ \times Qa$ qui leur sont égaux ; ce qu'il faut toujours observer dans la suite.

COROLLAIRE IV.

83. Si l'on mène par un point quelconque P de l'un ou de l'autre axe Aa (prolongé lorsque c'est le premier) une parallèle MPM à son conjugué Bb ; elle rencontrera une Hyperbole ou les Hyperboles opposées en deux points M, M , également éloignés de part & d'autre du point P , & non en davantage. Car afin que les points M, M , soient à une Hyperbole ou aux Hyperboles opposées, il faut * que les quarrés de PM (y) prises de part & d'autre de l'axe Aa , soient égaux chacun à la même quantité $\frac{c^2 x^2}{a^2} + cc$.

COROLLAIRE V.

FIG. 38. & 39. 84. Il suit de ce que $yy = \frac{c^2 x^2}{a^2} + cc$, que plus CP (x) prise de part ou d'autre du centre C , devient grande, plus aussi chaque ordonnée PM (y) prise de part & d'autre de l'axe Aa , augmente, & cela à l'infini ; & qu'au contraire plus CP (x) devient petite, plus aussi PM (y) diminue ; de sorte que (fig. 38.) CP (x) étant égale à CA ou Ca (a) lorsque l'axe Aa , est le premier,

$PM(y)$ devient alors nulle ou zero ; & que (*fig. 39.*) $CP(x)$ étant nulle ou zero, lorsque l'axe Aa est le second, chaque $PM(y)$ qui devient alors CB ou $Cb(c)$, est la moindre de toutes les ordonnées $PM(y)$ prises de part & d'autre du centre. D'où il est clair :

1°. Que si l'on mène (*fig. 39.*) par les extrémités B, b , du premier axe Bb , des parallèles au second axe Aa , elles seront tangentes en ces points.

2°. Que les Hyperboles opposées s'éloignent de part & d'autre de plus en plus à l'infini de leurs axes conjugués, en commençant par les extrémités du premier : avec cette différence néanmoins que le premier axe rencontre chacune des Hyperboles opposées en un point, & qu'étant prolongé il passe au dedans ; au lieu que le second tombe tout entier entre les Hyperboles opposées, & ne les rencontre jamais, quoique prolongé à l'infini.

COROLLAIRE VI.

85. IL suit encore de ce que $yy = \frac{c^2 x^2}{a^2} - c^2$, que si l'on prend les points P, P , également éloignés de part & d'autre du centre C , les ordonnées $PM, P'M$, seront égales. D'où il est clair que si une ligne droite MM , terminée par une Hyperbole ou par des Hyperboles opposées, est coupée en deux également par un axe Bb en un point K autre que le centre, elle sera parallèle à son conjugué Aa . Car menant des parallèles $MP, M'P$, à l'axe Bb , la ligne PP , sera coupée par le milieu en C , puisque MM l'est en K ; & partant les ordonnées $PM, P'M$, seront égales. La droite MM sera donc parallèle à l'axe Aa .

COROLLAIRE VII.

86. SI l'on conçoit que le plan sur lequel les Hyperboles opposées sont tracées, soit plié le long de l'axe Aa , en sorte que ses deux parties se joignent ; il est clair (*fig. 39.*) lorsque l'axe Aa est le second, que les deux

Art. 83. Hyperboles opposées tomberont exactement l'une sur l'autre ; savoir, les points $B, M, \&c.$ sur les points $b, m, \&c.$ puisque * toutes les perpendiculaires Bb, Mm à cet axe, sont coupées par le milieu aux points $C, P, \&c.$

Par la même raison (*fig. 38*) lorsque l'axe Aa est le premier, les portions des Hyperboles opposées qui sont de part & d'autre de cet axe, tomberont exactement l'une sur l'autre.

AVERTISSEMENT.

On a suivi jusqu'ici la même méthode que dans l'Ellipse, & on auroit pu la continuer jusqu'à la fin ; mais, comme il faut nécessairement parler de certaines lignes particulières à l'Hyperbole, & qu'on peut par leur moyen prouver les mêmes choses d'une manière plus aisée, on a pris ce dernier parti.

DÉFINITIONS.

II.

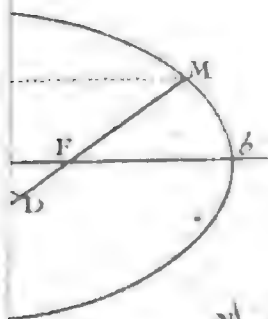
Fig. 40. Si l'on mène du centre C deux droites indéfinies CG, Cg , parallèles aux lignes Ab, AB , menées de l'extrémité A du premier axe Aa , aux deux extrémités B, b , du second ; ces deux droites seront appelées les *Asymptotes* de l'Hyperbole MAM ; & si on les prolonge indéfiniment de l'autre côté du centre, elles seront nommées les *Asymptotes* de l'Hyperbole opposée MaM .

II.

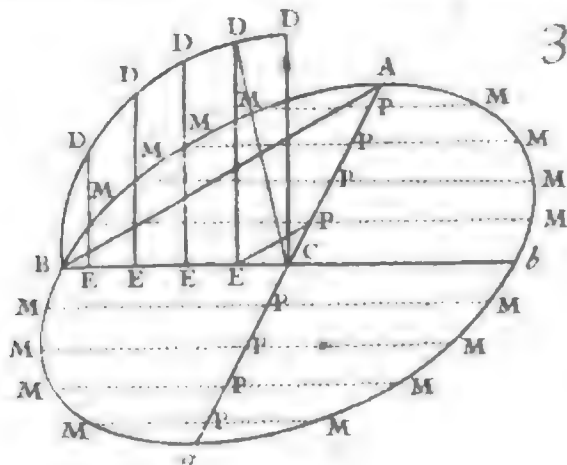
Le carré de la partie CG , ou Cg , d'une asymptote, comprise entre le centre C , & la rencontre de la ligne AB , ou Ab , menée de l'extrémité A du premier axe, à l'extrémité B , ou b , du second, est appelé la *Puissance* de l'Hyperbole MAM , ou de son opposée MaM .

COROLLAIRE I.

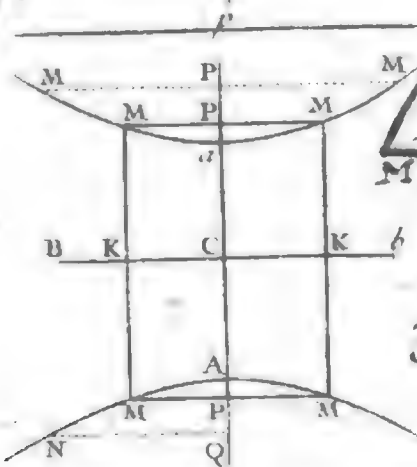
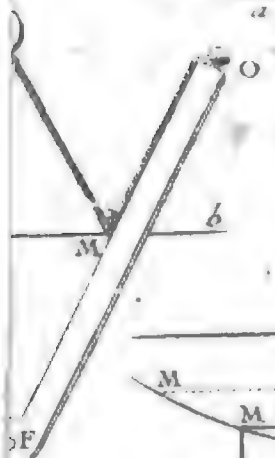
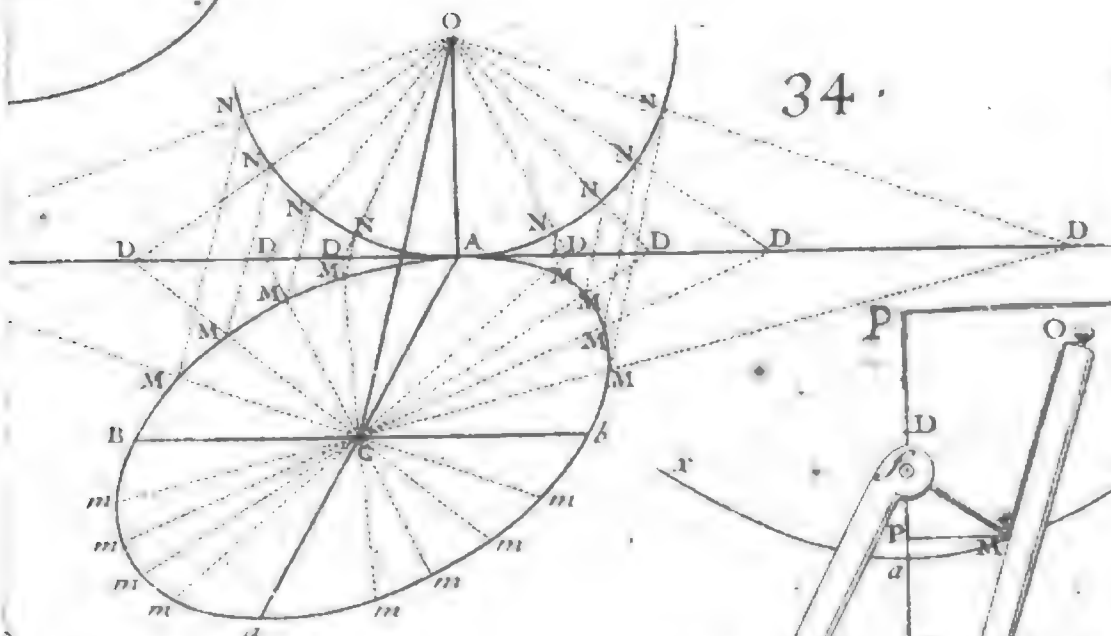
33.



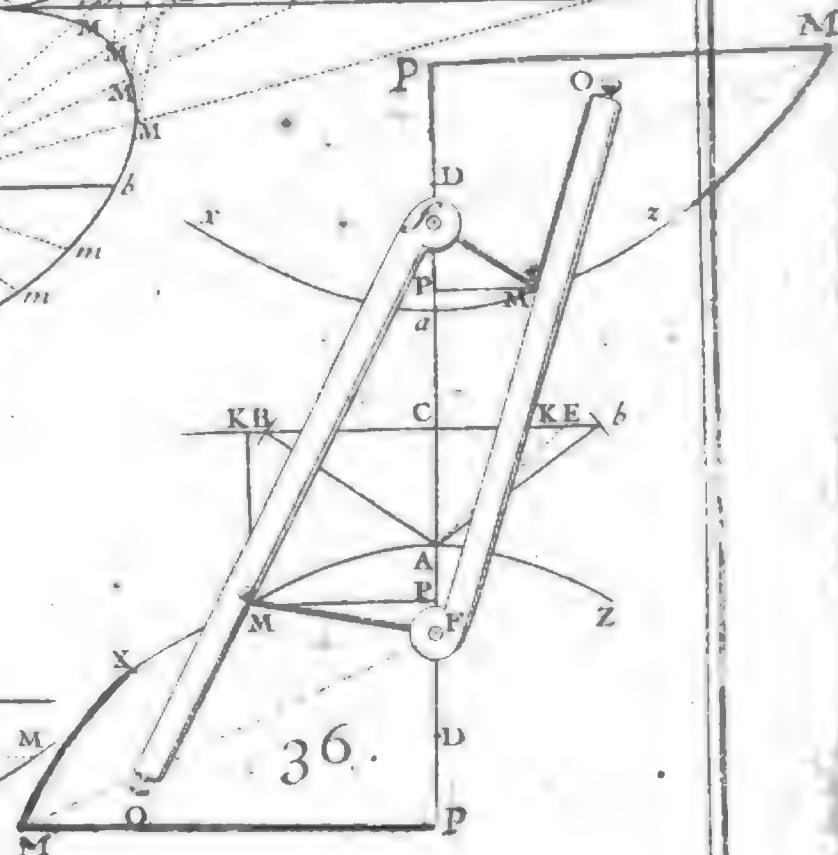
35.



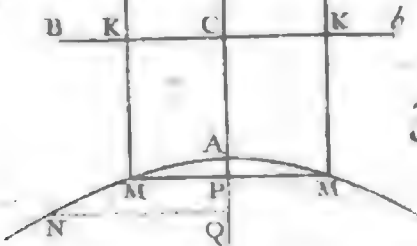
34.



36.



38.



COROLLAIRE I.

87. IL est évident que l'angle GCg , fait par les asymptotes d'une Hyperbole, ou son égal BAb , est moindre, égal, ou plus grand qu'un droit, selon que le second axe Bb est moindre, égal, ou plus grand que le premier Aa . Car lorsque le premier axe Aa surpasse le second Bb , la moitié CA , surpasse la moitié CB du second; & par conséquent dans le triangle rectangle CAB , l'angle CAB est moindre qu'un demi droit. Les deux angles égaux CAB , CAb , qui font ensemble l'angle BAb , seront donc moindres qu'un droit. Les deux autres cas se démontrent de la même manière.

COROLLAIRE II.

88. A CAUSE des triangles semblables BAb , BGC , il est clair que la ligne AB est divisée par l'asymptote CG en deux parties égales au point G , & que CG est la moitié de AB ; puisque BC est la moitié de Bb . On prouvera de même que Ab est divisée par l'asymptote Cg en deux parties égales au point g , & que cg est la moitié de Ab . Donc toutes les lignes CG , GA , GB , Cg , gA , gb , sont égales entr'elles; puisqu'elles sont égales chacune à la moitié de l'une ou l'autre des lignes AB , Ab , que l'on sçait être égales entr'elles, suivant la définition 5^e.

COROLLAIRE III.

89. LA puissance d'une Hyperbole est égale à la quatrième partie de la somme des quarrés des deux demi-axes. Car nommant CA , t ; CB , c ; CG , m ; on aura * $BA = 2m$, * Art. 88. & à cause du triangle rectangle ACB , le quarré AB ($4mm$) $= tt + cc$. Et par conséquent $\overline{CG}^2 (mm) = \frac{tt + cc}{4}$.

PROPOSITION III.

Theorème.

FIG. 40.

90. *Si l'on mène par un point quelconque M de l'une ou de l'autre des Hyperboles opposées, une ligne droite Rr perpendiculaire au premier axe Aa qu'elle rencontre en P, & terminée par les asymptotes en R & r; je dis que le rectangle de RM par Mr, est égal au carré de BC, moitié du second axe Bb.*

*Il faut prouver que $RM * Mr = \overline{BC}^2$.*

Nommant les connues CA, t ; CB, c ; & les indéterminées CP, x ; PM, y ; les triangles semblables ACB , CPR , & ACb , CPR , donnent $CA(t). CB$ ou $Cb(c) :: CP(x). Pr$, ou $PR = \frac{cx}{t}$. Donc RM , ou $PR \mp PM = \frac{cx}{t} \mp y$; & Mr , ou $Pr \mp PM = \frac{cx}{t} \mp y$. Et par conséquent $RM * Mr = \frac{c^2 x^2}{t^2} - yy = \overline{BC}^2 (cc)$ en mettant * Art. 81. pour yy la valeur * $\frac{c^2 x^2}{t^2} - cc$. Ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE I.

91. *Il est clair que $\overline{PM}^2 (\frac{c^2 x^2}{t^2} - cc)$ est toujours moindre que \overline{PR}^2 ou $\overline{Pr}^2 (\frac{c^2 x^2}{t^2})$; Et par conséquent que tous les points des Hyperboles opposées tombent dans les angles faits par leurs asymptotes; de sorte qu'il n'en peut tomber aucun dans les angles d'à côté.*

COROLLAIRE II.

92. *Si l'on mène par deux points quelconques M, N, d'une Hyperbole ou des Hyperboles opposées, deux lignes droites Rr, Kk, perpendiculaires au premier axe, & terminées par les asymptotes: il est évident que les rectangles $RM * Mr$, $KN * Nk$, seront toujours égaux entr'eux; puisqu'ils sont égaux chacun au carré de la*

moitié BC du second axe Bb . D'où l'on voit que RM .
 $KN :: Nk$. Mr .

PROPOSITION IV.

Theorème.

93. Si l'on mène par deux points quelconques M , N , d'une Hyperbole ou des Hyperboles opposées, deux droites Hh , Ll , parallèles entr'elles, & terminées par les asymptotes; je dis que les rectangles $HM * Mh$, $LN * Nl$ seront égaux entr'eux.

*Il faut prouver que $HM * Mh = LN * Nl$.*

Ayant mené les droites Rr , Kk , perpendiculaires au premier axe Aa , il est clair que les triangles MRH , NKL , & Mrh , Nkl , sont semblables; puisqu'ils sont formés par des parallèles. On aura donc RM . $KN :: HM$. LN . Et Nk . $Mr :: Nl$. Mh . Or RM . $KN ::$ * Art. 92. Nk . Mr . Donc HM . $LN :: Nl$. Mh . Et par conséquent $HM * Mh = LN * Nl$. Ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE I.

94. Si l'on suppose que la ligne NL parallèle à MH , passe par le centre C , c'est à dire, qu'elle devienne CE : il est clair que les deux points L , l , se réuniront au centre C ; & partant que le rectangle $LN * Nl$, deviendra le carré EC^2 . D'où l'on voit que si l'on mène d'un point quelconque E , de l'une des Hyperboles opposées au centre C , la droite CE , & par un autre point quelconque M de l'une ou de l'autre de ces Hyperboles, une ligne MHh , parallèle à CE , & qui rencontre les asymptotes en H & b ; le carré de CE sera égal au rectangle de HM par Mh .

COROLLAIRE II.

95. Si l'on mène par un point quelconque N , de l'une des Hyperboles opposées, une ligne droite Ll , terminée par les asymptotes, & qui rencontre l'une ou
 H ij,

l'autre de ces Hyperboles en un autre point n ; les parties LN , ln , de cette droite prises entre les points des Hyperboles & la rencontre des asymptotes, seront égales entr'elles. Car nommant LN , a ; Nn , b ; nl , c ; on aura $LN \times Nl (ab \rightarrow c) = HM \times Mb = Ln \times nl. (bc \rightarrow ac)$, d'où l'on tire $LN (a) = ln (c)$.

COROLLAIRE III.

96. SI l'on suppose dans le Corollaire précédent que la ligne Nn , terminée par les Hyperboles opposées, passe par le centre C , c'est à dire, qu'elle devienne le premier diamètre ED : il est évident que les deux points L , l . se réuniront au centre C ; & qu'ainsi NL deviendra EC , & nl , CD . D'où l'on voit que tout premier diamètre DE , est divisé en deux également par le centre C .

COROLLAIRE IV.

97. SI deux lignes droites Mm , Nn , parallèles entr'elles, sont terminées par une Hyperbole ou par les Hyperboles opposées, & rencontrent une asymptote aux points H , L ; je dis que les rectangles $MH \times Hm$, $NL \times Ln$, seront égaux entr'eux. Car prolongeant, s'il est nécessaire, ces deux lignes, jusqu'à ce qu'elles rencontrent l'autre asymptote aux points h , l , les parties MH , mh , & NL , nl , seront égales * entr'elles : & partant, puisque $HM \times Mb = LN \times Nl$, il s'ensuit que $MH \times Hm = NL \times Ln$.

PROPOSITION V.

Théorème.

FIG. 41. 98. SI l'on mène par deux points quelconques M , N , d'une Hyperbole ou des Hyperboles opposées deux droites MH , NL , parallèles entr'elles & terminées par une asymptote ; & deux autres droites Mh , Nl , aussi parallèles entr'elles, & terminées par l'autre asymptote ; je dis que les

rectangles $HM \times Mh$, $NL \times Nl$, sont égaux entr'eux.

Cette Proposition se prouve de la même manière que la précédente, & il n'y a rien à changer dans la démonstration.

COROLLAIRE I.

99. Si les droites MH , Mh , & NL , Nl , sont Fig. 42.
parallèles aux deux asymptotes ; il est clair que les parallélogrammes $MHCh$, $NLCl$, aussi bien que les triangles CHM , CLN , qui en sont les moitiés, sont égaux entr'eux ; puisque les côtés de ces parallélogrammes autour des angles égaux $H M h$, $L N l$, sont réciproquement proportionnels.

COROLLAIRE II.

100. Les mêmes choses étant posées que dans le Corollaire précédent, il est visible que $CH \times HM = CL \times LN$; puisque dans cette supposition $Mh = CH$, & $Nl = CL$: c'est à dire, que si l'on mène par deux points quelconques M , N , de l'une, ou des Hyperboles opposées, deux droites MH , NL , parallèles à l'une des asymptotes, & terminées par l'autre ; les rectangles $CH \times HM$, $CL \times NL$, seront toujours égaux entr'eux ; & qu'ainsi $CH.CL :: LN.MH$.

COROLLAIRE III.

101. Puisque l'extrémité A du premier axe, est un des points de l'Hyperbole, & que la ligne AB , qui coupe en G , l'asymptote CG , est parallèle à l'autre asymptote Cg ; il s'ensuit * que le rectangle $CH \times HM$ sera * Art. 100.
toujours égal au même rectangle $CG \times GA$, ou * au quar. * Art. 88, re CG^2 , c'est à dire, selon la définition 12^e, à la puissance de l'Hyperbole. Si donc l'on nomme la donnée CG , m ; & les indéterminées CH , x ; HM , y ; on aura toujours $CH \times HM (xy) = CG^2 (mm)$. Or comme cette propriété convient également à tous les points des Hyperboles opposées, & qu'elle en détermine la position par

rapport à ses asymptotes ; il s'ensuit que l'équation $xy = mm$ en exprime parfaitement la nature par rapport à ses asymptotes.

COROLLAIRE IV.

102. IL suit de ce que $MH(y) = \frac{m}{x}$, que plus $CH(x)$ augmente, plus au contraire $HM(y)$ diminue ; de sorte que $CH(x)$ étant infiniment grande, $HM(y)$ sera alors infiniment petite, c'est à dire, nulle ou zero. D'où l'on voit que l'Hyperbole AM , & son asymptote CH (étant prolongées) s'approchent de plus en plus, de sorte qu'enfin leur distance devient moindre qu'aucune donnée ; & que cependant elles ne se peuvent jamais rencontrer, puisqu'elles ne se joignent que dans l'infini où l'on ne peut jamais arriver. Il en est de même pour l'autre asymptote Cg .

COROLLAIRE V.

103. ENTRE toutes les lignes qui passent par le centre C , 1°. Celles qui, comme Aa , tombent dans les angles faits par les asymptotes du côté des Hyperboles, rencontrent chacune des Hyperboles opposées en un seul point A , ou a ; & étant prolongées, elles passent au dedans de ces Hyperboles. Car à cause des angles GCA , gCA , & de leurs opposés au sommet, il est clair que la ligne Aa , s'éloigne de plus en plus de l'une & de l'autre asymptote ; au lieu que les Hyperboles opposées s'en approchent toujours * de plus en plus. 2°. Celles qui, comme Bb , tombent dans les angles d'à côté, faits aussi par les asymptotes, ne peuvent jamais rencontrer les Hyperboles opposées, quoiqu'on les prolonge à l'infini ; puisqu'aucun des points des Hyperboles * ne peut tomber dans ces angles.

* Art. 101. D'où l'on voit * que tous les premiers diamètres, tombent dans les angles faits par les Asymptotes du côté des Hyperboles, & que les seconds tombent dans les angles d'à côté.

* Def. 9.

COROLLAIRE VI.

104. **S**i l'on mene par un point quelconque H , de l'une des asymptotes CE , une parallèle HM , à l'autre Ce ; elle ne rencontrera l'Hyperbole qu'en un seul point M ; & étant continuée, elle passera au dedans. Car la distance de Ce , demeure par tout la même, au lieu que l'Hyperbole s'en approche * toujours de plus en plus. Fig. 43. * Art. 102.

COROLLAIRE VII.

105. **D**E-LA il est évident que si par un point quelconque M , d'une Hyperbole, l'on mene deux droites indéfinies MH , Mh , parallèles à ses asymptotes Ce , CE .

1°. Tous les points de l'Hyperbole qui lui est opposée, tomberont dans l'angle $H M h$; puisqu'ils tombent tous * dans l'angle fait par les asymptotes, lequel est ren- * Art. 91.
fermé dans l'angle $H M h$.

2°. Les deux portions de l'Hyperbole, tomberont dans les deux angles à côté de celui-ci; ainsi aucun de ses points ne tombera dans l'angle opposé au sommet à l'angle $H M h$.

3°. Toutes les lignes qui, comme MF , tombent dans l'angle $H M h$, rencontrent (étant prolongées du côté de F) l'Hyperbole opposée en un point N , & passent au dedans; puisqu'elles s'écartent de plus en plus des droites MH , Mh , & par conséquent de ses deux asymptotes qui leur sont parallèles: mais étant prolongées de l'autre côté du point M , elles entrent au dedans de l'Hyperbole qui passe par ce point, & ne la rencontrent jamais ailleurs.

4°. Toutes les lignes qui, comme Ec , tombent dans les angles à côté de l'angle $H M h$, rencontrent les deux asymptotes de l'Hyperbole qui passe par le point M , ainsi lorsqu'elles passent au dedans de l'une de ses portions, elles la rencontrent nécessairement en quelque point N , puisqu'elles vont rencontrer l'asymptote qui tombe au dehors de cette portion.

106. Si l'on mène par un point quelconque M , d'une Hyperbole, une ligne droite Ff , qui rencontre l'une de ses asymptotes au point F , & l'une des asymptotes de l'Hyperbole opposée au point f ; & qu'on la prolonge en N , en sorte que fN , soit égale à FM : je dis que le point N , sera à l'Hyperbole opposée. Car la ligne Ff , tombe dans l'angle HMb , & rencontre par conséquent l'Hyperbole opposée en quelque point N , comme l'on vient de démontrer dans le Corollaire précédent. Donc * &c.

* Art. 95.

2°. Si l'on mène par un point quelconque M , d'une Hyperbole, une ligne droite Ee , terminée par les asymptotes, & qu'on prenne sur cette ligne, la partie eN , égale à EM : je dis que le point N , sera encore l'un des points de cette Hyperbole. Car menant MH , parallèle à l'asymptote Ce , & terminée par l'autre en H , si l'on prend sur cette autre asymptote, la partie CL , égale à HE , & qu'on tire LN , parallèle à HM ; on a démontré dans l'article 104 qu'elle rencontrera l'Hyperbole en un point N , & dans l'article 100. que ce point sera tel que CL ou HE . $HM :: CH$ ou EL . LN ; d'où l'on voit que la ligne LN , rencontre l'Hyperbole dans le même point où elle rencontre la droite Ee . Mais à cause des parallèles HM , LN , il est clair que $eN = EM$, puis que $CL = HE$. Donc &c.

PROPOSITION VI.

Problème.

FIG. 43.

107. D'UN point donné M , sur une Hyperbole dont les asymptotes CE , Ce , sont données; mener la tangente DMd ; & démontrer qu'on n'en peut mener qu'une seule.

Ayant mené du point donné M , une parallèle MH , à l'une des asymptotes Ce , & terminée par l'autre CE , au point H ; on prendra sur cette asymptote, la partie HD ;

HD égale à HC ; on tirera par le point donné M , la droite DM , qui rencontre l'asymptote Ce en un point d . Je dis en premier lieu, que cette ligne Dmd , touchera l'Hyperbole au point M .

Car à cause des triangles semblables CDd , HDM , la ligne Dd , terminée par les asymptotes, est divisée en deux parties égales par le point M , de même que CD , l'est en H . Or s'il étoit possible qu'elle rencontrât l'Hyperbole en un autre point O , il est clair que Od , seroit * égale à MD , & par conséquent à Md , c'est à * *Art. 93.* dire, la partie au tout; ce qui ne pouvant être, il s'ensuit que la ligne Dmd , ne peut rencontrer l'Hyperbole, qu'au seul point M . De plus, si elle passoit au dedans, comme la ligne Ee , il est visible qu'elle rencontreroit la portion de l'Hyperbole, au dedans de laquelle elle passeroit en quelque point N ; puisqu'elle iroit, rencontrer en un point e , l'asymptote Ce , qui tombe * au dehors de * *Art. 91.* cette portion. Il est donc évident que la ligne Dd , ne rencontre l'Hyperbole qu'au seul point M , & qu'elle n'entre point au dedans; c'est à dire, qu'elle est tangente en ce point.

Je dis en second lieu, qu'il n'y a que la seule ligne Dmd , qui puisse toucher l'Hyperbole au point M ; car si l'on prend sur l'asymptote CE , la partie HE , plus grande ou moindre que HD , & qu'on tire par le point donné M , la droite EM , qui rencontre l'autre asymptote Ce , au point e , il est clair à cause des parallèles MH , Ce , que ME sera plus grande ou moindre que Me ; puisque HE a été prise plus grande ou moindre que HD ou que HC . Or cela posé, si l'on prend sur la plus grande partie Me , le point N , en sorte que Ne soit égale à ME , il est évident que ce point * sera encore à * *Art. 106.* l'Hyperbole, & qu'ainsi la ligne Ee , ne la touchera point au point M . Ce qui restoit à démontrer.

REMARQUE.

108. ON a démontré dans l'art. 102. que plus CH devient grande, plus au contraire HM diminue; de sorte que CH étant infiniment grande, HM devient infiniment petite, c'est à dire, nulle ou zero. Or CH étant infiniment grande, HD (qui lui est égale) le sera aussi; & par conséquent les lignes MD , HD , qui ne se rencontrent que dans l'infini, pouvant être regardées comme parallèles, tomberont l'une sur l'autre; puisque le point M se confond-alors avec le point H : c'est à dire, que l'asymptote CE , étant prolongée à l'infini, aussi bien que l'Hyperbole, peut être regardée comme une ligne qui la touche dans son extrémité. Il en est de même de l'autre asymptote Ce , laquelle peut être regardée comme touchant la même Hyperbole dans son autre extrémité.

D'où l'on voit que les deux asymptotes peuvent être regardées comme des tangentes infinies, qui touchent les Hyperboles opposées dans leurs extrémités.

COROLLAIRE I.

109. COMME il n'y a que la seule ligne DMd , laquelle étant terminée par les asymptotes, soit coupée en deux parties égales au point M ; il s'ensuit que si une ligne droite DMd , terminée par les asymptotes d'une Hyperbole, la rencontre en un point M , qui coupe cette ligne droite en deux parties égales; elle sera tangente de cette Hyperbole en ce point. Et réciproquement que si une ligne droite DMd , terminée par les asymptotes d'une Hyperbole, la touche en un point M ; elle sera coupée en deux parties égales par ce point.

COROLLAIRE II.

Fig. 44. 110. SI par le point touchant M d'une tangente quelconque DMd , terminée par les asymptotes CL ,

cl , d'une Hyperbole, l'on mene un premier diametre Mcm ; & que par le point m , où il rencontre l'Hyperbole opposée, l'on tire une parallele Ee , à la tangente Dd , terminée par les asymptotes aux points E, e : je dis que cette ligne sera tangente au point m . Car les triangles $CM D$, $Cm E$, seront semblables & égaux, puisque * *Art. 96.* CM est égal à Cm . La ligne mE , sera donc égale à MD . On prouvera de même (à cause des triangles semblables & égaux $CM d$, $Cm e$) que me est égale à Md . C'est pourquoi la ligne Ee est divisée en deux également au point m ; puisque Dd l'est au point M . Et par conséquent * elle sera tangente en m . * *Art. 109.*

D'où l'on voit que les tangentes Dd , Ee , qui passent par les extrémités d'un premier diametre quelconque Mm , sont paralleles entr'elles; & de plus égales, lorsqu'elles sont terminées par les asymptotes.

DÉFINITIONS.

13.

Si l'y a deux diametres Mm , Ss , dont l'un Ss , soit *Fig. 44.* parallele aux tangentes qui passent par les extrémités de l'autre Mm ; & de plus terminé en S, s , par les droites MS , Ms , menées de l'une des extrémités M du diametre Mm , parallelement aux asymptotes: ces deux diametres Mm , Ss , seront appelés ensemble *Conjugués*.

14.

Les lignes droites menées des points des Hyperboles opposées parallelement à l'un des diametres conjugués, & terminées par l'autre, sont nommées *Ordonnées* à cet autre. Ainsi NO , est une ordonnée au diametre Mm .

15.

Si l'on prend une troisième proportionnelle à deux diametres conjugués, elle sera le *Parametre* de celui qui est le premier terme de la proportion.

COROLLAIRE I.

III. LA définition 13^e convient aux deux axes, puisque selon l'article 84. le second axe est parallèle aux tangentes qui passent par l'extrémité du premier ; & que de plus, selon la définition 11^e, il est terminé par deux droites menées de l'une des extrémités du premier axe, parallèlement aux asymptotes. D'où l'on voit que les deux axes peuvent être regardés comme deux diamètres conjugués qui font entr'eux des angles droits.

COROLLAIRE II.

II2. COMME le diamètre SCs , est parallèle à la tangente DMd , qui passe par l'une des extrémités M du diamètre Mcm , & que cette tangente rencontre les deux asymptotes CD , cd , de l'Hyperbole, qui passe par le point M : il s'ensuit qu'il tombe dans les angles à côté de l'angle DCd , fait par les asymptotes de cette Hyperbole ; Et qu'ainsi c'est un second diamètre.

D'où l'on voit qu'entre deux diamètres conjugués Mcm , SCs ; il y en a toujours un premier Mm , & un second Ss .

COROLLAIRE III.

II3. LE second diamètre SCs , est coupé par le milieu au centre C , & de plus égal à la tangente DMd , qui passant par l'une des extrémités M du premier diamètre Mm , qui lui est conjugué, est terminée par les asymptotes. Car à cause des parallèles MS , cd , & Ms , CD ; il est clair que CS est égale à Md , & Cs à MD .

* Art. 109. Or DMd , est divisée * en deux parties égales au point touchant M . Donc &c.

COROLLAIRE IV.

II4. DEUX diamètres conjugués Mm , Ss , étant donnés, & sçachant lequel des deux est un premier diamètre ; il ne faut pour avoir les asymptotes CD , cd , que

tirer par le centre C , des parallèles aux deux droites MS , Ms , menées de l'une des extrémités M , du premier diamètre Mm , aux deux extrémités S , s , du second.

Et réciproquement les deux asymptotes CD , Cd , d'une Hyperbole étant données, avec l'un de ses points M ; il ne faut pour avoir deux de ces diamètres conjugués Mcm , Scs , que tirer MH parallèle à l'une des asymptotes Cd , qui rencontre l'autre asymptote CD en H ; & l'ayant prolongée en S , en sorte que HS soit égale à HM , mener les droites CM , CS . Car tirant MD parallèle à CS , il est clair à cause des triangles semblables CHS , MHD , que HD est égale à HC ; puisque MH est égale à HS ; & qu'ainsi * MD est tangente en M : d'où il suit selon la définition 13^e, que les lignes CM , CS , sont deux demi-diamètres conjugués. * Art. 107.

Il est donc évident que deux diamètres conjugués Mm , Ss , étant donnés de position & de grandeur, & sachant de plus lequel des deux est un premier diamètre; on a les deux asymptotes CD , Cd , avec l'un des points M , de l'une des Hyperboles opposées.

Et réciproquement que les asymptotes CD , Cd , d'une Hyperbole étant données, avec un de ses points M ; on a deux de ses diamètres conjugués Mm , Ss , de position & de grandeur; & l'on sait lequel des deux est un premier diamètre; savoir, celui qui passe par le point donné M .

COROLLAIRE V.

115. **U**N second diamètre Scs , étant donné de position, pour en déterminer la grandeur, & trouver le premier diamètre Mm , qui lui est conjugué; on lui mènera par tout où l'on voudra au dedans de l'angle fait par les asymptotes, une parallèle Ll , terminée par les asymptotes en L , l ; & par son point de milieu O , le premier diamètre CO , qui rencontrera l'Hyperbole en

I iij

un point M ; par lequel ayant tiré les droites MS , $M s$, parallèles aux asymptotes ; il est clair, selon la définition 13^e, que les points S , s , où elles rencontrent le second diamètre SCs , donné de position, en déterminent la grandeur, & que le premier diamètre MCm lui est conjugué. Car menant par le point M , la ligne Dd , parallèle à Ll , & terminée par les asymptotes, elle sera coupée en deux également au point M ; puisque Ll , l'est au point O : & *Art. 109.* partant * elle sera tangente en M .

De-là, il est évident qu'un second diamètre SCs , étant donné de position, la grandeur est déterminée en sorte qu'il ne peut en avoir qu'une seule ; comme aussi la grandeur & la position du premier diamètre Mm , qui lui est conjugué.

COROLLAIRE VI.

116. **U**N second diamètre SCs , étant donné de position & de grandeur, avec son paramètre, & la position de ses ordonnées, il sera facile de trouver de position & de grandeur le premier diamètre MCm , qui lui est conjugué, avec son paramètre. Car ayant mené par le centre C , une parallèle indéfinie aux ordonnées du diamètre Ss , on marquera sur cette ligne deux points M , m , également éloignés de part & d'autre du centre C , en sorte que Mm , soit égale à la moyenne proportionnelle entre le second diamètre Ss , & son paramètre. Puis ayant trouvé une troisième proportionnelle aux deux lignes Mm , Ss , il est clair, selon les définitions 14 & 15, que Mm , sera le premier diamètre conjugué au diamètre Ss , & qu'il aura pour son paramètre cette troisième proportionnelle.

PROPOSITION VII.

Théorème.

FIG. 44. 117. **L**E carré d'une ordonnée quelconque ON , au premier diamètre Mm , est au rectangle de MO par Om , par-

ties de ce diamètre prolongé; comme le quarré de son conjugué Ss , est au quarré de ce premier diamètre Mm .

Il faut prouver que $\overline{ON}^2 \cdot MO \times Om :: \overline{Ss}^2 \cdot \overline{Mm}^2$.

Ayant mené par l'une des extrémités M , du premier diamètre Mm , une parallèle Dd au second diamètre Ss , terminée par les asymptotes; elle sera tangente en M , selon la définition 13^e. Et par conséquent * elle sera * Art. 109, coupée en deux également par ce point: c'est pourquoi, si l'on prolonge l'ordonnée ON (qui selon la définition 14^e est parallèle au diamètre Ss) de part & d'autre du diamètre Mm , elle rencontrera les asymptotes en deux points L, l , qui seront également éloignés de part & d'autre du point O . Cela posé, soient nommées les données CM , ou Cm , t ; CS , ou Cs , ou * MD , ou Md , * Art. 113, c ; & les indéterminées CO , x ; ON , y ; on aura à cause des triangles semblables CMD , COL ; cette proportion: $CM (t) \cdot MD (c) :: CO (x) \cdot OL$ ou $Ol = \frac{cx}{t}$. Donc

LN ou $LO \pm ON = \frac{cx}{t} \pm y$, & Nl ou $Ol \mp NO = \frac{cx}{t} \mp y$; Et partant $LN \times Nl = \frac{c^2xx}{t^2} - yy = * DM \times Md$ * Art. 90.

$= cc$. D'où il suit que $\overline{ON}^2 (yy) \cdot MO \times Om (xx - tt) :: \overline{Ss}^2 (4cc) \cdot \overline{Mm}^2 (4tt)$. Puisqu'en multipliant les Extrêmes & les Moyens, on trouve $4ttyy = 4ccxx - 4cc tt$, c'est à dire (en divisant ^{multipliant} par $4tt$, & transposant à l'ordinaire) l'équation même précédente $\frac{c^2xx}{t^2} - yy = cc$. Ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE GENERAL.

118. IL est visible que ce qu'on a démontré dans la Proposition seconde *; par rapport aux deux axes Aa , * Art. 79, Bb , s'étend par le moyen de cette Proposition à deux diamètres conjugués quelconques, Mm , Ss . Or comme les articles 80, 81, 82, 83, 84 & 85, se tirent de la seconde Proposition, & subsistent également, soit que l'angle ACB , soit droit ou qu'il ne le soit pas, il s'en-

suit que si l'on suppose dans ces articles que les lignes Aa , Bb , au lieu d'être les deux axes, soient deux diamètres conjugués quelconques, ces articles seront encore vrais dans cette supposition : car leur démonstration demeure toujours la même ; & il ne faut pour s'en convaincre entièrement, que les relire en mettant par tout où se trouve le mot d'*Axe*, celui de *Diamètre*.

PROPOSITION VIII.

Theorème.

FIG. 45.

119. SOIENT deux tangentes quelconques DE , FG , d'une Hyperbole MA , terminées par les asymptotes, & qui s'entrecoupent en un point O ; je dis que les côtés des triangles CDE , CFG , autour de l'angle commun C , sont réciproquement proportionnels.

Il faut prouver que $CD \cdot CF :: CG \cdot CE$.

Ayant mené par les points touchans M , A , les parallèles MH , AL , à l'asymptote CG ; il est clair à cause des triangles semblables CDE , HDM , que CD est double de CH , & CE double de HM ; puisque DE est * *Art. 109.* double de DM . Et à cause des triangles semblables CFG , LFA , que CF est double de CL , & CG double de LA , * *Art. 100.* puisque FG , est double de FA . Or * $CH \cdot CL :: LA \cdot HM$. Et partant si l'on prend le double de chaque terme, on aura $2CH$ ou CD . $2CL$ ou $CF :: 2LA$ ou CG . $2HM$ ou CE . Ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE.

120. IL suit de cette Proposition que les droites DG , FE , sont parallèles entr'elles. D'où il est évident :

1°. Que les triangles CDE , CFG , sont égaux ; car les triangles FDE , FGE , qui ont la même base FE , & qui sont entre les mêmes parallèles DG , FE , sont égaux ; Et partant, si l'on ajoute de part & d'autre le même

39.

40.

42.

44.

45.

6. pag 72.

même triangle CEF , on formera les triangles CDE , CFG , qui seront égaux entr'eux.

1°. Que la ligne DE , est coupée en même raison aux points M , O , que la ligne FG l'est aux points A , O . Car menant par les points touchans la droite MA , il est clair qu'elle sera parallèle aux deux droites DG , FE ; puisqu'elle coupe par le milieu les droites DE , FG , renfermées entre ces parallèles.

PROPOSITION IX.

Theorème.

121. *Si par un point quelconque M , d'une Hyperbole, Fig. 46. & 47. l'on mene une ordonnée MP à tel de ses diamètres Aa que l'on voudra, & une tangente MT qui le rencontre en T ; je dis que $CP. CA :: CA. CT$. en observant que les points P , T , tombent du même côté du centre C , lorsque la ligne Aa est un premier diamètre; & au contraire qu'ils tombent de part & d'autre du centre, lorsque c'est un second diamètre.*

Premier cas. Lorsque la ligne Aa est un premier dia- Fig. 46. mètre. On prolongera la tangente MT jusqu'à ce qu'elle rencontre les asymptotes CD , CG , aux points D , E ; & l'ordonnée PM , jusqu'à ce qu'elle rencontre l'asymptote CD au point N ; on menera ensuite par le point A la ligne AK , parallèle à DE , qui rencontre l'asymptote CG au point K , & la tangente FG terminée par les asymptotes, qui sera parallèle * à PM , & qui rencontre * Def. 14. au point O l'autre tangente DE .

Cela posé, AP est à AC , ou FN à FC , en raison composée de FN à FD , ou de OM à OD , ou * de OA à OG , ou * Art. 120. de EK à EG , & de FD à FC , ou * de EG à EC . Or AT est à * Art. 120. TC , ou KE à EC , en raison composée de EK à EG , & de EG à EC . Donc $AP. AC :: AT. TC$. puisque les raisons composantes de ces deux raisons sont les mêmes; & par conséquent $AP + AC$ ou $CP. CA :: AT + TC$ ou $CA. CT$. Ce qui étoit proposé en premier lieu.

K.

Second cas. Lorsque la ligne Aa est un second diamètre. Ayant mené par le centre C la ligne CK parallèle à l'ordonnée PM , qui rencontre l'Hyperbole au point B , & la tangente MT au point R , & par le point touchant M la ligne MK parallèle à Aa ; il est clair que CB sera le premier demi-diamètre conjugué au second Aa , & qu'ainsi MK sera ordonnée à ce diamètre.

Cela posé, si l'on nomme les données CA ou Ca , t ; CB , c ; & les indéterminées CP ou MK , x ; PM ou CK , y ; on aura selon ce qu'on vient de démontrer dans le premier cas, $CR = \frac{c}{y}$; & partant RK ou $CK - CR = \frac{yy - cc}{y}$. Or les triangles semblables KRM ,

CRT , donnent $KR \left(\frac{yy - cc}{y} \right) \cdot RC \left(\frac{c}{y} \right) :: MK (x)$.

* Art. 80. $CT = \frac{cx}{yy - cc} = \frac{t}{x}$. en mettant pour $yy - cc$ la valeur

Art. 118.

$\frac{ccx}{t}$ tirée de ce que $yy = \frac{ccx}{t} + cc$. C'est à dire que $CP, CA :: CA, CT$. Ce qui restoit à démontrer.

PROPOSITION X.

Theorème.

FIG. 48. & 122. Si par un point quelconque M d'une Hyperbole qui
49. a pour centre le point C , on mene une ordonnée MP à l'un ou à l'autre axe Aa , & une perpendiculaire MG à la tangente MT , laquelle passe par M : Je dis que CP sera toujours à PG en la raison donnée de l'axe Aa à son Paramètre.

Car nommant le demi-axe CA ou Ca , t ; & les indé-

* Art. 121. terminées CP , x ; PM , y ; on aura * $CT = \frac{t}{x}$; Et par-

tant $PT = \frac{xx + t^2}{x}$, selon que Aa est le premier ou le second axe. Or les triangles rectangles semblables TPM , MPG , donnent $TP \left(\frac{xx + t^2}{x} \right) \cdot PM (y) :: PM$

(y). $PG = \frac{xy}{xx + tt}$. D'où l'on tire cette proportion CP
 (x). $PG \left(\frac{xy}{xx + tt} \right) :: \overline{CP} \cdot \overline{CA} (xx + tt) \cdot \overline{PM} (yy)$.
 puisqu'en multipliant les moyens & les extrêmes, on
 trouve le même produit xyy . Mais $\overline{CP} \cdot \overline{CA}$ est à
 \overline{PM} , comme * l'axe Aa est à son paramètre. Donc * Art. 81.
 CP est aussi à PG en cette même raison. Ce qu'il falloit
 démontrer.

PROPOSITION XI.

Theorème.

123. SI d'un point quelconque M d'une Hyperbole, l'on FIG. 501
 tire à ses deux foyers F, f , les droites MF, Mf , je dis que
 la tangente MT , qui passe par ce point M , divise en deux
 également l'angle $F M f$.

Car ayant mené les perpendiculaires FD, fd , sur
 la tangente MT ; le premier axe Aa , qui passe par les
 foyers F, f , & qui rencontre la tangente en T ; & l'or-
 donnée MP , à cet axe : on nommera les données CA
 ou Ca, t ; CF ou Cf, m ; & l'indéterminée CP, x .
 L'on aura $MF * \left(\frac{m}{x} - t \right)$. $Mf \left(\frac{m}{x} + t \right) :: TF$ ou CF * Art. 78.
 (m) — $CT * \left(\frac{t}{x} \right)$. Tf ou $Cf (m) + CT \left(\frac{t}{x} \right)$. puisqu'en * Art. 121.
 multipliant les extrêmes & les moyens, on forme le
 même produit. Or les triangles rectangles semblables
 TFD, Tfd , donnent $TF : Tf :: FD : fd$. L'hypothé-
 nuse MF du triangle rectangle $MD F$, sera donc à l'hy-
 pothénuse Mf du triangle rectangle Mdf , comme le
 côté DF est au côté df ; & par conséquent ces deux trian-
 gles seront semblables. Donc les angles FMD, fMd ,
 qui sont opposés aux côtés homologues DF, df , seront
 égaux entr'eux. Ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE.

124. **D**E-LA il est évident, que la tangente MT , étant prolongée indéfiniment de part & d'autre du point touchant M , laisse l'Hyperbole AM , toute entière du côté de son foyer intérieur F . Et comme cela arrive toujours en quelque endroit de cette Hyperbole qu'on prenne le point M , il est visible qu'elle sera concave dans toute son étendue autour de son foyer intérieur F .

PROPOSITION XII.

Theorème.

FIG. 51.

125. **L**A différence des quarrés de deux diamètres conjugués quelconques Mm , Ss , est égale à la différence des quarrés des deux axes Aa , Bb .

Il faut prouver que $\overline{CS'} - \overline{CM'} = \overline{CB'} - \overline{CA'}$, ou que $\overline{CM'} - \overline{CS'} = \overline{CA'} - \overline{CB'}$.

- * Def. 11. & 13. Si l'on mene les droites MS , AB , elles seront parallèles à l'asymptote Cg , & de plus couppees en deux également par l'autre asymptote CG , aux points H , G ;
- * Def. 11. & 13. puisque * les lignes Mm , Ab , sont parallèles à cette asymptote, & que les seconds diamètres Ss , Bb , sont couppez * en deux également au centre C : C'est pourquoi si l'on mene sur l'asymptote CG , les perpendiculaires AF , BE , ML , SK , on formera les triangles GAF , GBE , & HML , HSK , qui seront semblables & égaux. Cela
- * Art. 88. posé, soient nommées les données CG ou * GA , m ; GE ou GF , a ; AF ou BE , b ; & les indéterminées CH , x ; HM , y : ce qui donne $CE = m + a$, $CF = m - a$; $\overline{CE} + \overline{EB}$ ou $\overline{CB} = mm + 2am + aa + bb$, $\overline{CF} + \overline{FA}$ ou $\overline{CA} = mm - 2am + aa + bb$. Et partant $\overline{CB} - \overline{CA} = 4am$. Or les triangles semblables GAF , HML , fournissent $GA(m). AF(b) :: HM(y). ML$ ou $KS = \frac{by}{m}$. Et $GA(m). GF(a) :: HM$

(y). HL ou $HK = \frac{a^2 y}{m}$. Donc $CK = x + \frac{a^2 y}{m}$, $CL = x - \frac{a^2 y}{m}$; $\overline{CK} + \overline{KS}$ ou $\overline{CS} = xx + \frac{2axy}{m} + \frac{a^2 yy}{mm} + \frac{bb yy}{mm}$, $\overline{CL} + \overline{LM}$ ou $\overline{CM} = xx - \frac{2axy}{m} + \frac{a^2 yy}{mm} + \frac{bb yy}{mm}$. Et partant $\overline{CS} - \overline{CM} = \frac{4axy}{m} = 4am$, en mettant pour xy sa valeur * mm . Donc $\overline{CS} - \overline{CM} = \overline{CB} - \overline{CA}$; Ce * *Art. 101.* qu'il falloit démontrer.

Si l'angle GCg , fait par les asymptotes, étoit aigu, au lieu que dans cette figure & le raisonnement qui lui est approprié, il est obtus; CF seroit alors plus grande que CE , & on prouveroit de la même manière que $\overline{CM} - \overline{CS} = \overline{CA} - \overline{CB}$. Mais si l'angle GCg fait par les asymptotes étoit droit, il est visible alors que les lignes AB , MS , seroient perpendiculaires sur l'asymptote CG ; & qu'ainsi les deux demi-diamètres conjugués CM , CS , seroient égaux entr'eux, de même que les deux demi-axes CA , CB . Or comme alors la différence des deux diamètres conjugués Mm , Ss , est nulle, aussi bien que celle des deux axes Aa , Bb ; il s'ensuit que cette Proposition est vraie dans tous les cas.

COROLLAIRE.

126. **D**E LA il est évident qu'un premier diamètre quelconque Mm , est moindre, plus grand, ou égal au second diamètre Ss , qui lui est conjugué; selon que l'angle GCg , fait par les asymptotes, est obtus, aigu, ou droit.

DÉFINITION.

16.

Les deux Hyperboles opposées sont appelées *Equilares*, lorsque deux de leurs diamètres conjugués quelconques sont égaux entr'eux; ou bien lorsque l'angle fait par leurs asymptotes est droit.

COROLLAIRE.

- FIG. 52. 127. Si d'un point quelconque M d'une Hyperbole équilatère, l'on mene une ordonnée MP à tel de ses diamètres Aa qu'on voudra, on aura $MP = CP$.
 * Art. 81. \overline{CA} : savoir $-$, lorsque Aa est un premier diamètre ;
 & $+$, lorsque c'est un second. Car le diamètre conjugué
 * Art. 126. au diamètre Aa lui sera toujours égal.

PROPOSITION XIII.

Problème.

- FIG. 53. 54. 128. DEUX diamètres conjugués quelconques étant donnés, & sachant lequel des deux est le premier ; ou ce qui revient * au même, les asymptotes CD, CF , d'une Hyperbole étant données, avec un de ses points quelconques M : mener deux diamètres conjugués Aa, Bb , qui fassent entr'eux un angle égal à un angle donné.

Ayant coupé dans un cercle quelconque qui a pour centre le point o , un arc dcf capable de l'angle DCF fait par les asymptotes ; on menera par le point de milieu e , de la corde df , la ligne ec qui fasse avec cette corde de part ou d'autre l'angle dec ou fec égal à l'angle donné ; & par le point c , où elle rencontre l'arc dcf , les droites cd, cf . Cela fait, on prendra sur les asymptotes les parties CD, CF , égales aux cordes cd, cf ; & ayant tiré DF , l'on menera le second diamètre Bb parallèle à cette ligne, & le premier diamètre Aa qui passe par son milieu E . Je dis que ces deux diamètres Aa, Bb , font entr'eux un angle égal à l'angle donné, & qu'ils sont conjugués l'un à l'autre.

Car par la construction l'angle dcf est égal à l'angle DCF fait par les asymptotes ; & par conséquent les triangles DCF, dcf , & DCE, dce , sont égaux & semblables. L'angle Bca , que font entr'eux les deux diamètres Aa, Bb , sera donc égal à l'angle DEC ou dec

qui a été fait égal à l'angle donné. De plus, si l'on mène par le point A , que je suppose être l'une des extrémités du premier diamètre Aa , une parallèle DE ; il est clair qu'elle sera coupée également par ce point, puisque DF l'est au point E ; & qu'ainsi * elle sera tangente * *Art. 109.* en A ; d'où il suit * que les diamètres Aa , Bb , sont con- * *Def. 13.* jugués.

Maintenant pour déterminer la grandeur de ces deux diamètres, on tirera par le point donné M , une parallèle MKL au premier diamètre Aa , laquelle rencontre l'asymptote CD au point K , & l'autre asymptote CF , prolongé au delà du centre C , au point L : & ayant pris CA moyenne proportionnelle entre KM , ML ; il est clair * que le point A sera l'une des extrémités du pre- * *Art. 94.* mier diamètre Aa ; & qu'ainsi menant les lignes AB , ab , parallèles aux asymptotes CF , CD , elles * détermineront * *Def. 13.* par leurs points de rencontre B , b , la grandeur du second diamètre Bb .

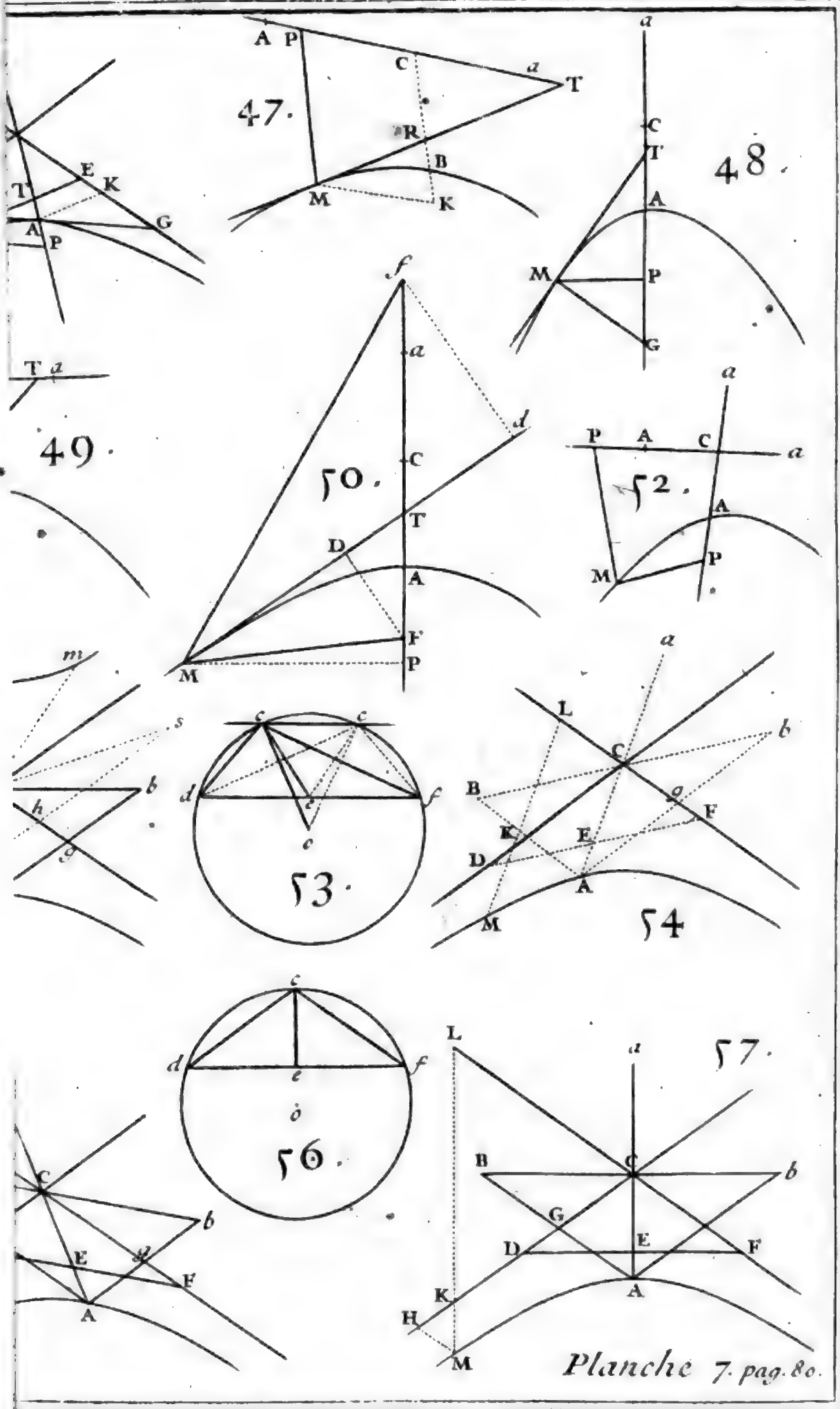
Comme l'on peut mener deux différentes lignes ec , ec , qui fassent avec la corde df , de part & d'autre des angles dec , fec , égaux à l'angle donné, lorsque cet angle n'est pas droit; il s'ensuit qu'on pourra toujours trouver alors deux différens diamètres conjugués Aa , Bb , qui satisferont également, comme l'on voit dans les figures 54 & 55. Mais il est à remarquer que les diamètres conjugués Aa , Bb , de la fig. 55. ont une position semblable par rapport à l'asymptote CF , à ceux de la figure 54. par rapport à l'autre asymptote CD ; & que leur grandeur demeure la même dans ces deux différentes positions. Car,

1°. Menant du centre o au point e , milieu de la corde df , la ligne oe , elle sera perpendiculaire à cette corde, & par conséquent les angles oec , oec , seront égaux; c'est pourquoi tirant les rayons oc , oc , les triangles oec , oec , qui ont le côté oe commun, les angles oec , oec , & les côtés oc , oc , égaux entre eux, auront aussi leurs troisièmes côtés ec , ec , égaux. Les triangles fec , dec , qui ont les côtés ef , ed , & ec , ec , & les

angles $f e c$, $d e c$, égaux, seront donc égaux & semblables ; d'où l'on voit que l'angle $e c f$, ou $E C F$, de la figure 55. est égal à l'angle $e c d$, ou $E C D$, de la fig. 54. & qu'ainsi la position du diamètre $A a$, de la fig. 55. par rapport à l'asymptote $C F$, est semblable à celle du diamètre $A a$, de la figure 54. par rapport à l'autre asymptote $C D$.

2°. Si l'on mène dans la figure 55. la ligne $M l$, qui fasse avec l'asymptote $C F$, prolongée du côté du centre C , l'angle $M l C$ égal à l'angle $M L C$ ou $E C F$, de la figure 54. : il est clair que les lignes $M l$, $M k$, de la figure 55. seront égales aux lignes $M L$, $M K$, de la figure 54. ; puisqu'on suppose que la position du point M par rapport aux asymptotes, est la même dans ces deux figures. Or l'angle $M l L$, complément à deux droits de l'angle $M l C$, de la figure 55, ou de $E C F$ de la figure 54, est égal à l'angle $M K k$, complément à deux droits de l'angle $E C D$ de la fig. 55. ou de $E C F$ de la fig. 54. ; Et par conséquent dans la fig. 55. les deux triangles $L M l$, $k M K$, qui ont l'angle en M commun, & les angles aux points l , K , égaux, sont semblables : ce qui donne $L M. M l :: k M. M K$. Et partant $L M * M K = l M * M k$ ou $L M * M K$ de la figure 54. D'où l'on voit * que les premiers demi-diamètres $C A$, $C A$, des figures 54 & 55, sont égaux. Il en est de même du diamètre $B b$; puisque sa position & sa grandeur dépendent de celles du premier diamètre $A a$, auquel il est conjugué.

Comme l'on ne peut mener qu'une seule ligne $e c$, qui fasse avec la corde $d f$ de part ou d'autre, un angle égal à l'angle donné, lorsque cet angle est droit ; il s'ensuit qu'il n'y a que deux diamètres conjugués $A a$, $B b$, qui fassent entr'eux un angle droit ; & qu'ainsi * ils seront les deux axes. Mais le triangle $d c f$ ou $D C F$, étant alors isoscèle, le premier axe $A a$ divisera par le milieu l'angle $D C F$ fait par les asymptotes ; d'où l'on voit que pour trouver de position les deux axes, il n'y a qu'à tirer deux lignes droites $A a$, $B b$, perpendiculaires entr'elles, dont l'une d'elles $A a$, divisé par le milieu l'angle $D C F$.



DCF , fait par les asymptotes : après quoi l'on en déterminera la grandeur, comme on vient de l'enseigner pour les diamètres conjugués.

On peut encore trouver les deux axes de cette autre manière. Soit menée par le point donné M une parallèle MH à l'une des asymptotes CF , & terminée par l'autre CD au point H . Soit prise sur l'asymptote CD , la partie CG égale à la moyenne proportionnelle entre CH , HM : & soit tirée par le point G une parallèle AB à CF , telle que chacune de ses parties GA , GB , soit égale à CG . Il est évident que les lignes CA , CB , * seront les deux demi-axes de position & de grandeur. * Art. 101. & 88.

COROLLAIRE.

129. IL est donc évident, 1°. Qu'il n'y a que deux diamètres conjugués qui fassent entr'eux un angle droit ; & qu'ainsi il ne peut y avoir que deux axes. 2°. Qu'on peut toujours trouver deux différens diamètres conjugués qui fassent entr'eux un angle égal à un angle donné, lorsque cet angle n'est pas droit ; que les deux premiers ont une position semblable par rapport à l'autre asymptote, à celle des deux autres par rapport à l'autre asymptote ; d'où il suit qu'ils sont semblablement posés de part & d'autre des deux axes, puisque les deux axes divisent par le milieu les angles faits par les asymptotes ; & qu'enfin leur grandeur demeure la même dans ces deux différentes positions.

PROPOSITION XIV.

Problème.

130. DEUX diamètres conjugués quelconques étant donnés, & sachant lequel des deux est le premier ; ou ce qui est la même chose * les asymptotes de deux Hyperboles opposées étant données avec un de leurs points quelconque : décrire ces Hyperboles par un mouvement continu. * Art. 114.

L

PREMIÈRE MANIÈRE.

On cherchera les deux axes, comme l'on vient d'enseigner dans la proposition précédente, & l'on décrira ensuite les Hyperboles opposées selon l'article 76.

SECONDE MANIÈRE.

FIG. 58.

Soient Aa , Bb , les diamètres conjugués donnés, entre lesquels le diamètre Aa est le premier, ou bien CG , Cg , les asymptotes données, avec le point A , un de ceux des Hyperboles opposées. Ayant mené par le point donné A une parallèle AG , à l'une des asymptotes Cg , & terminée par l'autre en G , on fera glisser le long de l'asymptote CG , indéfiniment prolongée de part & d'autre du centre C , une droite HK égale à CG , qui entraînera par son extrémité H une parallèle HM à l'asymptote Cg , & par son autre extrémité K , une droite KA mobile autour du point fixe A . Je dis que l'intersection continuelle M des droites AK , HM , décrira dans ce mouvement les deux Hyperboles opposées qu'on demande.

Car à cause des triangles semblables KHM , KGA , on aura toujours KH ou CG . $HM :: KG$ ou CH . GA . Et partant $CH * HM = CG * GA$. Le point M sera donc * un des points de l'Hyperbole qui passe par le point donné A , & qui a pour asymptotes les droites données CG , Cg ; ou de l'Hyperbole opposée.

* Art. 101.

PROPOSITION XV.

Problème.

131. **L**ES mêmes choses étant données que dans la Proposition précédente; décrire les Hyperboles opposées par plusieurs points.

PREMIÈRE MANIÈRE.

FIG. 59.

Soient CD , CE , les asymptotes données, & A le

point donné. Ayant mené par ce point A autant de lignes DE , DE , DE , &c. qu'on voudra, terminées par les asymptotes, & ayant pris sur ces lignes droites les parties EM , EM , EM , &c. égales AD , AD , AD , &c; sçavoir chacune à la correspondante : il est clair * 1°. Que * *Art. 106.* les points M , M , M , &c, seront à l'Hyperbole qui passe par le point A , lorsque les points E , E , E , &c. tombent au dessous du centre. 2°. Que ces Hyperboles ont pour asymptotes les droites CD , CE . Faisant donc passer par tous les points M , M , M , &c. qui tombent dans l'angle fait par les asymptotes, une ligne courbe, & par les autres points M , M , M , &c. qui tombent dans l'angle opposé au sommet à celui ci, une autre ligne courbe; ces deux lignes seront les deux Hyperboles opposées qu'on demande.

SECONDE MANIÈRE.

Soient les lignes Aa , Bb , les deux diamètres conjugués donnés, entre lesquels Aa est le second. Ayant pris sur le premier demi-diamètre CB prolongé indéfiniment du côté de B , de petites parties CE , EE , EE , &c. égales entr'elles, autant & de telle grandeur qu'on voudra, on menera par celui des points E , qui est le plus proche du centre C , la ligne EP parallèle à BA , & on prendra sur le second diamètre Aa de part & d'autre du centre C , autant de petites parties CP , PP , PP , &c. toutes égales à CP , qu'il y a de petites parties CE , EE , EE , &c. Ayant tiré CD perpendiculaire & égale à CB , on menera par tous les points P , P , P , &c, des parallèles MPM , MPM , MPM , &c. au premier diamètre Bb , sur chacune desquelles on prendra de part & d'autre du point P , des parties PM , PM , égales chacune à la correspondante ED . Je dis que les deux lignes courbes qui passent par tous les points M ainsi trouvés, seront les deux Hyperboles opposées qu'on demande.

Car nommant les données CA , t ; CB ou CD , c ; &c.

L. ij.

les indéterminées CP, x ; PM, y ; les triangles semblables CAB, CPE , donneront cette proportion $CA(t). CB(t) :: CP(x). CE = \frac{cx}{t}$. Et à cause du triangle ECD rectangle en C , (en imaginant chaque hypotenuse ED qu'on a omise de peur de confusion dans la figure) le quarré \overline{ED} ou $\overline{PM} (yy) = \overline{CE} \cdot (\frac{cx}{t})$

* Art. 51. & 118. $+ \overline{CD} (cc)$. La ligne PM sera donc * une ordonnée au second diamètre Aa , qui a pour conjugué le premier Bb ; & comme cette démonstration convient à toutes les lignes PM , puisque chaque CP est toujours à la correspondante CE , en la raison de CA à CB : il s'ensuit &c.

FIG. 61.

* Def. 16.

Lorsque les diamètres conjugués Aa, Bb , sont égaux entr'eux, c'est à dire*, lorsque les Hyperboles qu'on demande sont equilateres ; la construction devient beaucoup plus aisée. Car ayant mené CD perpendiculaire & égale à CA , & tiré par un point quelconque P du diamètre Aa , une parallèle MPM au premier diamètre Bb ; il n'y aura qu'à prendre sur cette ligne de part & d'autre du point P , les parties PM, PM , égales chacune à PD , pour avoir deux points des Hyperboles opposées. Car à cause du triangle PCD rectangle en C (en imaginant chaque hypotenuse PD) on aura toujours \overline{PD} ou $\overline{PM} = \overline{CP} + \overline{CD}$ ou \overline{CA} ; Et partant la ligne

* Art. 127. PM sera * une ordonnée au second diamètre Aa , qui a pour conjugué le premier Bb qui lui est égal.

DÉFINITION.

17.

FIG. 62.

Soient deux Hyperboles opposées AM, am , qui aient pour premier axe la ligne Aa , & pour second axe la ligne Bb ; & soient deux autres Hyperboles opposées BS, bs , qui aient au contraire pour premier axe la ligne Bb , & pour second axe la ligne Aa : ces deux nouvelles Hyperboles BS, bs , sont appelées *Conjuguées*

aux deux premières AM, am ; & les quatre ensemble sont appelées Hyperboles conjuguées.

COROLLAIRE.

132. IL est clair que les lignes Ba, Ab , sont parallèles; puisque les droites Aa, Bb , terminées par ces lignes, s'entrecoupent * en deux également au point C . * *Def. 4. & 5.* D'où il suit, selon la définition 11^e. que l'Hyperbole BS conjugée à AM , a pour l'une de ses asymptotes la ligne CG asymptote de l'Hyperbole AM ; & pour l'autre, la ligne Cg autre asymptote de l'Hyperbole AM indéfiniment prolongée du côté C : puisque ces deux lignes passent par le centre C ; & sont les parallèles aux deux droites Ba, BA , menées de l'extrémité B du premier axe Bb de l'Hyperbole BS aux deux extrémités A, a , du second. Il est donc évident que les deux droites CG, Cg , parallèles à Ab, AB , indéfiniment prolongées de part & d'autre du centre C , sont non seulement les asymptotes des Hyperboles opposées AM, am ; mais aussi des deux autres BS, bs , qui leur sont conjuguées.

PROPOSITION XVI.

Théorème.

133. SI l'on mène par un point quelconque H d'une asymptote CG commune aux deux Hyperboles AM, BS , une parallèle MS à l'autre asymptote Cg ; je dis qu'elle rencontrera ces deux Hyperboles en des points M, S , qui sont également éloignés de part & d'autre du point H .

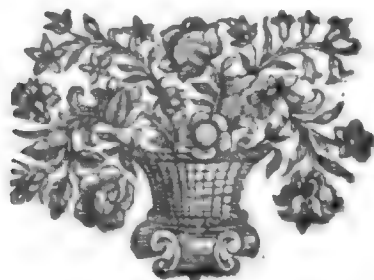
Car, 1^o. La ligne MS rencontrera * chacune des Hyperboles AM, BS , en un point. * *Art. 104.* 2^o. A cause de l'Hyperbole AM , le rectangle * $CH \times HM = CG \times GA$; & * *Art. 101.* à cause de l'Hyperbole BS , le rectangle $CH \times HS = CG \times GB$. Donc, puisque * $GB = GA$, il s'ensuit que * *Art. 88.* $CH \times HS = CH \times HM$; Et qu'ainsi $HS = HM$. Ce qu'il falloit démontrer.

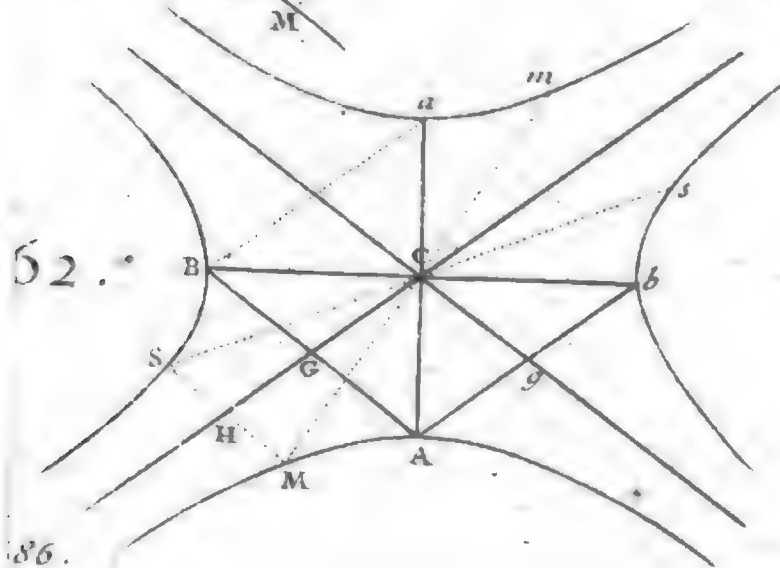
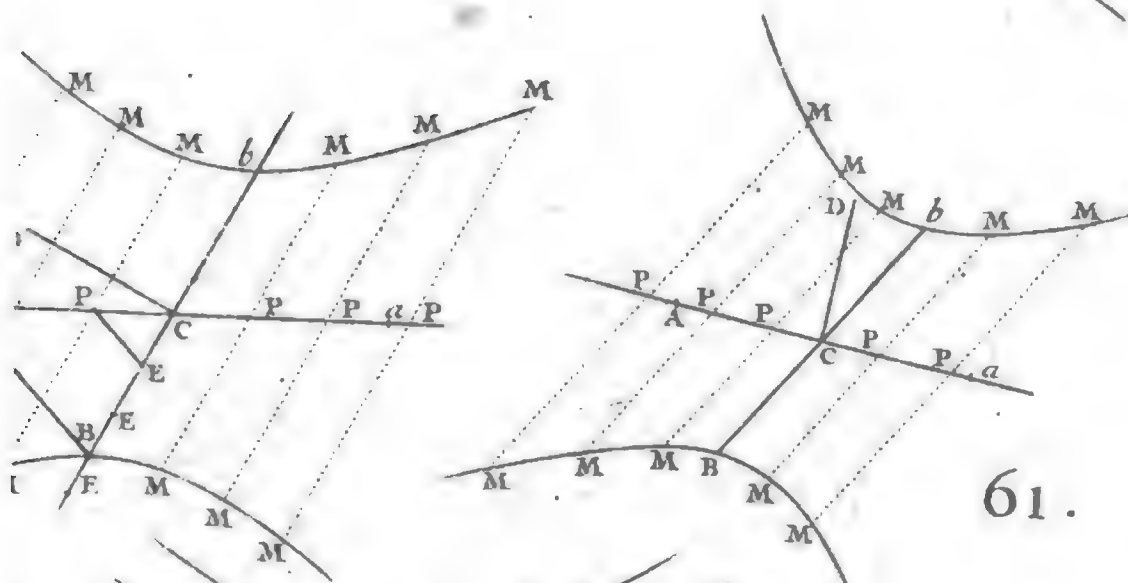
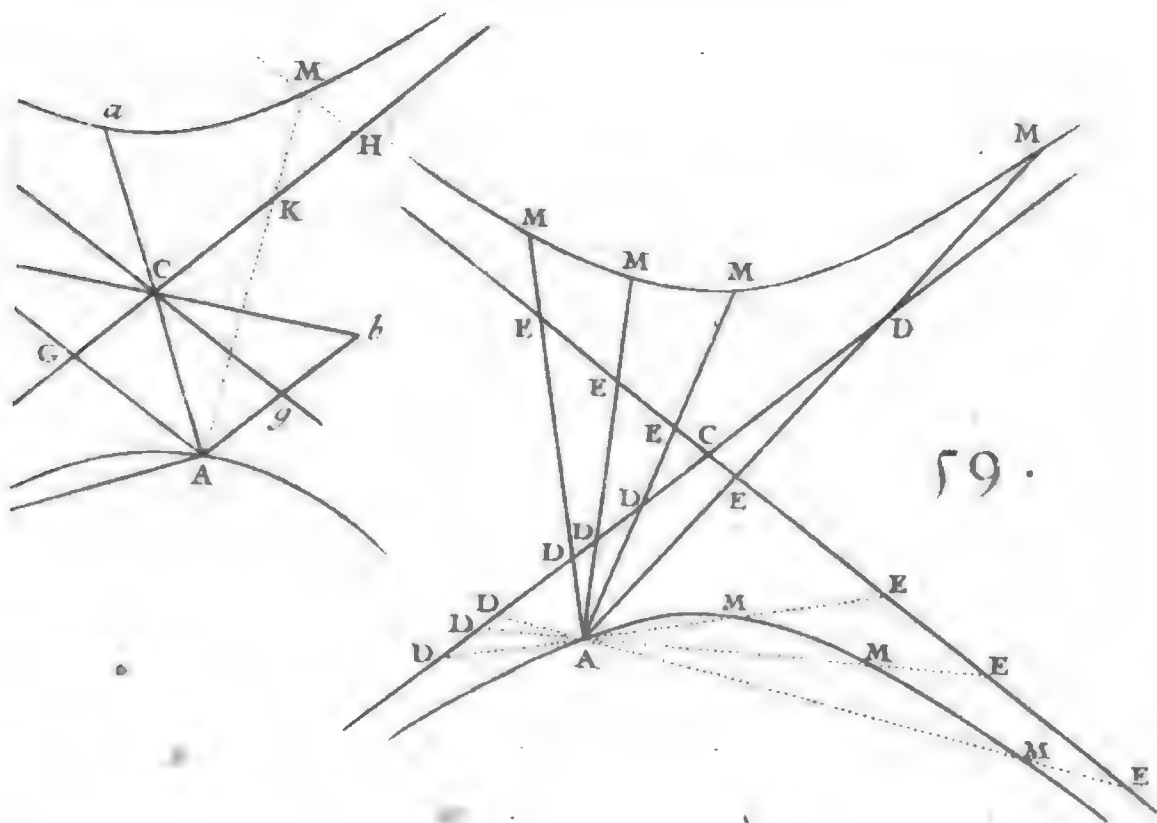
COROLLAIRE I.

134. **S**_i l'on mene des points M, S , des deux Hyperboles AM, BS , les diametres MCm, SCs , terminés par les deux autres Hyperboles am, bs ; il est clair * que le diametre Ss sera le second diametre conjugué au premier Mm des deux Hyperboles opposées AM, am ; & réciproquement que le diametre Mm sera le second diametre conjugué au premier Ss des deux Hyperboles opposées BS, bs . D'où l'on voit que deux diametres conjugués quelconques Mm, Ss , de deux Hyperboles opposées AM, am , sont aussi deux diametres conjugués des deux autres Hyperboles BS, bs , qui leur sont conjuguées; avec cette difference que le premier diametre Mm devient le second, & qu'au contraire le second Ss devient le premier.

COROLLAIRE II.

135. **D**E LA il est manifeste que les Hyperboles conjuguées BS, bs , aux deux AM, am , passent par les extrémités S, s , de tous les seconds diametres SCs de ces Hyperboles: & réciproquement que les Hyperboles AM, am , passent par les extrémités M, m , de tous les seconds diametres MCm des deux Hyperboles BS, bs , qui leur sont conjuguées.





LIVRE QUATRIÈME.

Des trois Sections Coniques.

DÉFINITION.

ON entend par le terme general de *Section Conique*, chacune des trois lignes Courbes dont l'on vient de parler dans les Livres précédens; sçavoir, la *Parabole*, l'*Ellipse*, l'*Hyperbole* ou les *Hyperboles opposées*.

PROPOSITION I.

Theorème.

136. SI par l'extrémité *A* d'un diamètre quelconque *Aa* d'une Ellipse, ou d'un premier diamètre *Aa* d'une Hyperbole, l'on mene une parallèle *AG* à ses ordonnées *PM*, qui soit égale à son paramètre; & qu'on tire de l'autre extrémité *a*, la droite *aG*, qui coupe en *O* une ordonnée quelconque *PM* prolongée s'il est nécessaire: je dis que le quarré de l'ordonnée *PM* est égal au rectangle de *AP* par *PO*. FIG. 63. & 64.

Il faut prouver que $\overline{PM}^2 = AP \times PO$.

Selon les articles 41 & 55. du second Livre, 81. & 118. du troisième, on aura $Aa. AG :: AP \times Pa. \overline{PM}^2$. Or à cause des triangles semblables aAG , aPO , il vient $Aa. AG :: Pa. PO :: AP \times Pa. AP \times PO$. Donc $\overline{PM}^2 = AP \times PO$. Ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE.

137. DE-LA il est évident que le quarré d'une ordonnée quelconque *PM* à un diamètre *Aa*, est toujours moindre dans l'Ellipse, & toujours plus grand dans l'Hyperbole, que le rectangle fait du paramètre *AG*

par la partie AP de ce diamètre, prise entre son origine ou extrémité A , & la rencontre P de l'ordonnée ;
 *Art. 7. & au lieu que dans la Parabole * ils sont égaux. Or c'est à
 20. cause de cette propriété, que Apollonius, surnommé le
 FIG. 65. Grand Geometre, a imposé aux Sections Coniques les noms
 que nous avons marqués : car il a voulu donner à enten-
 dre par celui de *Parabole*, la justesse ou exactitude ; par
 celui d'*Ellipse*, le défaut ou manquement ; & par celui
 d'*Hyperbole*, l'excès qui se trouve dans la comparaison
 des quarrés des ordonnées PM avec les rectangles cor-
 respondans $AP * AG$.

PROPOSITION II.

Theorème.

FIG. 66. & 138. DANS une Ellipse tout diamètre Aa , & dans les
 67. Hyperboles opposées tout premier diamètre Aa est divisé en
 deux également par le centre C , & ne rencontre la Section
 qu'en deux points.

On a démontré cette Proposition dans les articles 50
 du second Livre ; 96 & 103 du troisième.

PROPOSITION III.

Theorème.

139. IL ne peut y avoir qu'une seule tangente LAL qui
 passe par un point donné A sur une Section Conique.

Cette Proposition se trouve démontrée dans les arti-
 cles 21 du Livre premier ; 56 du Livre second ; & 107
 du troisième.

PROPOSITION IV.

Theorème.

140. LES tangentes LAL , laI , qui passent par les
 extrémités A , a , d'un diamètre quelconque d'une Ellipse, ou de
 deux

deux Hyperboles opposées ; sont parallèles entr'elles.

Ceci a été démontré dans les articles 44 & 55 du Livre second ; & 110 du Livre troisième.

PROPOSITION V.

Theorème.

141. **U**N diamètre quelconque étant donné dans l'Ellipse ou dans les Hyperboles opposées ; je dis que la position du diamètre qui lui est conjugué , est déterminée de manière qu'il ne peut y en avoir qu'une seule.

Car 1^o. Si la Section est une Ellipse , ou qu'étant les Hyperboles opposées le diamètre donné Aa soit un premier diamètre ; il est clair selon l'article 56 du Livre second , & la définition 13^e du troisième Livre , que son conjugué Bb sera parallèle à la tangente LAL , qui passe par l'une de ses extrémités A . Donc * &c.

* Art. 139.

2^o. Si la Section étant les deux Hyperboles opposées , le diamètre donné Bb est un second diamètre ; la chose a été démontré dans l'article 115 du troisième Livre.

COROLLAIRE.

142. **I**L est donc évident qu'une Section Conique étant donnée avec un de ses diamètres , la position des ordonnées à ce diamètre , sera déterminée de manière que chacune n'en peut avoir qu'une seule , & qu'elles sont toutes parallèles entr'elles. Car elles doivent être parallèles dans la Parabole * à la tangente qui passe par l'origine du diamètre donné , & dans les autres * Sections au diamètre conjugué au diamètre donné.

* Art. 11.

* Def. 12, II.

& 14, III.

PROPOSITION VI.

Theorème.

143. **D**ANS une Ellipse tout diamètre Aa , & dans les Hyperboles opposées tout premier diamètre Aa , divise la Section en des portions AM , $a m$, qui étant prises de part M .

& d'autre de ce diamètre dans des positions contraires, sont parfaitement semblables & égales entr'elles.

Car ayant pris sur le diamètre Aa (prolongé lorsqu'il s'agit des Hyperboles opposées,) de part & d'autre du centre C deux parties quelconques CP , Cp , égales entr'elles; & mene de part & d'autre les ordonnées PM , pm , il est clair que ces ordonnées sont * égales entr'elles, * *Art. 45. 55. 85 & 118.* & que les angles CPM , Cpm , sont * égaux. Si donc l'on conçoit que le plan Cpm séparé de celui qu'on voit ici, soit placé de l'autre côté du diamètre Aa dans une position contraire, en sorte que la droite Cp tombe sur CP , & pm , sur PM ; il est visible que le point a tombera * sur le point A , & le point m sur le point M . Et comme cela arrivera toujours de quelque grandeur qu'on puisse prendre les parties CP , Cp ; il s'ensuit que tous les points m de la portion am , tomberont exactement sur tous les points M de la portion AM ; & qu'ainsi ces deux portions se confondront l'une avec l'autre. Ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION VII.

Theorème.

FIG. 68. 69. 144. *Si l'on mene par un point quelconque P d'un diamètre Aa d'une Section Conique (prolongé lorsque la Section étant une Hyperbole, c'est un premier diamètre) une parallèle MPM aux ordonnées à ce diamètre; je dis qu'elle rencontrera la Section en deux points M, M, également éloignés de part & d'autre du point P, & non en davantage: Et réciproquement que si une ligne MM terminée par une Section Conique, est coupée en deux également par un diamètre Aa en un point P, autre que le centre, elle sera parallèle aux ordonnées à ce diamètre.*

Ceci a été démontré dans les articles 9, 11 & 20 du Livre premier; 43, 45 & 55 du Livre second; 83, 85 & 118 du Livre troisième.

COROLLAIRE I.

145. **D**E LA il est manifeste que si une ligne quelconque MM terminée par une Section Conique, est coupée en deux également par un diamètre Aa en un point P autre que le centre; toutes les parallèles à cette ligne terminées par la Section, le seront aussi.

PROPOSITION VIII.

Problème.

146. **U**NE Section Conique étant donnée, en trouver un diamètre.

Ayant mené deux droites MM , NN , parallèles entr'elles, & terminées par la Section; on tirera par leurs points de milieu P , Q , une ligne droite Aa qui sera un diamètre.

Car * le diamètre qui passe par le point P milieu de * *Art. 145.* MM , doit aussi passer par le point Q milieu de NN .

COROLLAIRE I.

147. **S**i l'on mene en même sorte un autre diamètre quelconque Dd ; il est clair que la Section Conique sera une parabole * lorsque Dd est parallèle à Aa ; une Ellipse * lorsque Dd rencontre Aa au dedans de la Section; & * *Def. 7, I.* * *Def. 9, II.* enfin une Hyperbole * ou les Hyperboles opposées lorsque les diamètres Dd , Aa , se rencontrent en un point C hors de la Section; & dans ces deux derniers cas que le point de rencontre C est le centre. Cela est une suite des définitions des diamètres de ces trois lignes courbes. * *Def. 9, III.*

Lorsque l'Ellipse est donnée toute entière, il suffit pour avoir le centre de mener un diamètre Aa ; car la grandeur étant déterminée par la rencontre de l'Ellipse; il n'y a * qu'à le diviser par le milieu en C . Il en est de même * *Art. 30.* lorsque * les Hyperboles opposées sont données. * *Art. 26.*

COROLLAIRE II.

148. **D**E LA il suit qu'une Section Conique étant donnée, avec un point O sur le même plan, on peut toujours mener un diamètre Dd qui passe par ce point. Car il ne faut dans la Parabole que mener par le point donné, O une parallèle Dd à un diamètre quelconque Aa ; & dans l'Ellipse, ou dans l'Hyperbole, ou dans les Hyperboles opposées, une ligne droite Dd qui passe par le point donné O , & par le centre C que l'on aura trouvé par le Corollaire précédent.

COROLLAIRE III.

149. **D**E LA il est évident qu'une ligne droite MM , ne peut rencontrer une Section Conique qu'en deux points M, M ; & jamais en davantage. Car si l'on mène par le point de milieu P de la ligne MM un diamètre Aa , il est clair selon l'article 144, qu'elle sera parallèle aux ordonnées à ce diamètre; d'où il suit selon le même article qu'elle ne peut rencontrer la Section qu'aux deux points M, M .

Si la ligne droite passoit par le centre C ; on auroit recours à l'article 138. où cela a déjà été démontré.

COROLLAIRE IV.

150. **U**NE Ellipse ou une Hyperbole (*fig. 69 70*) étant donnée; trouver deux de ses diamètres conjugués Aa, Bb ; & de plus mener les asymptotes CG, Cg , lorsque c'est une Hyperbole.

Ayant trouvé un diamètre Aa par le moyen des deux parallèles MM, NN , & mené par le centre C une parallèle Bb , à ces deux lignes: il est clair * que les diamètres Aa, Bb , seront conjugués; puisque les lignes MM, NN , étant coupées en deux également par le diamètre Aa aux points P, Q , seront * ordonnées de part & d'autre à ce diamètre.

* *Def. 12, II.*

* *Art. 144.*

Maintenant pour mener (*fig. 70.*) les asymptotes CG , Cg ; on fera $AP \times Pa. PM :: CA. CB$ ou Cb . ou (ce qui est la même chose) comme la moyenne proportionnelle entre AP , Pa , est à PM , de même CA est à CB ou Cb . Et ayant tiré les droites AB , Ab , on leur menera par le centre C les parallèles indéfinies Cg , CG , qui seront les asymptotes cherchées. Car il est clair que Bb sera * la grandeur du second diamètre conjugué au * *Art. 81. &* premier Aa ; & le reste est évident selon les définitions 118. 13 & 14 du troisième Livre.

PROPOSITION IX.

Problème.

151. **U**NE Section Conique étant donnée, avec un de ses diamètres Aa ; trouver la position des ordonnées PM à ce diamètre.

Ayant mené deux parallèles au diamètre donné Aa , *Fig. 68. 69. 70. 71.* qui en soient également éloignées de part & d'autre, & qui rencontrent la Section en des points M , M ; je dis que la ligne MM qui coupe le diamètre donné au point P , est ordonnée de part & d'autre à ce diamètre, pourvu que le point P ne tombe point sur le centre.

Car par la construction la ligne MM sera coupée en deux également par le diamètre Aa au point P ; & par conséquent elle sera * ordonnée de part & d'autre à ce * *Art. 144.* diamètre.

On peut toujours par cette manière trouver la position d'une ordonnée PM à un diamètre donné Aa . Car 1°. Dans la Parabole & l'Hyperbole (*fig. 68. & 70.*) lorsque le diamètre donné Aa est un premier diamètre; il est clair qu'à quelque distance qu'on mene de part & d'autre les deux parallèles au diamètre Aa , elles rencon * *Art. 10. 20.* treront chacune la Section en un point M ; puisque * la 84. & 118. Section s'éloigne toujours de plus en plus à l'infini du diamètre Aa . 2°. Dans l'Ellipse (*fig. 69.*), & dans les Hyperboles opposées (*fig. 71.*) lorsque le diamètre donné

M iij

Aa est un second diamètre : il est clair qu'on peut toujours mener deux parallèles de part & d'autre du diamètre Aa , qui coupent la Section chacune en un point M , en sorte que la ligne MM rencontre le diamètre donné Aa en un point P autre que le centre ; puisque
 * *Art.* 44. dans l'Ellipse * les ordonnées du diamètre Aa vont toujours
 & 55. en diminuant depuis le centre C jusqu'en A , &
 * *Art.* 84. qu'au contraire dans les Hyperboles opposées * elles vont
 & 118. toujours en augmentant à mesure qu'elles s'éloignent du centre C .

COROLLAIRE I.

152. **D**E-LA on tire (*fig.* 68, 69, 70.) une nouvelle manière de mener une tangente par un point donné A sur une Section Conique donnée. Car * ayant mené par ce point un diamètre Aa , & trouvé une double ordonnée
 * *Art.* 148. MPM à ce diamètre ; il est clair * que si l'on mène par
 * *Art.* 10, 20, M P M à ce diamètre ; il est clair * que si l'on mène par
 44, 55, 84. le point A une parallèle à MM , elle sera tangente
 118. & *Def.* en A .
 9, I. 12, II.
 7, III.

COROLLAIRE II.

153. **D**E-LA on voit encore comment une Ellipse ou les Hyperboles opposées (*fig.* 69, 70, 71.) étant données avec un de leurs diamètres quelconques Aa ; on peut trouver le diamètre Bb qui lui est conjugué. Car il n'y a qu'à mener par le centre C une parallèle Bb aux ordonnées à ce diamètre.

Ou bien ; soit Bb le diamètre donné, & qu'il faille trouver son conjugué Aa . Ayant tiré MM parallèle à Bb & terminée par la Section, on menera par son point de milieu P , & le milieu C de Bb , le diamètre cherché Aa .

COROLLAIRE III.

154. **U**NE Hyperbole MAM (*fig.* 70.) étant donnée, avec un de ses seconds diamètres Bb de position ; en terminer la grandeur, & trouver en même temps la position de ses ordonnées.

DES TROIS SECTIONS CONIQUES. 95

On cherchera le premier diamètre Aa conjugué au second Bb , par le moyen de la seconde manière du Corollaire précédent ; & ayant fait $AP \times Pa, \overline{PM} :: \ast$ Art. 82. $\overline{CA} \cdot \overline{CB}$ ou \overline{Cb} . Il est clair \ast que Bb sera la grandeur \odot 118. du second diamètre Bb , & que ses ordonnées seront parallèles au diamètre Aa .

PROPOSITION X.

Problème.

155. D'UN point donné T hors une Section Conique donnée, mener deux tangentes TM, TM , à cette Section. FIG. 72. 73. 74.

POUR LA PARABOLE.

Ayant mené (fig. 72.) par le point donné T \ast un diamètre qui rencontre la Parabole au point A , & pris la partie AP égale à AT ; on tirera par le point P \ast une \ast Art. 151. parallèle aux ordonnées qui rencontrera \ast la Parabole \ast Art. 144. en deux points M, M ; par lesquels & par le point donné T on tirera les droites TM, TM , qui seront \ast les \odot 25. tangentes cherchées.

POUR L'ELLIPSE.

Ayant mené (fig. 73.) par le point donné T \ast le diamètre Aa , & pris CP troisième proportionnelle à CT, CA ; on menera par le point P , une parallèle aux ordonnées qui rencontrera \ast l'Ellipse en deux points M, M ; \ast Art. 144. par lesquels & par le point donné T on tirera les droites TM, TM , qui seront \ast les tangentes cherchées. \ast Art. 57. \odot 58.

POUR L'HYPÉRBOLE & LES HYPÉRBOLES OPPOSÉES.

Ayant mené (fig. 74.) par le point donné T , \ast le diamètre Aa , dont on déterminera la grandeur \ast s'il est un \ast Art. 154. second diamètre ; on prendra CP troisième proportion-

nelle à CT , CA (du même côté du point donné T , par rapport au centre, lorsque ce point tombe dans l'un des angles faits par les asymptotes ; & du côté opposé, lorsqu'il tombe dans l'un des angles à côté) : & l'on mène par le point P une parallèle aux ordonnées qui ren-

* *Art. 144.* contrera * l'Hyperbole ou les Hyperboles opposées en deux points M , M ; par lesquels & par le point donné
 * *Art. 121.* T , on tirera les droites TM , TM , qui seront * les tangentes cherchées.

Si le point donné tomboit sur le centre C , les deux
 * *Art. 108.* tangentes seroient alors * les asymptotes CG , Cg , & on les tireroit comme l'on a enseigné dans l'art. 150. Et enfin si le point donné tomboit sur une asymptote comme en S , on tireroit par le point H milieu de CS , une parallèle
 * *Art. 104.* HM à l'autre asymptote CG , laquelle rencontreroit * l'Hyperbole en un point M , par où & par le point donné
 * *Art. 107.* S , on tireroit une droite SM qui seroit * une des tangentes cherchées ; & l'autre seroit l'asymptote même Cg sur laquelle se trouve le point donné S .

COROLLAIRE I.

156. **C**OMME la ligne MPM parallèle aux ordonnées rencontre toujours * la Section en deux points M ,
 * *Art. 144.* M , également éloignés de part & d'autre du point P , & non en davantage ; il s'ensuit qu'on ne peut mener d'un point donné T hors une Section Conique que les deux tangentes TM , TM . D'où il est évident que le diamètre qui passe par le point de rencontre T de deux tangentes, coupe par le milieu en P la ligne MM qui joint les points touchans ; & réciproquement que le diamètre qui coupe par le milieu en P une ligne droite MM qui joint les points touchans de deux tangentes MT , MT , passe par leur point de rencontre T .

COROL. II.

COROLLAIRE II.

157. **T**OUTES les tangentes de la Parabole (*fig. 72.*) se rencontrent deux à deux, étant prolongées autant qu'il est nécessaire. Car si l'on joint deux points touchans quelconques M, M , par une ligne droite, & qu'après l'avoir coupée par le milieu en P , on prenne sur le diamètre qui passe par ce point, & qui rencontre la Parabole en A , la partie AT égale à AP ; il est clair que les deux tangentes MT, MT , qui passent par les points M, M , se rencontreront en ce point T .

COROLLAIRE III.

158. **I**L est encore évident (*fig. 74.*) que toutes les tangentes d'une Hyperbole se rencontrent deux à deux, étant prolongées autant qu'il est nécessaire; & toujours au dedans de l'angle fait par les asymptotes. Car si l'on joint deux points touchans quelconques M, M , par une ligne droite, & qu'après l'avoir coupée par le milieu en P , on prenne sur le diamètre qui passe par ce point & qui rencontre l'Hyperbole en A , la partie CT troisième proportionnelle à CP, CA ; il est clair que les deux tangentes MT, MT , se rencontreront en ce point T , lequel sera toujours * au dedans de l'angle fait par les * *Art. 103.* asymptotes, puisque le demi-diamètre CA tombe au dedans de cet angle.

COROLLAIRE IV.

159. **T**OUTES les tangentes d'une Ellipse ou des Hyperboles opposées (*fig. 73. 74.*) se rencontrent deux à deux, lorsque la ligne qui joint les deux points touchans ne passe point par le centre: sçavoir, celles de l'Ellipse du même côté du centre par rapport à cette ligne, & celles des Hyperboles opposées de l'autre côté. Cela se prouve par le moyen de la Proposition cy-dessus,

N

comme l'on vient de faire voir dans les deux Corollaires précédens.

PROPOSITION XI.

Problème.

160. **U**NE Section Conique étant donnée, en trouver un diamètre qui fasse de part ou d'autre avec ses ordonnées des angles égaux à un angle donné.

POUR LA PARABOLE.

* Art. 146. Ayant trouvé * un de ses diamètres AP , on menera
FIG. 75. 76. par son origine A , la ligne AN , qui fasse avec AP de part ou d'autre l'angle PAN égal à l'angle donné, & qui rencontre la Parabole au point N . Ayant divisé AN par le milieu en O , & tiré OM parallèle à AP ; je dis que la ligne MO est le diamètre qu'on cherche.

Car 1°. Tous les diamètres d'une Parabole devant être parallèles entr'eux, selon la définition septième du premier Livre, il s'ensuit que MO sera un diamètre; puisque AP en est un.

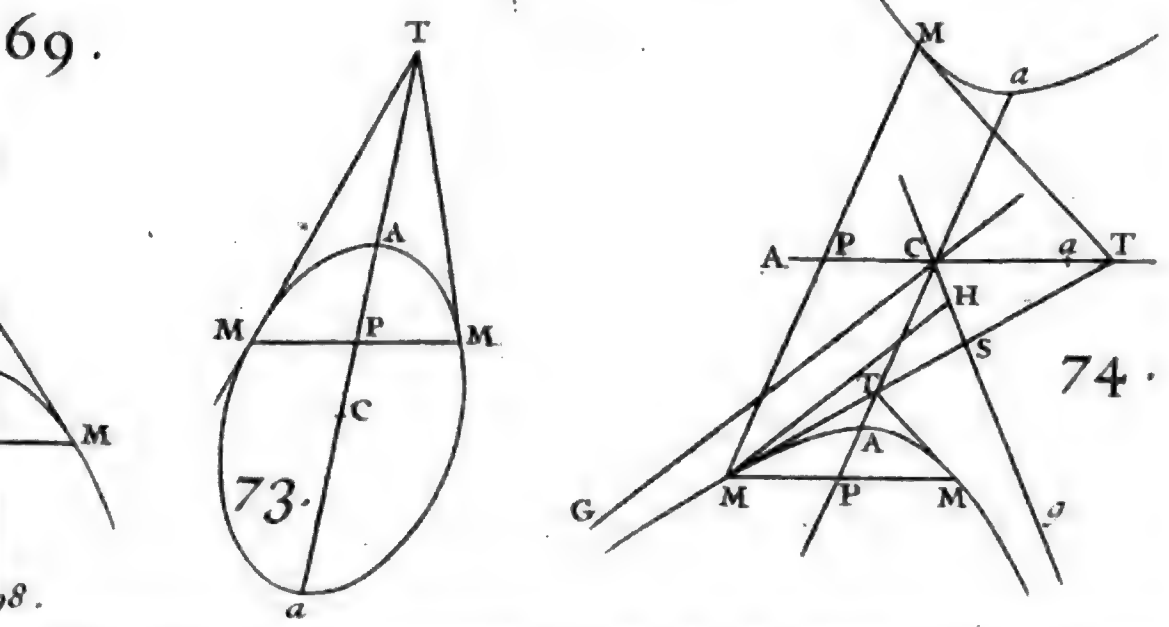
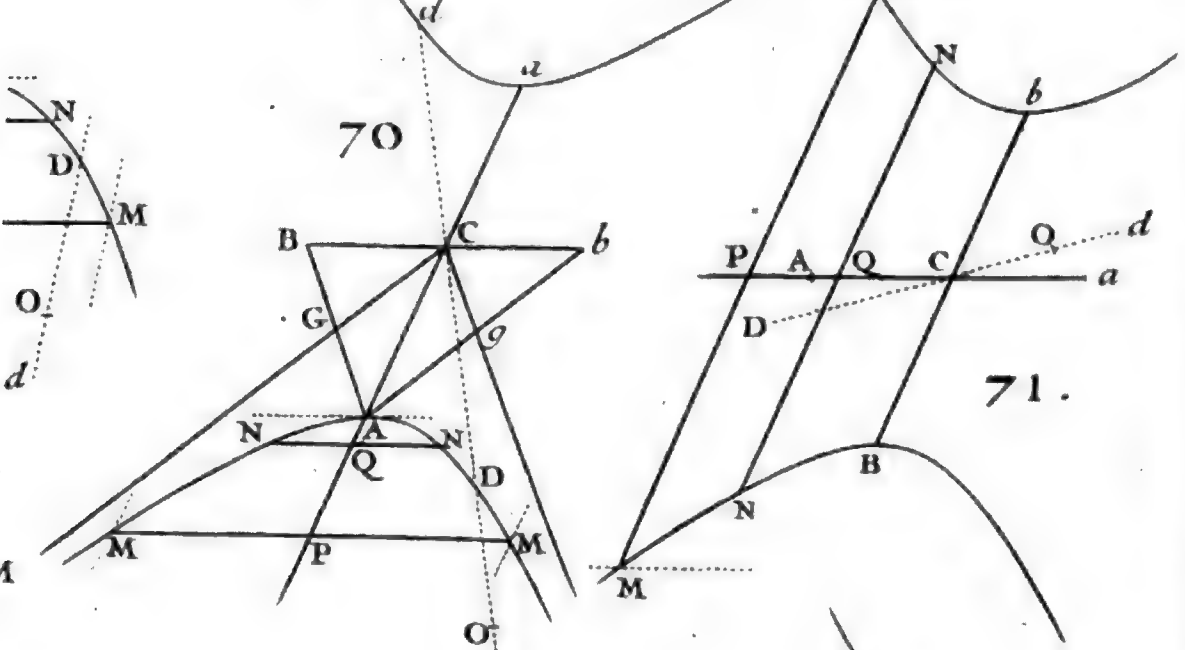
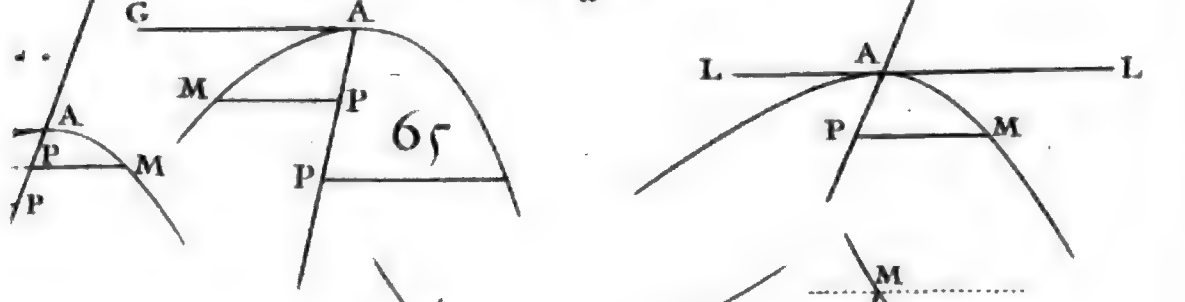
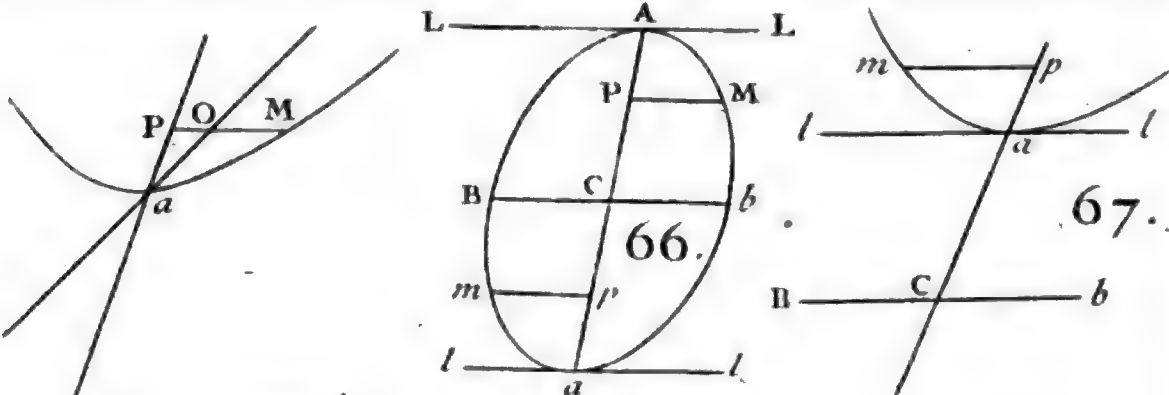
2°. La ligne AN terminée par la Parabole étant coupée en deux parties égales par le diamètre MO , elle lui
* Art. 144. sera * ordonnée de part & d'autre.

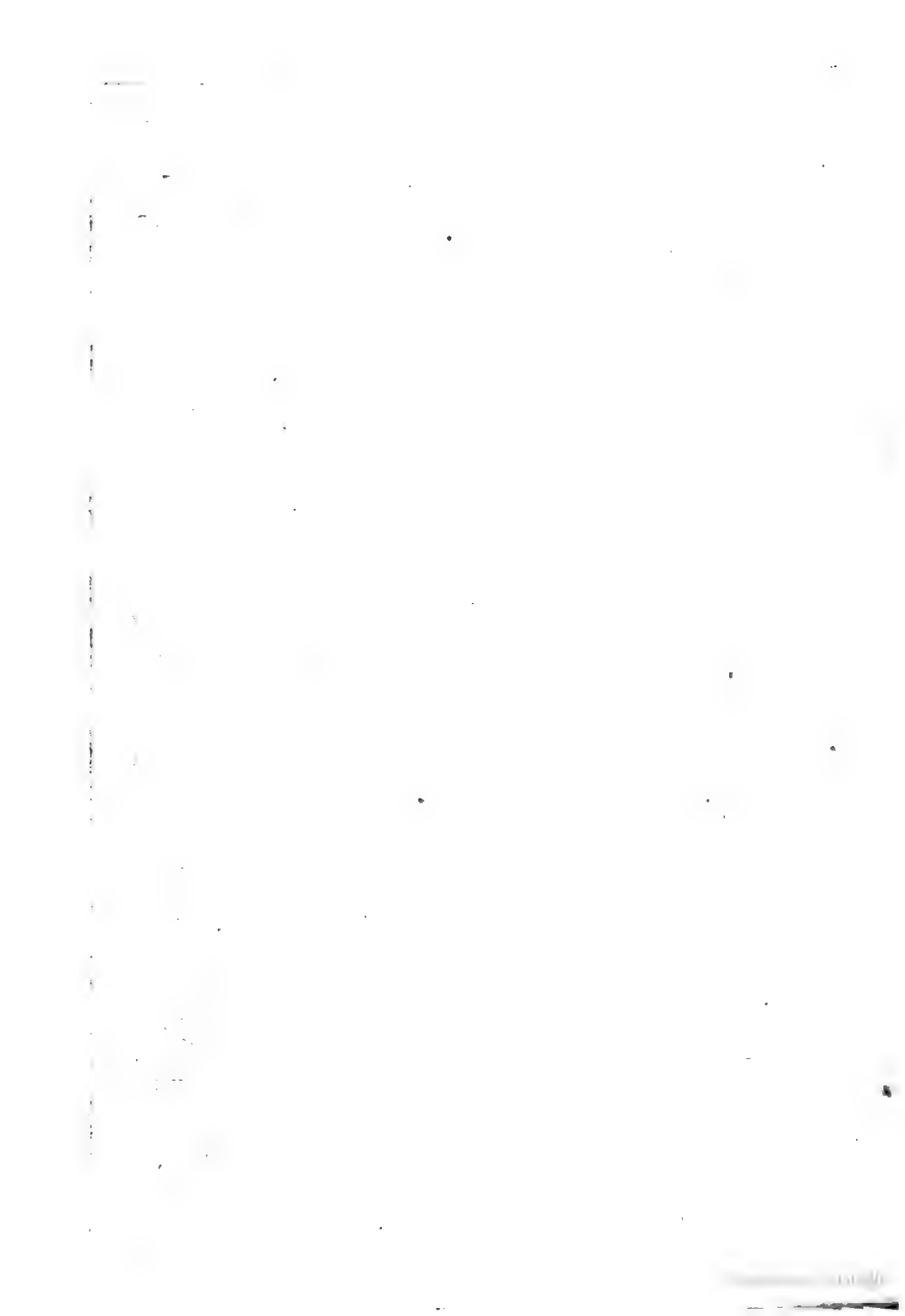
3°. A cause des parallèles MO , AP , l'angle MOA que fait le diamètre MO avec son ordonnée OA , sera égal à l'angle PAN qui a été fait égal à l'angle donné. Donc &c.

Si l'angle donné est droit, il est manifeste que le dia-
* Art. 23. mètre MO qu'on trouvera par cette methode sera * l'axe de Parabole.

POUR LES AUTRES SECTIONS.

* Art. 146. Ayant trouvé * un de leurs diamètres Aa , & décrit
FIG. 77. 78. sur ce diamètre de part ou d'autre un arc de cercle ANa
79. 80. capable de l'angle donné ou de son complément à deux droits; on menera du point N où il rencontre la Sec-





tion aux deux extrémités A, a , du diamètre Aa , les lignes NA, Na ; par les milieux desquelles O, Q , & par le centre C , on tirera deux diamètres, Mm, Ss . Je dis que chacun de ses diamètres fera de part ou d'autre avec ses ordonnées des angles égaux à l'angle donné.

Car la ligne AN terminée par la Section, étant coupée en deux également au point O par le diamètre Mm , elle sera * ordonnée de part & d'autre à ce diamètre. * *Art. 144.* Or le diamètre Mm est parallèle à la ligne Na , puisqu'il divise par le milieu aux points C, O , les lignes Aa, AN ; & partant l'angle mOA que fait le diamètre Mm avec son ordonnée AO , sera égal à l'angle ANa , qui par la construction est égal à l'angle donné, ou à son complément à deux droits. On prouvera de même que le diamètre Ss fait avec son ordonnée QN un angle égal à l'angle donné, ou à son complément à deux droits. Donc &c.

Il est visible 1°. Que le diamètre Ss est * conjugué au * *Def. 12. II.* diamètre Mm ; puisqu'il est parallèle à son ordonnée & 14. III. ON . 2°. Que les diamètres conjugués Mm, Ss , deviennent * les deux axes, lorsque l'angle donné est droit. * *Art. 38.* & 128.

PROPOSITION XII.

Problème.

161. **U**N diamètre d'une Section Conique étant donné, avec son paramètre, & la position de ses ordonnées, & sachant de plus si c'est un premier ou second diamètre lorsqu'il s'agit de l'Hyperbole; décrire la Section par une méthode uniforme pour toutes les trois.

PREMIERE MANIERE.

' Pour la Parabole. Ayant trouvé *, l'axe AP , son ori- * *Art. 27.* gine A , & son paramètre AG que l'on prendra sur l'axe *Fig. 81.* prolongé du côté de son origine; on menera par le point G une ligne droite indéfinie DD perpendiculaire à PG .

N ij

On fera mouvoir ensuite une ligne droite indéfinie DM le long de GD toujours parallèlement à AG , en entraînant par son extrémité D le côté DA de l'angle droit DAM , mobile sur son sommet A autour de l'origine A de l'axe AP . Je dis que l'intersection continuelle M de la ligne DM & du côté AM , décrira dans ce mouvement la Parabole qu'on demande.

Car menant MP perpendiculaire à l'axe, les triangles rectangles AGD , MPA , seront semblables; puisque chacun des angles GAD , PMA , étant joint à l'angle PAM , vaut un droit. On aura donc AG . GD ou $PM :: PM$. AP . D'où il suit que $\overline{PM} = GA * AP$; & qu'ainsi PM est une * ordonnée à l'axe AP .

On a déjà donné cette construction dans le Livre premier article 29, d'une manière qui convient à tous les diamètres: On ne la repete ici, & on ne la restreint à l'axe, que pour en faire voir la liaison & le rapport qu'elle a avec celle qu'on va donner pour les autres Sections.

Pour les autres Sections. Ayant trouvé entre le diamètre donné & son parametre une moyenne proportionnelle, & l'ayant placée en sorte qu'elle soit parallèle aux ordonnées, & coupée en deux également par le centre; il est clair * qu'on aura deux diametres conjugués; par le moyen desquels on cherchera * les deux axes, & ensuite le parametre de celui des deux qu'on voudra dans l'Ellipse, & du premier dans l'Hyperbole. Cela fait.

FIG. 82. 83. On prolongera dans l'Ellipse, & on coupera dans l'Hyperbole l'axe Aa en G ; en sorte que aG soit à GA , comme l'axe Aa est à son parametre. Ayant tiré par le point G une perpendiculaire indéfinie DD à l'axe Aa , on fera mouvoir le point D le long de cette ligne, en entraînant avec lui la ligne droite Da mobile autour de l'extrémité a de l'axe Aa , & le côté DA de l'angle droit DAM mobile sur son sommet A autour de l'autre extrémité A de l'axe Aa . Je dis que l'intersection

* Def. 13. II.

☞ 15. III.

* Art. 64.

☞ 128.

continue M des lignes AM , aD , décrira dans ce mouvement la Section requise.

Car menant MP perpendiculaire sur l'axe Aa , les triangles semblables aPM , aGD , donnent $aP. PM :: aG. GD$. Or les triangles rectangles AGD , MPA , sont semblables ; puisque chacun des angles GAD , $PM A$; étant joint à l'angle PAM , vaut un droit ; Et partant $AP. PM :: GD. GA$. Si donc l'on multiplie les Antecedens & les Consequens des deux premières raisons , par ceux de ces deux dernières ; on aura $aP \times PA. PM :: aG \times GD. GD \times GA :: aG. GA$, c'est à dire, comme l'axe Aa est à son parametre. Donc * &c.

* Art. 41.
 & 81.

Il est à remarquer que plus le point D s'éloigne du point G sur la ligne DD ; plus l'angle PaM augmente, & plus au contraire l'angle PAM diminue ; de sorte que les lignes aM , AM , deviennent paralleles dans l'Hyperbole, & se coupent ensuite de l'autre côté de la ligne DD , où elles décrivent par leur intersection continue l'Hyperbole opposée.

Si l'on conçoit dans l'Ellipse & dans l'Hyperbole, que le point a s'éloigne à l'infini du point A , ou (ce qui est la même chose) que l'axe Aa devienne infiniment grand ; les lignes GA , Da , qui ne se rencontrent que dans l'infini, peuvent être regardées comme paralleles ; ainsi cette dernière construction retombe dans le cas de la précédente. C'est pourquoi l'Ellipse ou l'Hyperbole deviendrait alors une Parabole qui auroit pour parametre la ligne AG ; & par conséquent on peut regarder une Parabole, comme une Ellipse ou une Hyperbole dont l'axe est infini : sçavoir, le premier dans l'Hyperbole, & celui des deux qu'on voudra dans l'Ellipse.

SECONDE MANIÈRE.

Pour la Parabole. Soit un triangle isoscèle HAL , FIG. 84. dont l'un des côtés AH soit situé sur le diametre donné AP prolongé indéfiniment de part & d'autre de son

origine A , & l'autre côté AL sur la tangente indéfinie LAL qui passe par le point A . Soit conçue la base HL se mouvoir toujours parallèlement à elle même en entraînant par l'une de ses extrémités L la ligne indéfinie LM parallèle à AP , & par l'autre extrémité H la ligne HF parallèle à AL & égale au paramètre donné du diamètre AP , laquelle entraîne aussi par son extrémité F la droite FA mobile autour du point fixe A . Je dis que l'intersection continuelle M des deux droites FA , LM , décrit pendant que la ligne HL se meut dans l'angle HAL & son opposé ou sommet, la Parabole MAM qu'on demande.

Car menant l'ordonnée MP au diamètre AP , les triangles semblables AHF , APM , donnent $\frac{AH}{AL} = \frac{PM}{AP}$ ou $AP \cdot PM = AL \cdot AH$. $HF :: AP \cdot PM$, & prenant $\frac{PM}{AP} =$

* Art. 7. & 10. $AP \cdot HF$. Donc * &c.

On doit observer que le point H doit tomber au delà de l'origine A du diamètre AP ; lorsque les points F , L , tombent de part & d'autre de ce diamètre.

FIG. 85 86. Pour les autres Sections. La construction est la même que pour la Parabole, à l'exception que la ligne LM doit tourner autour de l'autre extrémité a du diamètre donné Aa ; au lieu que dans la Parabole elle lui est parallèle. On suppose dans l'Hyperbole que le diamètre donné est un premier diamètre; car si c'étoit un second, on trouveroit selon l'article 115 du Livre troisième, le premier qui lui est conjugué & son paramètre.

Car menant MP ordonnée au diamètre Aa , les triangles semblables aPM , aAL , & APM , AHF , donnent $aP \cdot PM :: aA \cdot AL$ ou AH . Et $AP \cdot PM :: AH \cdot HF$. Et partant, si l'on multiplie les Antecedens & les Consequens des deux premières raisons par ceux des deux secondes, on aura $aP \cdot PA \cdot PM :: aA \cdot AH$.

* Art. 41. & 55. $AH \cdot HF :: aA \cdot HF$. Donc * &c.

§ 1. & 118. Il faut observer que les points H , a , doivent tomber de part & d'autre du point A dans l'Ellipse, & du même côté dans l'Hyperbole, lorsque les points F , L , tom-

bent de part & d'autre du diamètre Aa .

COROLLAIRE I.

162. **D**E LA on voit comment un diamètre Aa étant donné avec une de ses ordonnées PM ; on peut trouver son paramètre HF . Car 1°. Dans la Parabole on FIG. 84.
prendra sur le diamètre AP la partie AH égale à PM ; & ayant tiré la ligne HF parallèle à PM , & terminée en F par la ligne AM tirée de l'origine A du diamètre par l'extrémité M de l'ordonnée ; il est clair que cette ligne HF sera le paramètre du diamètre AP .

2°. Dans les autres Sections, on menera par l'une des FIG. 85. 86.
extrémités a du diamètre donné Aa la ligne aM qui rencontre la tangente AL , qui passe par l'autre extrémité A , au point L ; & ayant pris sur le diamètre Aa la partie AH égale à AL , on tirera HF parallèle à PM , laquelle rencontrant en F la ligne AM , sera le paramètre du diamètre Aa .

COROLLAIRE II.

163. **O**N tire de la seconde manière qu'on vient d'expliquer, une méthode uniforme & très-exacte dans la pratique de décrire une Section Conique par plusieurs points. La voici dans l'Ellipse : & elle servira de Règle pour les autres Sections.

Ayant pris sur la tangente AL , qui passe par l'une des FIG. 87.
extrémités A du diamètre donné Aa , la partie AG égale à son paramètre, & mené une parallèle indéfinie GF à Aa ; on tirera librement par le point A autant de lignes droites AF , AF , &c. qu'on voudra. Ayant pris sur la tangente indéfinie AL , les parties AL , AL , &c. égales aux correspondantes GF , GF , &c. & mené les droites aL , aL , &c ; je dis que les intersections M , M , &c. des droites correspondantes FA , La , FA , La , &c. seront des points de l'Ellipse qui a pour diamètre la ligne Aa , pour tangente la ligne AL , & pour paramètre du

* *Hyp.* diametre Aa la ligne AG . Cela est visible en menant FH parallele à AG , & tirant la ligne HL par le point L correspondant au point F . Car le triangle HAL sera isocelle; puisque AL est égale à GF ou AH , & HF sera égale au parametre du diametre Aa : c'est pourquoi cette construction retombe dans celle de la seconde des deux manieres précédentes.

Comme les lignes GF , AL , deviennent fort grandes, lorsqu'il s'agit de trouver des points M qui soient proches du point a ; on pourra se servir, pour trouver ces points, de la tangente al qui passe par l'autre extremité a du diametre Aa , & de la ligne gf parallele à Aa , comme l'on voit dans cette figure.

Si l'on mene les ordonnées MP , MP , &c. paralleles à la tangente AL , & qu'on les prolonge de l'autre côté du diametre Aa en M , M , &c. en sorte qu'elles soient coupées chacune en deux également par ce diametre; * *Art. 43.* il est clair * que ces nouveaux points M , M , &c. seront encore à la même Ellipse.

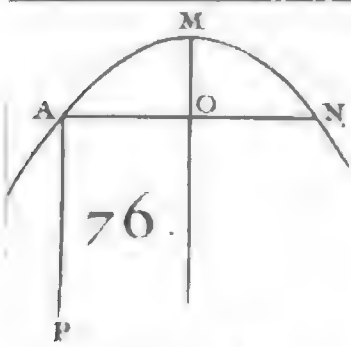
On pourroit se servir d'une même ouverture de compas GF ou AL pour marquer sur les lignes GF , AL , autant de points F , F , &c., L , L , &c., qu'on voudra; car par ce moyen toutes ces petites parties étant égales entr'elles, chaque GF seroit égale à la correspondante AL ; ce qui est le fondement de la démonstration.

PROPOSITION XIII.

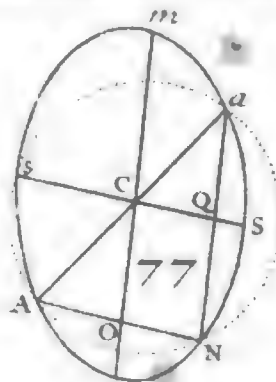
Theorème.

FIG. 88.89. 164. S'IL y a deux droites MN , AR , terminées par
90.91. une Section Conique, lesquelles se rencontrent en un point P , & qui soient paralleles à deux droites données de position; je dis que le rectangle $MP \times PN$ sera toujours au rectangle $AP \times PR$ en raison donnée en quelque endroit de la Section que pussent tomber les droites MN , AR .

POUR

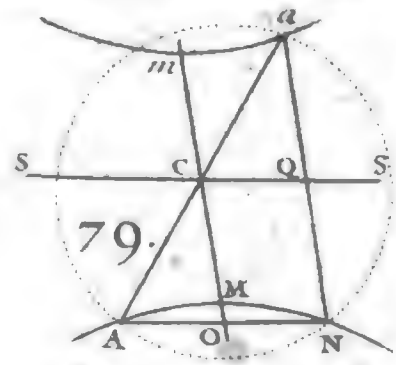


76.

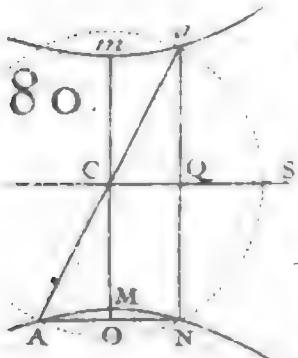


m

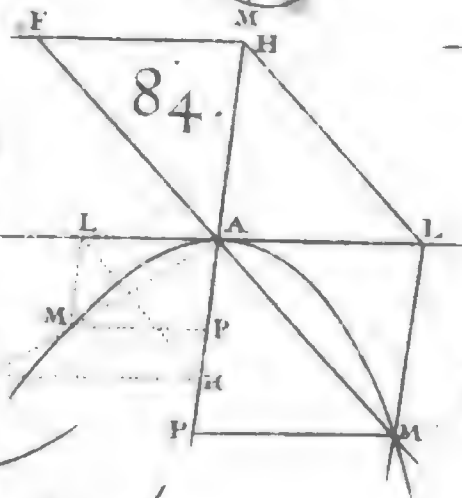
77



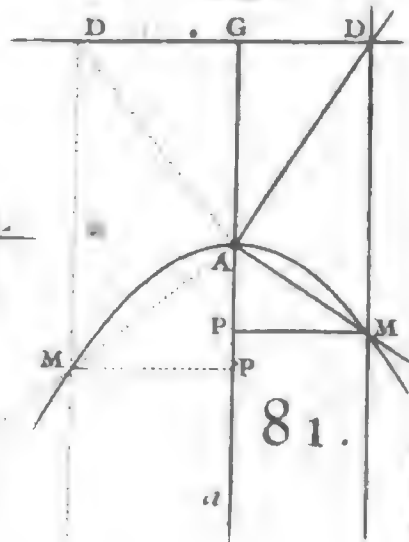
79.



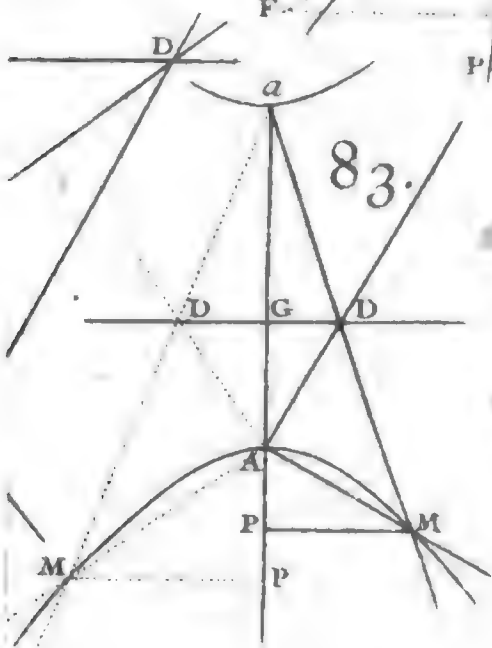
80.



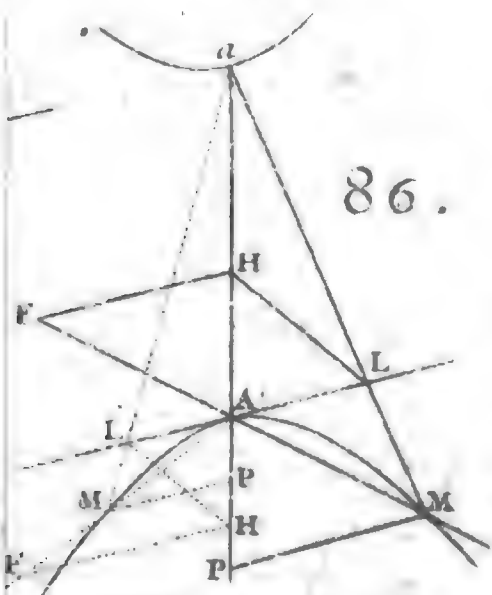
84.



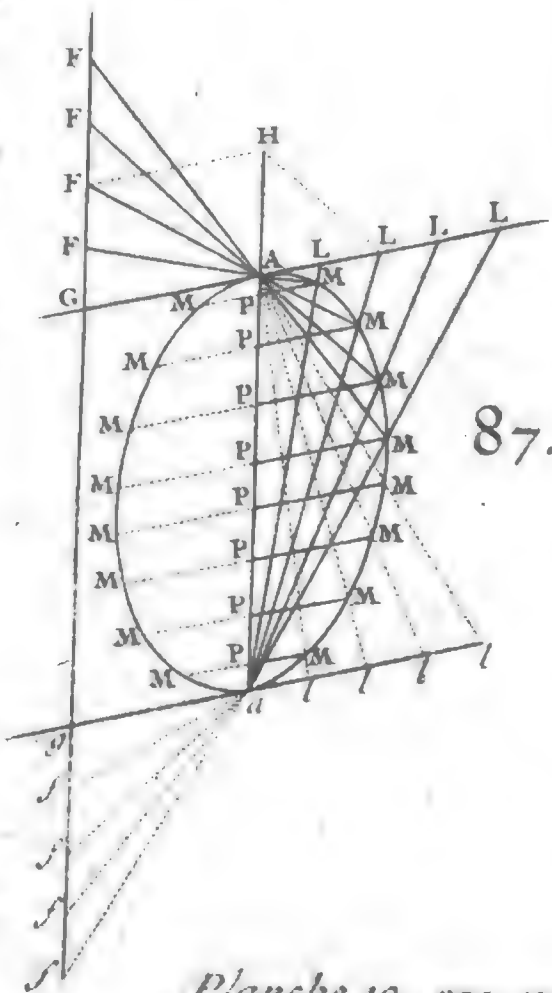
81.



83.



86.



87.

POUR LA PARABOLE.

Soient (*fig. 88.*) les tangentes CB , EB , qui se rencontrent au point B , parallèles aux droites MN , AR : je dis que $MP \times PN. AP \times PR :: \overline{CB}^2. \overline{EB}^2$.

Car ayant mené * par le point G milieu de MN le * *Art. 148.* diamètre CG , & tiré par son origine C la parallèle CB à MN ; il est clair * qu'elle sera tangente en C . On me- * *Art. 10.* nera de la même sorte la tangente EB parallèle à AR , & 21. que l'on prolongera jusqu'à ce qu'elle rencontre le diamètre CG au point K ; & tirant par le point touchant E l'ordonnée EL , on aura * $KC = CL$; & par conse- * *Art. 12.* quent $KB = BE$. On tirera ensuite AD ordonnée, & 23. AF parallèle au diamètre CG , & on nommera les données KB ou BE , m ; BC , n ; CK , e ; le paramètre CH du diamètre CG , p ; & les indéterminées AP , x ; PM , y ; AD , r ; CD , s .

Cela posé, les triangles semblables KBC , APF , donneront $PF = \frac{nx}{m}$, AF ou $DG = \frac{ex}{m}$: Et par conséquent

$$CG = \frac{ex}{m} + s, GM \text{ ou } GN = y + \frac{nx}{m} + r, PN \text{ ou } GN + GP = y + \frac{2nx}{m} + 2r; MP \times PN = yy + \frac{2nx}{m}y + 2ry, \overline{GM}^2 = yy + \frac{2nx}{m}y + 2ry + \frac{nn}{mm}xx + \frac{2nr}{m}x + rr.$$

Or * CD (s). CG ($\frac{ex}{m} + s$) :: \overline{AD}^2 (rr). $\overline{GM}^2 = rr$ * *Art. 8.* & 20.
 $+ \frac{err}{m}x = rr + \frac{ep}{m}x$, puisque \overline{AD}^2 (rr) = $CD \times CH$

(ps). Et comparant ensemble ces deux valeurs de \overline{GM}^2 , on formera l'équation $yy + \frac{2nx}{m}y + 2ry + \frac{nn}{mm}xx + \frac{2nr}{m}x - \frac{ep}{m}x = 0$, qui convient également à tous les points de la Parabole, lorsque la ligne AR tombe au dessus du diamètre CG , & que le point d'intersection P tombe entre les points A , R .

Maintenant si l'on fait dans cette équation $y = 0$, on aura (en effaçant tous les termes où y se rencontre)

$\frac{nn}{mm}xx + \frac{2nr}{m}x - \frac{e^2p}{m}x = 0$. D'où l'on tire $x = \frac{e^2mp}{nn} - \frac{2mr}{n}$
 $= AR$; puisque PM (y) devenant nulle ou zero, il
est clair que AP (x) devient AR . Donc $AP * PR$
 $= \frac{e^2mp}{nn}x - \frac{2mr}{n}x - xx$; & par conséquent $MP * PN$
 $(yy + \frac{2nx}{m}y + 2ry)$. $AP * PR (\frac{e^2mp}{nn}x - \frac{2mr}{n}x - xx$
 $:: \overline{CB}^2 (nn)$. $\overline{EB}^2 (mm)$. puisqu'en multipliant les ex-
trêmes & les moyens, on retrouve l'équation précéden-
te. Or comme les tangentes CB , BE demeurent tou-
jours les mêmes, en quelque endroit de la Parabole que
tombent leurs parallèles MN , AR , il s'ensuit &c.

Il peut arriver differens cas ; selon les différentes po-
sitions des droites MN , AR ; mais comme la démon-
stration demeure toujours la même, & qu'il ne peut y
avoir de changement que dans quelques lignes, ou dans
quelques termes qui s'évanouissent, je ne m'arrêterai
point à les expliquer en détail. On doit observer la mê-
me chose dans les deux autres Sections.

POUR LES AUTRES SECTIONS.

Ayant mené (*fig.* 89. 90. 91.) les deux demi-diamè-
tres CO , CB , parallèles aux droites MN , AR ; je
dis que $MP * PN$. $AP * PR :: \overline{CO}^2$. \overline{CB}^2 .

Soit mené le diamètre CG qui ait pour double or-
donnée MN , sur lequel soient abaissées les droites BE ,
 AD , parallèles à MN ; & ayant tiré AF parallèle à
 CG , soient nommées les données CB , m ; BE , n ; CE , e ;
& le demi-diamètre CK , t ; son demi-conjugué CO , c ;
& les interminées AP , x ; PM , y ; AD , r ; CD , s .

Cela posé, les triangles semblables CBE , APF , don-
neront $PF = \frac{nx}{m}$, AF ou $DG = \frac{ex}{m}$. Par conséquent
dans l'Hyperbole ou les Hyperboles opposées (*fig.* 90.
& 91.) on aura $CG = \frac{ex}{m} + s$, GM ou $GN = y$
 $+ \frac{nx}{m} - r$, PN ou $GN + GP = y + \frac{2nx}{m} - 2r$; $MP * PN$

DES TROIS SECTIONS CONIQUES. 107

$$=yy + \frac{2nx}{m}y - 2ry, \overline{GM}^2 = yy + \frac{2nx}{m}y - 2ry + \frac{nn}{mm}xx - \frac{2nr}{m}x + rr. \text{ Or } \overline{CD}^2 = \overline{CK}^2 (ss + tt), \overline{CG}^2 = \overline{CK}^2 \quad * \text{ Art. 81.} \\ \phi 118.$$

$$\left(\frac{ccxx}{mm} + \frac{2cix}{m} + ss + tt \right) :: \overline{AD}^2 (rr). \overline{GM}^2 = rr + \frac{ccrrxx + 2ccmrsx}{mmss + mmtt}, \text{ en mettant}$$

pour $\frac{rr}{ss + tt}$ sa * valeur $\frac{cc}{tt}$. Et comparant ensemble ces * Art. 81. & 118.

$$\text{deux valeurs de } \overline{GM}^2, \text{ on formera l'équation } yy + \frac{2nx}{m}y - 2ry + \frac{nn}{m}y - \frac{nn}{mm}xx - \frac{2nr}{m}x + rr = 0, \text{ dans la-}$$

quelle mettant à la place de $nn + tt - cc$ la valeur $cc + tt$ (il faut imaginer l'Hyperbole conjuguée qui passe * par l'ex- * Art. 134. tremité B, (lorsque CB est la moitié d'un second diametre)

tirée de ce que * $\overline{CE}^2 = \overline{CK}^2 (cc + tt), \overline{EB}^2 (nn) :: * \text{ Art. 81.} \\ \overline{CK}^2 (tt), \overline{CO}^2 (cc), \text{ on aura celle-ci } yy + \frac{2nx}{m}y - 2ry \quad \phi 108.$

+ $\frac{cc}{mm}xx - \frac{2nr + 2ccs}{mtt}x = 0$, qui convient à tous les points de la Section, lorsque les points A, R, tombent de part & d'autre du diametre CG, & que le point d'intersection P tombe entre les points A, R.

Maintenant si l'on fait dans cette équation $y = 0$, on aura (en effaçant tous les termes où y se rencontre) $\frac{cc}{mm}xx - \frac{2nr + 2ccs}{mtt}x = 0$, d'où l'on tire $x = \frac{2mnr + 2ccms}{cc + tt}$

= AR; puisque PM(y) devenant nulle ou zero, il est clair que AP(x) devient AR. Donc AP x PR $\left(\frac{2mnr + 2ccms}{cc + tt}x - xx \right), MP \times PN (yy + \frac{2nx}{m}y - 2ry)$

:: $\overline{CB}^2 (mm), \overline{CO}^2 (cc)$. Car multipliant les extrêmes & les moyens de cette proportion, on retrouve l'équation précédente. Or comme les demi-diametres CO, CB, demeurent toujours les mêmes en quelque endroit de la Section que tombent leurs paralleles MN, AR; il s'ensuit &c.

Je ne mets point ici en particulier le calcul pour l'Ellipse,

parce qu'il ne diffère de celui de l'Hyperbole qu'en quelques lignes.

COROLLAIRE I.

FIG. 92. 165. S'IL y a deux lignes droites MN , AR , terminées par une Section Conique, lesquelles se rencontrent en un point P ; & qu'on mene par tout où l'on voudra deux autres droites FG , HD , paralleles aux deux premières, & terminées aussi par la Section, lesquelles se rencontrent en un point Q : il est clair que $MP \times PN$. $AP \times PR :: FQ \times QG$. $BQ \times QD$. Car les deux droites AR , BD , étant paralleles entr'elles, seront paralleles à la même droite CZ donnée de position; comme aussi les deux droites MN , FG , à la même droite CY donnée pareillement de position.

COROLLAIRE II.

166. S'IL y a deux paralleles AR , BD , terminées par une Section Conique, lesquelles rencontrent aux points E , Q , une ligne droite FG terminée par la même Section; je dis que $FE \times EG$. $AE \times ER :: FQ \times QG$. $EQ \times QD$. Car concevant dans le premier Corollaire que MN tombe sur FG , il est clair que les rectangles $MP \times PN$, $AP \times PR$, deviennent $FE \times EG$, $AE \times ER$.

COROLLAIRE III. POUR LE CERCLE.

FIG. 93. 167. ON peut tirer de ce Theorème la propriété du Cercle, qui est si connue de tous les Geometres; sçavoir que si par un point quelconque P pris au dedans ou au dehors d'un cercle, on mene autant de lignes qu'on voudra AR , MN , HL , &c. terminées par la circonférence, les rectangles $AP \times PR$, $MP \times PN$, $HP \times PL$, &c. seront tous égaux entr'eux. Car menant les demi-diametres CB , CO , CD , &c. paralleles à ces lignes, il est clair par le Theorème, que tous rectangles seront entr'eux, comme les quarrés de ces demi-diametres ou rayons, lesquels par la propriété essentielle du cercle sont tous égaux entr'eux.

COROLLAIRE IV. POUR LA PARABOLE.

168. S'IL y a une ligne droite MN terminée par une Parabole, & qu'on mene par un des points quelconques A de la Parabole un diamètre AF qui rencontre cette ligne au point F : je dis que le rectangle $MF \times FN$ est égal au rectangle de AF par le paramètre CH du diamètre CG , qui passe par le milieu de MN . FIG. 94.

Car concevant dans le Theorème que AP tombe sur AF , il est clair que la ligne PF ($\frac{n}{m}x$) devient nulle ou zero, & qu'ainsi $\frac{n}{m} = 0$. C'est pourquoi effaçant dans l'équation à la Parabole $yy + \frac{2nx}{m}y + 2ry + \frac{nn}{mm}xx + \frac{2nr}{m}x - \frac{ep}{m}x = 0$, tous les termes où $\frac{n}{m}$ se rencontre, on en formera celle-ci $yy + 2ry - \frac{ep}{m}x = 0$. Or $AF = \frac{ex}{m}$, $CH = p$, & $MF \times FN = yy + 2ry$. Donc &c.

Ce n'est que pour faire voir la généralité du Theorème, que j'en déduis cette propriété ; car on la peut démontrer plus aisément sans y avoir recours, en cette sorte. $\overline{GM} = GC \times CH$, \overline{AD} ou $\overline{GF} = DC \times CH$, & partant $\overline{GM} - \overline{GF}$ ou $MF \times FN = GC - DC \times CH = AF \times CH$.

COROLLAIRE V. POUR LA PARABOLE.

169. DE LA il est évident,

1°. Que s'il y a deux droites MN , EL , terminées par une Parabole, & paralleles entr'elles ; & qu'on mene par deux points quelconques A , B , de cette Parabole, deux diamètres AF , BP , qui rencontrent ces lignes aux points F , P : il est évident, dis-je, que $MF \times FN. EP \times PL :: AF. BP$. Car le diamètre CG qui passe par le milieu de MN , passe aussi par le milieu

O iij

de EL , & par conséquent le rectangle $EP \times PL = BP \times CH$, de même que $MF \times FN = AF \times CH$.

2°. Que s'il y a une ligne droite MN terminée par une Parabole, & qui rencontre deux de ses diamètres AF , BK , aux points F , K ; on aura $MF \times FN = MK \times KN :: AF \cdot BK$.

3°. Que s'il y a deux lignes droites MN , EL , terminées par une Parabole, & parallèles entr'elles, qui rencontrent un de ses diamètres quelconques BP aux points K , P ; on aura $MK \times KN = EP \times PL :: BK \cdot BP$.

COROLLAIRE VI. POUR LA PARABOLE.

170. **D**E LA on voit comment on peut décrire une Parabole qui passe par trois points donnés A , M , N , & dont les diamètres AF , CG , soient parallèles à une ligne droite donnée de position; & démontrer qu'il ne peut y en avoir qu'une seule.

Car ayant mené une ligne MN qui joigne deux des points donnés M , N ; on tirera par le troisième A un diamètre AF parallèle à la ligne donnée de position, & qui rencontre la ligne MN au point F , & par le point de milieu G de MN une parallèle GC à AF . On fera ensuite $MF \times FN = MG \times GN$, ou $\overline{GM} :: AF \cdot GC$. Et ayant pris CH troisième proportionnelle à CG , GM , on décrira * du paramètre CH , & du diamètre CG dont l'origine est en C , une Parabole dont les ordonnées soient parallèles à MN ; elle satisfera à la question.

* Art. 29.
 & 30.

* Art. 7. &
 30.

Car 1°. Elle passera * par les points M , N ; puisque par la construction $CH \times CG = \overline{GM}$ ou \overline{GN} . 2°. Elle passera par le point A ; puisque $MG \times GN = MF \times FN :: CG \cdot FA$. 3°. Les diamètres AF , CG , seront parallèles à la droite donnée de position.

Comme la Parabole qui satisfait au Problème, a nécessairement pour diamètre la ligne CG , qui a pour origine le point C , & pour paramètre la ligne déterminée CH ; il s'ensuit qu'il ne peut y en avoir qu'une seule.

COROLLAIRE VII. POUR LA PARABOLE.

171. S'il y a deux droites AR , MN , terminées par une Parabole, lesquelles se rencontrent en un point P ; & qu'ayant fait $AP \propto PR$. $MP \propto PN :: \overline{AP} \cdot \overline{PF}$, on tire la ligne AF : je dis que cette ligne sera un diamètre. Car ayant mené les tangentes CB , EB , parallèles aux droites MN , AR , & par le point touchant C le diamètre CG qui rencontre EB prolongée en K ; on aura \overline{EB} ou $\overline{KB} \cdot \overline{BC} :: AP \propto PR$. $MP \propto PN :: \overline{AP} \cdot \overline{PF}$, & par conséquent $KB \cdot CB :: AP \cdot PF$. Les triangles KBC , APF seront donc semblables, & leurs côtes AF , KC , parallèles entr'eux: d'où il suit que la ligne AF qui se trouve ainsi parallèle au diamètre CG , sera un diamètre; puisque dans la Parabole * tous * *Def. 7, I.* les diamètres sont parallèles entr'eux.

COROLLAIRE VIII. POUR LA PARABOLE.

172. ON tire du Corollaire précédent une manière de décrire une Parabole qui passe par quatre points donnés A , M , R , N .

Car ayant joint ces quatre points par deux droites AR , MN , qui s'entrecoupent en un point P , & fait $AP \propto PR$. $MP \propto PN :: \overline{AP} \cdot \overline{PF}$; on tirera la ligne AF , & on décrira * une Parabole qui passe par les trois points * *Art. 170.* A , M , N , & dont les diamètres sont parallèles à la ligne AF . Elle sera celle qu'on demande; car selon le Théorème la ligne AP doit rencontrer cette Parabole en un point R , tel que $AP \propto PR$. $MP \propto PN :: \overline{EB}$ ou $\overline{KB} \cdot \overline{BC} :: \overline{AP} \cdot \overline{PF}$.

Si l'on eut pris le point F de l'autre côté du point P , *Fig. 95.* on auroit décrit une autre Parabole qui auroit encore passé par les quatre points donnés. Mais l'on doit remarquer que lorsqu'un de ces points F tombe sur l'un des

points donnés M ou N , il ne peut y avoir qu'une Parabole qui satisfasse ; & que lorsque tous les deux tombent sur les points M , N , il n'y en peut avoir aucune : puisqu'alors le diamètre AF de la parabole passeroit par deux de ses points, ce que l'on a démontré * être impossible.

* Art. 10.

COROLLAIRE IX.

POUR L'HYPÉROLE OU LES HYPÉROLES OPPOSÉES.

FIG. 96. 97. 173 S'IL y a une ligne droite MN terminée par une Hyperbole ou par des Hyperboles opposées, laquelle rencontre une asymptote CB au point Q , & qui soit parallèle à une ligne donnée de position ; & qu'on tire par un point quelconque A de la Section une droite AP parallèle à cette asymptote, & qui rencontre au point P la ligne MN : je dis que le rectangle $MP \times PN$ sera toujours au rectangle $AP \times PQ$ en raison donnée, en quelque endroit de la Section que tombent les droites MN , AP .

Car concevant dans le Theorème (fig. 90. 91.) que le demi-diamètre CB devienne une asymptote, il est clair * qu'alors les trois côtés du triangle CBE deviennent chacun infini. C'est pourquoi menant (fig. 96. 97.) par l'extrémité K du diamètre LK qui passe par le milieu de MN , une parallèle KS à MN , qui rencontre l'asymptote CB en S , on formera un triangle CKS dont tous les côtés seront finis, & qui sera semblable au triangle CBE ; & partant on aura $CK (t)$. KS ou $CO (c)$:: $CE (e)$. $EB (n)$. Ce qui donne $ce = nt$. Si l'on met à la place de ce la valeur nt dans l'équation à l'Hyperbole $yy + \frac{2nx}{m}y - 2ry + \frac{nnx - cce}{mmt}xx - \frac{2nrt + 2ccs}{mt}x = 0$ que l'on a trouvée dans le Theorème, on en formera celle-ci $yy + \frac{2nx}{m}y - 2ry - \frac{2nrt + 2ncs}{mt}x = 0$ ou $yy + \frac{2nx}{m}y - 2ry = \frac{2nrt + 2ncs}{mt}x$. Or en prolongeant AD , s'il est nécessaire,

cessaire,

DES TROIS SECTIONS CONIQUES. 115

cessaire , jusqu'à ce qu'elle rencontre l'asymptote CB en H , les triangles semblables CKS , CDH , donneront $CK(t)$. $KS(c) :: CD(s)$. $DH = \frac{cs}{t}$. Et partant AH ou $PQ = \frac{r^2 + cs}{t}$. On aura donc $MP \propto PN$ $(yy + \frac{2cx}{m}y - 2ry) : 2AP \propto PQ (\frac{2r^2 + 1cs}{t}x) :: EB(n)$. $CB(m) :: KS.CS$. Puisqu'en multipliant les extrêmes & les moyens on retrouve l'équation précédente. Or les lignes KS , CS , demeurent toujours les mêmes en quelque endroit de la Section que tombent les droites MN , AP ; parce que le diamètre LK qui passe par le milieu de MN , passe aussi * par le milieu de toutes les parallèles * *Art. 145.* à MN terminées par la Section, en quelque endroit qu'elles se rencontrent. Donc &c.

On peut démontrer ce Corollaire immédiatement, & *Fig. 96.* sans avoir recours au Théorème , en cette sorte. Soient les données $CK=t$, KS ou $CO=c$, $CS=m$, & les indéterminées $CD=s$, AD ou $DI=r$, $AP=x$, $PM=y$. Les triangles semblables CSK , APF , donnent $PF = \frac{cx}{m}$, AF ou $DG = \frac{rx}{m}$; Et partant GM ou $GN = y + \frac{cx}{m} - r$, $CG = \frac{rx}{m} + s$. Or à cause des triangles semblables CKS , CDH , CGQ , on aura $CK(t)$. $KS(c) :: CD(s)$. $DH = \frac{cs}{t} :: CG(\frac{rx}{m} + s)$. $GQ = \frac{cx}{m} + \frac{cs}{t}$. Et partant $MQ \propto QN$ ou $GQ - GM^2 = \frac{2cxs}{mt} + \frac{c^2s}{t^2} - yy - \frac{2cxy}{m} + 2ry + \frac{2cx^2}{m} - rr = AH \times HI$ * *Art. 97.* ou $DH^2 - DI^2 = \frac{c^2s}{t^2} - rr$; d'où l'on tire (en effaçant de part & d'autre $\frac{c^2s}{t^2} - rr$, & transposant d'une part tous les termes où y se rencontre) cette équation $yy + \frac{2cx}{m}y - 2ry = \frac{2cxs}{mt} + \frac{2cx^2}{m}$, laquelle étant reduite en proportion, donne $MP \propto PN (yy + \frac{2cx}{m}y - 2ry) : 2AP \propto PQ$

P

$(\frac{1}{c} + 2rx) :: KS(c). CS(m).$ Ce qu'il falloit démontrer.

La démonstration est la même pour les Hyperboles opposées à quelques signes près.

COROLLAIRE. X.

POUR L'HYPERBOLE OU LES HYPERBOLES OPPOSÉES.

174. IL suit du Corollaire précédent.

Fig. 98.

1°. Que s'il y a deux droites paralleles entr'elles MN , HG , terminées par une Hyperbole ou par des Hyperboles opposées, & qui rencontrent une asymptote CS aux points Q, I ; & qu'on mene par deux points quelconques A, B , de la Section deux paralleles AP, BD , à l'asymptote CS , qui rencontrent ces lignes aux points P, D : les rectangles $MP * PN, 2 AP * PQ$ seront entr'eux, comme les rectangles $HD * DG, 2 BD * DI$; & partant on aura $MP * PN. HD * DG :: AP * PQ. BD * DI$.

2°. Que s'il y a deux droites paralleles entr'elles MN , HG , terminées par une Hyperbole ou par des Hyperboles opposées, & qui rencontrent une asymptote CS aux points Q, I ; & qu'on mene par un point quelconque A de la Section, une parallele AO à CS , qui rencontre ces lignes aux points P, O : on aura (en concevant dans le cas précédent que BD tombe sur AP) cette proportion, $MP * PN. HO * OG :: AP * PQ. AO * OI :: AP. PO.$ puisque $PQ = OI$.

3°. Que s'il y a une ligne droite HG terminée par une Hyperbole ou par des Hyperboles opposées; & qui rencontre une asymptote CS en I ; & qu'on mene par deux points quelconques de la Section A, B , deux paralleles AO, BD , à CS , qui rencontrent cette ligne aux points O, D : on aura $HO * OG. HD * DG :: AO * OI. BD * DI$. Cela est encore une suite du premier cas, en concevant que la ligne MN tombe sur HG .

COROLLAIRE XI.

175. **S**i l'on conçoit qu'une ligne droite BD qui ren- FIG. 92.
contre une Section Conique en deux points B, D , se meu-
ve parallelement à elle-même jusqu'à ce qu'elle rase la
Section, c'est à dire, jusqu'à ce qu'elle devienne la tan-
gente LS : il est clair que les deux points d'intersection
 B, D , se réunissent alors au point touchant L ; & qu'ain-
si on peut considerer un point touchant comme deux
points d'intersection qui tombent l'un sur l'autre. Or ce-
la posé, on voit naître des Corollaires 1, 2, 5, 10, plu-
sieurs cas dont voici les principaux.

1°. Si l'y a deux tangentes KS, LS , qui se rencon-
trent en un point S , & deux autres droites MN, AR ,
paralleles à ces tangentes & terminees par la Section,
lesquelles se rencontrent en un point P ; je dis que
 $MP \times PN. AP \times PR :: \overline{KS}. \overline{LS}$. Ceci a été démontré
dans le Theorème à l'égard de la Parabole: mais pour
les autres Sections, concevant dans le premier Corollai-
re que FG tombe sur la tangente KS , & BD sur LS ,
il est clair que les deux points d'intersection F, G , se
réunissent au point touchant K , comme aussi les deux
 B, D , au point touchant L ; & qu'ainsi les rectangles
 $FQ \times QG, BQ \times QD$, deviennent les quarrés $\overline{KS}. \overline{LS}$.

2°. Si dans une Ellipse ou dans des Hyperboles oppo-
sées, l'on mene une tangente TX parallele à KS , & qui
rencontre SL au point X , on prouvera comme dans le
nombre précédent, que $MP \times PN. AP \times PR :: \overline{TX}. \overline{LX}$.
 $\overline{KS}. \overline{LS} :: \overline{TX}. \overline{LX}$. D'où il suit que $\overline{KS}. \overline{LS} :: \overline{TX}. \overline{LX}$. Et $KS.$
 $SL :: TX. LX$. C'est à dire, que si deux tangentes pa-
ralleles KS, TX , rencontrent une troisième tangente
 LS aux points S, X , on aura $KS. LS :: TX. LX$. ou
 $KS. TX :: LS. LX$.

3°. Si dans une Ellipse, dans une Hyperbole ou dans
des Hyperboles opposées, il y a deux tangentes $KS,$
 LS , qui se rencontrent en un point S , & qu'on mene

deux demi-diamètres CY, CZ parallèles à ces tangentes ; je dis quels seront entr'elles comme ces deux demi-diamètres. Car selon le Theorème $CY. CZ :: MP \times PN. AP \times PR :: \overline{KS}. \overline{LS}$, selon le nombre premier. Et par conséquent $CY. CZ :: KS. LS$.

4°. S'il y a deux droites AR, FG , terminées par une Section Conique, lesquelles rencontrent deux tangentes KI, LO , qui leur soient parallèles, aux points I, O ; je dis que $FO \times OG. \overline{LO} :: \overline{KI}. AI \times IR$. Ce qui est évident en concevant dans le premier Corollaire que BD devient la tangente LO ; & MN , la tangente KI .

5°. S'il y a deux parallèles AR, BD , terminées par une Section Conique, lesquelles rencontrent une tangente KH aux points I, H ; je dis que $\overline{KI}. AI \times IR :: \overline{KH}. BH \times HD$, ou $\overline{KI}. \overline{KH} :: AI \times IR. BH \times HD$. Ce qui est une suite du second Corollaire, en concevant que la ligne FG tombe sur la tangente KH .

6°. Si l'on suppose dans le nombre précédent que la Section Conique soit une Hyperbole, & que la tangente HK en soit une asymptote ; les rectangles $BH \times HD, AI \times IR$ deviendront égaux entr'eux. Car le point touchant K sera * alors infiniment éloigné des points H, I , & par conséquent les droites infinies HK, IK , qui ne diffèrent entr'elles que d'une grandeur finie HI , doivent être regardées comme égales. Ceci a déjà été démontré dans l'article 97. & on ne le repete ici que pour servir de preuve à ce que l'on vient de dire, & pour faire voir qu'on arrive souvent aux mêmes vérités par des routes bien différentes.

* Art. 108.

7°. S'il y a deux tangentes KS, LS , qui se rencontrent en un point S , avec une ligne droite AR terminée par la Section, parallèle à l'une d'elles LS , & qui rencontre l'autre KS en un point I ; je dis que $\overline{KI}. AI \times IR :: \overline{KS}. \overline{LS}$. Cela est visible en concevant dans le second Corollaire que les lignes FG, BD , tombent sur les tangentes KS, LS .

8°. S'il y a dans une Ellipse ou dans les Hyperboles opposées deux tangentes paralleles KI, TV , qui rencontrent aux points I, V , une ligne AR terminée par la Section aux points R, A ; je dis que $\overline{KI} \cdot AI \times IR :: \overline{TV} \cdot RV \times VA$. Cela suit encore du second Corollaire en imaginant que les paralleles MN, FG , tombent sur les tangentes TV, KI .

9°. S'il y a dans une Parabole deux paralleles MN, CH , dont l'une soit tangente en C , & l'autre soit terminée par la Parabole; & qu'on mene par deux points quelconques A, B , de la Section, deux diametres AF, BO qui rencontrent ces lignes aux points F, O : il est clair en concevant dans les deux premiers nombres du Corollaire sixième que EL tombe sur la tangente CH , 1°. Que $MF \times FN \cdot \overline{CO} :: AF \cdot BO$. 2°. Que si l'on prolonge FA jusqu'à ce quelle rencontre la tangente CH en Q , on aura $MF \times FN \cdot \overline{CQ} :: AF \cdot AQ$. FIG. 94.

10°. S'il y a deux paralleles MN, KT , dont l'une KT touche une Hyperbole en K & rencontre une de ses asymptotes en S , & l'autre MN est terminée par l'une ou par l'autre des Hyperboles opposées, & rencontre la même asymptote en Q ; & qu'on mene par deux points quelconques A, B , de la Section, deux paralleles AP, BT , à l'asymptote CS , lesquelles rencontrent ces lignes aux points P, T ; on aura (en concevant dans les trois nombres du Corollaire dixième, que la secante GH tombe sur la tangente RT) 1°. Le rectangle $MP \times PN \cdot \overline{KT} :: AP \times PQ \cdot BT \times TS$. 2°. En prolongeant PA jusqu'à ce qu'elle rencontre KT en R , le rectangle $MP \times PN \cdot \overline{KR} :: AP \cdot AR$. 3°. Le quarré $\overline{KT} \cdot \overline{KR} :: BT \times TS \cdot AR \times RS$. FIG. 98.

11°. S'il y a dans les Hyperboles opposées deux tangentes paralleles KR, LF , qui rencontrent une asymptote CS aux points S, V ; & qu'on mene par deux points quelconques A, B , de la Section, deux paralleles AR, BF à l'asymptote CS lesquelles rencontrent ces tangentes

aux points R, F : on aura (en concevant dans les deux premiers nombres du Corollaire dixième, que les deux Secantes MN, GH , tombent sur les deux tangentes KR, LF) 1°. Le quarré $\overline{KR} \cdot \overline{LF} :: AR \times RS. BF \times FK$.
2°. Le quarré $\overline{KR} \cdot \overline{LE} :: AR. AE$.

PROPOSITION XIV.

Problème.

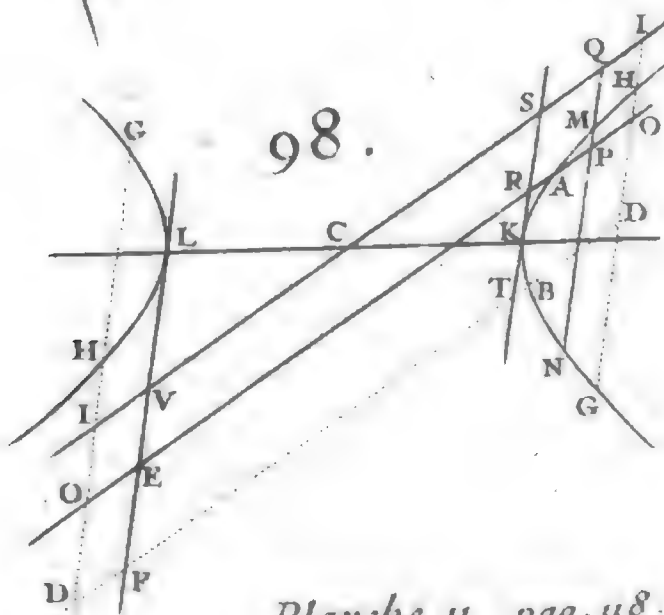
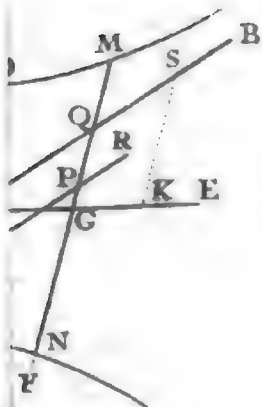
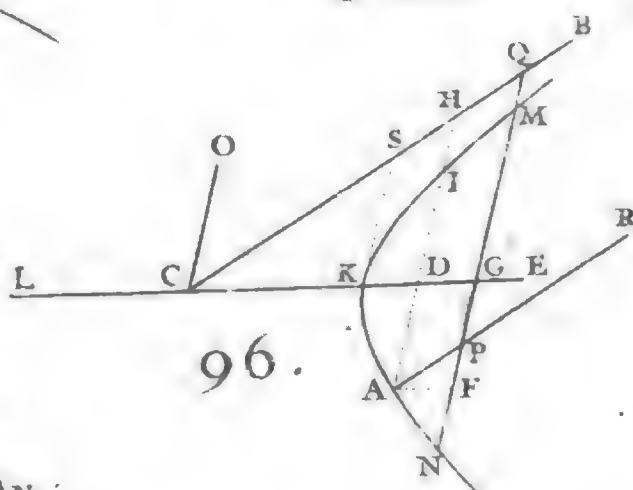
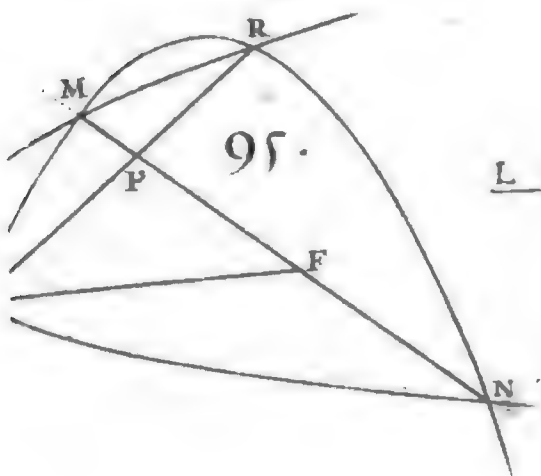
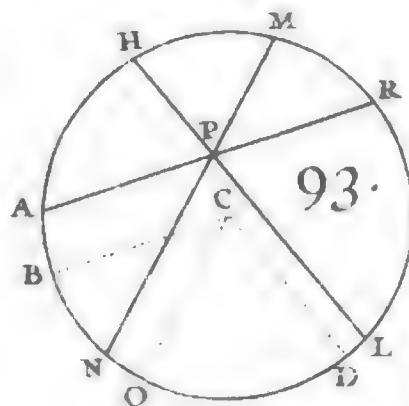
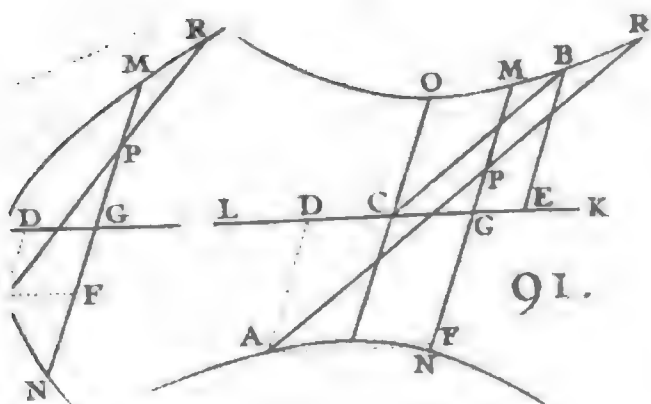
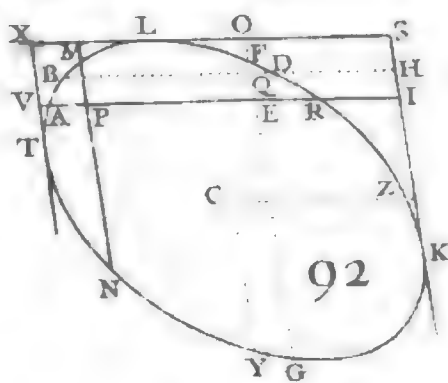
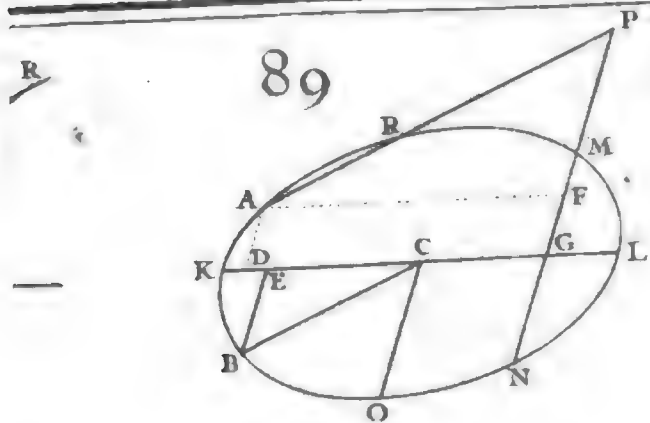
FIG. 99. 176. **D**ÉCRIRE une Ellipse ou deux Hyperboles opposées autour d'un parallélogramme donné $FGHK$, & dont l'un de ses diamètres AB parallèle aux deux côtés FK, GH , soit à son conjugué DE , en la raison donnée de m à n .

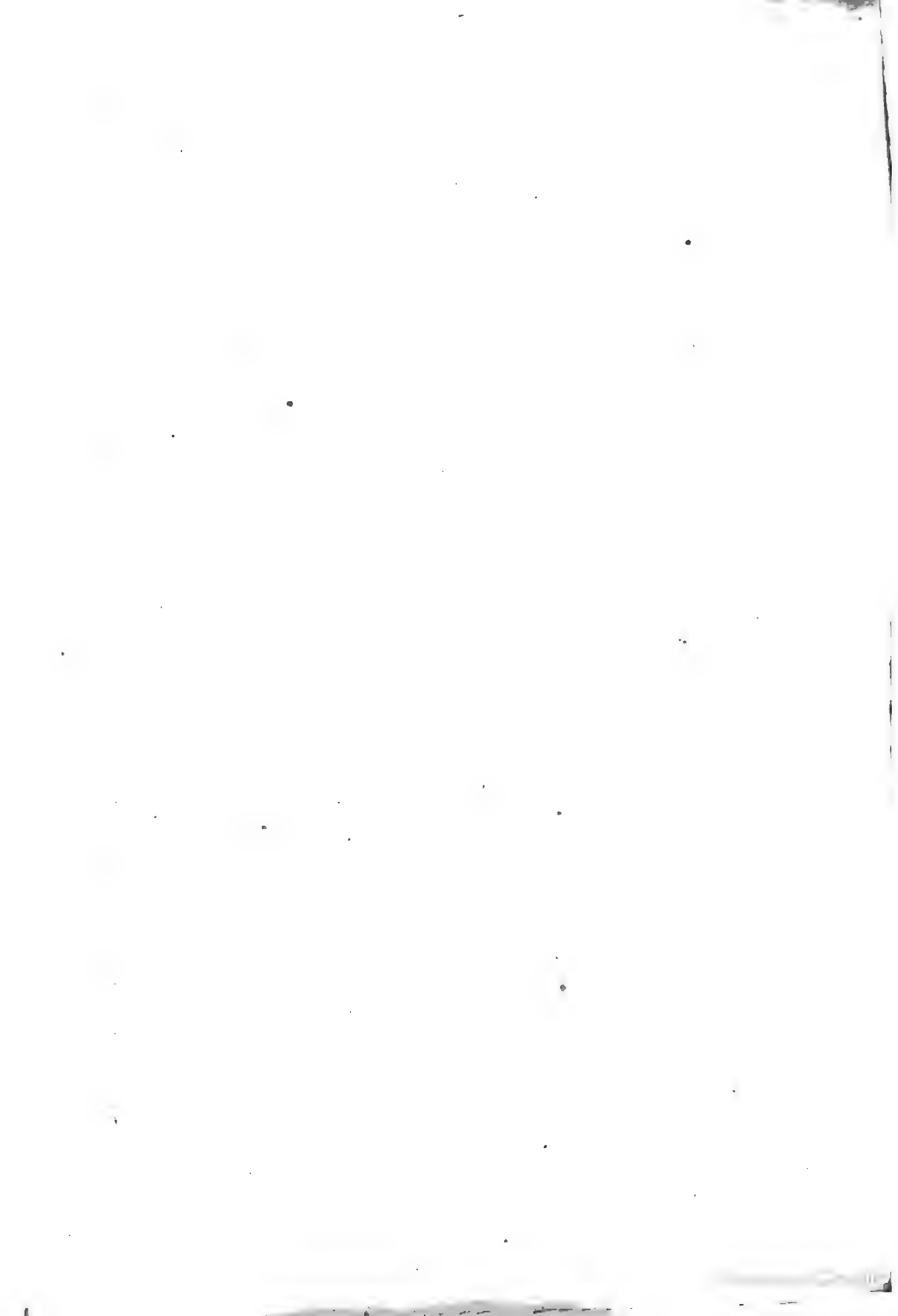
Ayant mené les lignes AB, DE , qui coupent par le milieu les côtés opposés du parallélogramme donné * *Art. 146.* $FGHK$, il est clair * qu'elles seront sur deux diamètres conjugués de la Section qu'on demande, & qu'ainsi leur point d'intersection en sera le centre ; puisque selon l'une des conditions du Problème, les parallèles FG, KH , doivent être terminées par la Section, aussi bien que les deux autres parallèles FK, GH . Or cela posé, si l'on prend AB, DE , pour ces deux diamètres conjugués, & qu'on nomme (les points L, O , coupant en deux parties égales les lignes FG, KH ,) les données CL ou CO, a ; LF ou OK, b ; & l'inconnue CA ou CB, t ; on aura.

* *Art. 41.* 1°. Lorsque * la Section est une Ellipse, $BL \times LA (tt - aa).$
 ☉ 55. $\overline{LF}^2 (bb) :: \overline{AB}^2. \overline{DE}^2 :: mm. nn$. Et partant $tt = aa$

* *Art. 81.* $+ \frac{mmbb}{nn}$. 2°. Lorsque * la Section doit être deux Hyperboles opposées, $\overline{CL}^2 - \overline{CA}^2 (aa - tt). \overline{LF}^2 (bb) :: \overline{AB}^2. \overline{DE}^2 :: mm. nn$, ce qui donne $tt = aa - \frac{mmbb}{nn}$ ou tt

$= \frac{mmbb}{nn} - aa$; sçavoir $tt = aa - \frac{mmbb}{nn}$ lorsque la ligne AB est un premier diamètre, & $tt = \frac{mmbb}{nn} - aa$ lorsque c'est un second. D'où l'on tire la construction sui-





vante que je distingue en trois differens cas.

Premier cas. Lorsque la Section est une Ellipse ; soit fait un triangle rectangle VST dont l'un des côtés $ST = CL$, & l'autre $SV = \frac{m}{n} LF$; & soit décrit du demi-diametre $CA = TV$, qui soit à son demi-conjugué CD , comme m est à n , une Ellipse : Je dis qu'elle satisfera au Problème. Car 1°. Le diametre AB parallèle aux côtés FK, GH , est à son conjugué DE , en la raison donnée de m à n . 2°. A cause du triangle TSV rectangle en S , le quarré \overline{TV} ou \overline{CA} (tt) $= \overline{TS}$ (aa) $+ \overline{SV}$ ($\frac{mmbb}{nn}$) ; & partant $BL \propto LA (tt - aa) = \frac{mmbb}{nn}$: c'est pourquoi l'on aura $BL \propto LA (\frac{mmbb}{nn})$. \overline{LF} (bb) $:: mm. nn :: \overline{AB}. \overline{DE}$. D'où l'on voit que LF est une ordonnée au diametre AB ; & qu'ainsi la Section passe par le point F . On prouvera de même que la Section passera par les points G, H, K ; puisque $GL = LF = OK = OH$, & que $CO = CL$.

Second cas. Lorsque la Section doit être deux Hyperboles opposées, & que CL est plus grande que $\frac{m}{n} LF$: soit formé un triangle TSV rectangle en S , dont l'un des côtés $SV = \frac{m}{n} LF$, & l'hypothénuse $VT = CL$; & soient décrites du premier demi diametre $CA = TS$, qui soit à son demi-conjugué CD , comme m est à n , deux Hyperboles opposées.

Troisième cas. Lorsque la Section doit être deux Hyperboles opposées, & que CL est plus petite que $\frac{m}{n} LF$: on formera un triangle TSV rectangle en T dont l'un des côtés $TS = CL$, & l'hypothénuse $SV = \frac{m}{n} LF$. On décrira ensuite du second demi-diametre $CA = TV$, qui soit à son demi-conjugué CD , comme m est à n , deux Hyperboles opposées.

La démonstration de ces deux derniers cas est sem-

blable à celle du premier , mais il faut remarquer que lorsque $CL = \frac{m}{n} LF$, le Problème est impossible.

COROLLAIRE I.

177. COMME la position des deux diamètres conjugués AB , DE , est déterminée, aussi bien que leur grandeur ; puisque selon les conditions du Problème ils doivent couper par le milieu les côtés opposés du parallélogramme, & qu'on ne trouve pour le demi-diamètre CA ou CB qu'une seule valeur : il s'ensuit qu'il ne peut y avoir qu'une seule Section qui satisfasse.

COROLLAIRE II.

178. DE-LA on voit comment on peut décrire une Section Conique autour d'un parallélogramme donné $FGHK$, & qui passe par un point donné M .

Car ayant mené les deux diamètres conjugués AB , DE , qui coupent par le milieu les côtés opposés du parallélogramme, & du point donné M l'ordonnée MP au diamètre AB , laquelle rencontre les côtés opposés FK , GH , aux points R , Q , & la Section (que je suppose décrite) au point N ; il est clair que $PN = PM$; & qu'ainsi $RN = QM$, puisque $PR = PQ$. Le rectangle $RM \times MQ$ sera donc égal au rectangle $RM \times RN$. Or $FR \times RK$. $MR \times RN$ ou $RM \times MQ :: AB \cdot DE$. Et par conséquent la raison du diamètre AB parallèle aux côtés FK , GH , à son conjugué DE , est donnée ; puisque les rectangles $FR \times RK$, $RM \times MQ$, sont donnés. De plus la Section sera une Ellipse, lorsqu'entre les deux ordonnées MP , KO , au diamètre AB , qui tombent du même côté du centre C , celle qui est la plus proche du centre est plus grande que la plus éloignée ; & au contraire deux Hyperboles opposées, lorsqu'elle est plus petite. D'où l'on voit que cette question se réduit au Problème précédent.

Si

Si le point donné M tomboit sur l'un des côtés du parallélogramme, prolongé à discrétion ; il est clair que ce Problème seroit alors impossible, puisque ce côté rencontreroit la Section en trois différens points ; ce qui ne peut * être.

* Art. 149.

COROLLAIRE III.

179. DE-LA on tire encore la manière de décrire une Section Conique, qui ait pour diametre une ligne AB donnée de position, pour centre le point donné C , & pour deux ordonnées à ce diametre les droites MP , KO .

Car ayant pris sur le diametre AB la partie CL égale à CO , & mené LF parallele & égale à OK ; il est clair qu'elle sera * une ordonnée au diametre AB , & qu'ainsi prolongeant KO en H , & FL en G , en sorte que $OH = OK$, & $LG = LF$, les droites égales & paralleles KH , FG , seront * deux doubles ordonnées au diametre AB . D'où l'on voit que la Section doit être décrite autour du parallélogramme $FGHK$, & passer par le point donné M ; ce qui se fera par le moyen du Corollaire précédent.

* Art. 43. 55
85. & 118.

* Art. 144.

Comme cette question se réduit à celle du Corollaire précédent, qui se réduit au Problème ; & que selon le Corollaire premier, on ne peut trouver qu'une seule Section qui y satisfasse ; il s'ensuit de même qu'on ne peut décrire qu'une seule Section qui remplisse les conditions de ce dernier Corollaire.

PROPOSITION XV.

Problème.

180. DECRIRE une Section Conique qui passe par cinq points donnés F, M, K, G, N ; & démontrer qu'il n'y en peut avoir qu'une seule.

FIG. 102.

& 103.

Q

- Ayant joint quatre des points données par deux lignes droites FG , MN , qui se rencontrent au point R , on mènera par le cinquième point donné A deux droites KD , KH , parallèles aux droites FG , MN , & qui les rencontrent aux points E , Q . On prendra sur ces deux lignes prolongées, s'il est nécessaire, les points D , H , tels que $MR \times RN = GR \times RF :: ME \times EN = KE \times ED$. Et $FR \times RG = MR \times RN :: FQ \times QG = HQ \times QK$. en observant que les points K , D , ou K , H , doivent tomber de part & d'autre du point de rencontre E , ou Q , lorsque les points M , N , ou F , G , tombent aussi de part & d'autre de ce même point ; & au contraire. On mènera ensuite par les points de milieu des parallèles DK , FG , & MN , KH , les droites LI , AB , qui s'entre-coupent au point C . On décrira enfin * la Section Conique qui a pour diamètre la ligne AB donnée de position, pour centre le point donné C , & pour ordonnées les deux droites MP , KO . Je dis qu'elle satisfera au Problème, & qu'il ne peut y avoir que celle-là.
- * Art. 179. Car les deux points D , H , seront * à la Section qui passe par les cinq points données F , M , K , G , N ; & ainsi les lignes LI , AB , en seront * deux diamètres, qui en détermineront par conséquent le centre par leur point d'intersection C . Il est donc évident que la Section Conique qui passe par les cinq points données, doit avoir nécessairement pour diamètre la ligne AB donnée de position, pour centre le point C , & pour ordonnées au diamètre AB les droites MP , KO . Or comme il n'y a qu'une seule Section Conique qui puisse remplir ces conditions, il s'ensuit que ce sera celle qu'on demande, & qu'il ne peut y avoir que celle-là.
- * Art. 166. S'il arrive que les diamètres AB , LI , soient parallèles entr'eux ; la Section sera alors * une Parabole qu'on décrira par l'article 170.
- * Art. 146. & 147.

LIVRE CINQUIÈME.

De la comparaison des Sections Coniques entr'elles, & de leurs Segmens.

LEMME I.

181. *Si la difference de deux quantités diminuë continuellement, en sorte qu'elle devienne enfin moindre qu'aucune grandeur donnée; je dis que dans cet état, ces deux quantités seront égales.*

Car si elles ne l'étoient pas, on pourroit assigner entr'elles quelque difference; ce qui est contre l'hypothese.

LEMME II.

182. *Si la raison de deux quantités est telle que l'antecedent demeurant toujours le même, sa difference avec son consequent diminuë continuellement, en sorte qu'elle devienne enfin moindre qu'aucune grandeur donnée; je dis que dans cet état, ces deux quantités seront égales.*

Car par le Lemme * précédent, l'antecedent sera égal * Art. 181. à son consequent; & ainsi les quantités dont ils expriment le rapport, seront égales.

LEMME III.

183. *Si l'on suppose sur une ligne courbe quelconque ABG Fig. 104. un arc MN infiniment petit, c'est à dire, moindre qu'aucune grandeur donnée; & qu'on imagine par les extremités de cet arc les ordonnées MP, NQ, à l'axe ou diametre AC, avec les paralleles MR, NS, à ce diametre: je dis que les parallelogrammes P Q R M, P Q N S, peuvent être pris chacun pour l'espace P Q N M renfermé entre les ordonnées PM, QN, la petite droite PQ, & le petit arc de la courbe MN.*

Tous les points d'une ligne courbe ou s'éloignent

Q ij

continuellement de plus en plus de son diamètre, ou bien s'en approchent continuellement de plus en plus; ou enfin cette ligne courbe est composée de plusieurs portions, dont les unes s'éloignent de plus en plus, & les autres s'approchent de plus en plus de son diamètre. Car il est évident qu'il ne peut y avoir aucune portion dans une ligne courbe, dont tous les points soient également éloignés de son diamètre; puisqu'alors cette portion ne seroit plus courbe, mais une ligne droite parallèle à ce diamètre.

Supposons 1°. Que l'arc MN soit sur une courbe AMB dont tous les points s'éloignent de plus en plus de son diamètre AC . Si l'on prend du côté du point N l'arc MO d'une grandeur finie, & qu'ayant nommée l'ordonnée OF parallèle à MP , on tire les droites OD , ME , parallèles au diamètre AC ; il est clair que l'espace Curviligne $PFOM$ sera plus grand que le parallélogramme inscrit $PFEM$, & moindre que le parallélogramme circonscrit $PFOD$. Or si l'on imagine que le point O se meuve suivant la courbe vers le point M , il est visible que le parallélogramme $MEOD$ qui est la différence des parallélogrammes inscrits & circonscrits à l'arc OM , diminuera continuellement jusqu'à ce qu'enfin il devienne nul ou zéro dans l'instant que le point O parvient en M . D'où il suit que lorsque le point O est arrivé en N , c'est à dire, infiniment près de M , le parallélogramme $MEOD$, qui devient $MENS$, sera moindre qu'aucune grandeur donnée. Il est donc évident selon le Lemme * premier, que les parallélogrammes $PQRM$, $PQNS$, deviennent alors égaux entr'eux; & par conséquent aussi égaux chacun à l'espace curviligne $PQMN$. Donc &c.

* Art. 181.

Supposons 2°. Que le petit arc MN soit sur une courbe BMG dont tous les points approchent de plus en plus de ceux de son diamètre CG . Il est visible que la démonstration demeure la même que pour le premier cas, en observant simplement que le parallélogramme

« circonscrit $PQNS$ devient inscrit en ce cas-ci.

Supposons 3°. Qu'une ligne courbe telle que ABG , soit composée de plusieurs portions dont les unes, comme AB , s'éloignent de plus en plus du diamètre AG ; & les autres au contraire, comme BG , s'en approchent de plus en plus. Je dis que les points, comme B , qui séparent ces portions, ne peuvent tomber sur les arcs MN ; car si cela étoit le point B seroit plus près du point M que n'est le point N ; ce qui est contre la supposition. Il est donc évident que ce dernier cas est nécessairement renfermé dans l'un ou dans l'autre des deux premiers.

COROLLAIRE I.

184. DE LA il suit que si l'on mène par tout où l'on voudra une ordonnée CB parallèle à PM , & qu'on imagine que la portion de courbe AB soit divisée en une multitude infinie d'arcs infiniment petits, tels que MN ; l'espace ACB renfermé par les droites AC , CB , & par la portion de courbe AB , sera égal à la somme de tous les parallelogrammes tels que $PQRM$ ou $PQNS$. Il s'ensuit de même que l'espace $MPCB$ renfermé par les droites MP , PC , CB , & par la portion de courbe MB , sera égal à la somme de tout ce qu'il y aura de ces parallelogrammes dans cet espace; & de même dans toute l'étendue de la courbe ABG .

COROLLAIRE II.

185. S'IL y a une figure quelconque $CMDOC$ ren- FIG. 105.
fermée entre deux paralleles CE , DF , & qu'on imagine par tout où l'on voudra entre ces paralleles deux droites MO , NL , infiniment proches l'une de l'autre, & qui leur soient aussi paralleles; je dis que l'espace $OMNL$ qu'elles couperont dans la figure $CMDOC$, sera égal au rectangle d'une d'elles, comme de MO , par leur distance MR ou OS . Car menant la perpendicu-

Q iij

laire AB sur les parallèles CE , DF , laquelle rencontre les parallèles MO , NL , aux points P , Q ; il est clair par le Lemme * que l'espace $PMNQ$ est égal au rectangle $PMRQ$, & l'espace $POLQ$ au rectangle $POSQ$; & par conséquent que l'espace $OMNL$ est égal au rectangle $OMRS$ ou $OM \times PQ$.

COROLLAIRE III.

186. IL suit du Corollaire précédent, que s'il y a deux figures quelconques $CMDOC$, $EGFHE$ renfermées entre deux parallèles CE , DF , & qui soient telles qu'ayant mené entre ces parallèles par tout où l'on voudra une ligne MH parallèle aux droites CE , DF ; les parties MO , GH , de cette ligne comprises dans les figures $CMDOC$, $EGFHE$, soient toujours entr'elles en raison donnée: il suit, dis-je, que ces deux figures (j'entends les espaces qu'elles comprennent) sont aussi entr'elles en raison donnée. Car imaginant une autre parallèle NK infiniment proche de MH , & tirant une perpendiculaire AB sur les parallèles CE , DF , laquelle rencontre les parallèles MH , NK , aux points P , Q ; il est clair par le Corollaire * précédent que l'espace $OMNL$ est égal au rectangle $OM \times PQ$, & de même que l'espace $GHKI$ est égal au rectangle $GH \times PQ$. Ces deux espaces seront donc entr'eux comme MO est à GH ; & comme cela arrive toujours en quelque endroit qu'on mène la droite MH , il s'ensuit que la somme de tous les petits espaces $MNLO$, c'est à dire, l'espace $CMDOC$ sera à la somme de tous les petits espaces $GHKI$, c'est à dire, à l'espace $EGFHE$, en la raison donnée.

On prouvera de même que la partie MDO de la figure $CMDOC$, est encore à la partie correspondante GHE de l'autre figure $EGFHE$, en la raison donnée: comme aussi les parties restantes CMO , EGH .

Il est visible que si la raison donnée est celle d'égalité,

c'est à dire, que si les parties MO , GH , de la droite MH , sont toujours égales entr'elles; les espaces $CMDOC$, $EGFHE$, & leurs parties correspondantes MDO , GFH , & CMO , EGH , seront égales entr'elles.

LEMMES IV.

187. *Si l'on suppose sur une ligne courbe quelconque un arc* FIG. 106.
infinitement petit MN ; & qu'on imagine les tangentes MT , NT ,
qui se rencontrent au point T , *la soutendante* MN , & *la*
droite NS *perpendiculaire sur* MT *prolongée*: je dis qu'on peut
prendre pour l'arc MN *sa soutendante* MN , *ou la somme des*
deux tangentes MT , NT , *ou enfin la droite* MS .

Toute ligne courbe est nécessairement ou toujours
concave vers un certain endroit, ou composée de plu-
sieurs portions dont les unes étant concaves vers une
certaine part, les autres le sont vers le côté opposé. Or
les points qui séparent ces portions * ne peuvent point se * Art. 183.
trouver sur les arcs infinitement petits MN : puisqu'ils se- n. 3.
roient plus près du point M que n'est le point N ; ce
qui est contre la supposition. On peut donc toujours
supposer que l'arc MN fait partie d'une courbe ou por-
tion de courbe qui est toujours concave vers un certain
côté.

Maintenant si l'on prend sur la courbe du côté du
point N , l'arc MO d'une grandeur finie, & qu'on tire
la soutendante OM , la tangente OG , & la parallèle OD
à NS : il est clair 1°. A cause du triangle MDO rectangle
en D , que la tangente MD est moindre que la soutendan-
te MO , & à plus forte raison moindre que l'arc MNO ; de
sorte que l'arc MNO & sa soutendante MO sont plus
grands chacun que MD , & chacun moindre que la somme
des deux tangentes MG , OG . 2°. A cause de la concavité
de l'arc MNO vers le même côté, si l'on mène par un
point quelconque N de l'arc MO une tangente TR ,
les points T , R , où elle rencontre les tangentes MG ,
 OG , seront situés entre les points M , G , & O , G , ainsi

l'angle OGD , qui est externe au triangle TGR , est plus grand que l'angle RTG ou NTS .

Ceci supposé, si l'on mène les droites ME , MF , parallèles aux tangentes OG , NT , & qui rencontrent la droite DO aux points E , F ; & qu'on imagine que le point O se meuve suivant la courbe vers le point M : il est visible que l'angle OGD , ou son égal EMD , diminuera continuellement jusqu'à ce qu'il s'évanouisse dans l'instant que le point O parvient en M ; puisqu'alors la tangente OG se confond avec la tangente MD : d'où il suit que la ligne ME diminue continuellement, jusqu'à ce qu'enfin elle devienne égale à MD dans cet instant. Donc lorsque le point O est arrivé en N , c'est à dire, infiniment près du point M , la ligne ME , alors en MF , ne sera pour lors différente de la tangente MD , que d'une grandeur moindre qu'aucune donnée; & par conséquent * les lignes TN , TS , dont elles expriment le rapport, seront égales entr'elles. Les deux tangentes MT , TN , prises ensemble, seront donc égales à la droite MS , comme aussi à l'arc MN , & à la soutendante MN . *Ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE I.

188. PUISQUE l'angle FMD , ou son égal NTS , est infiniment petit dans la supposition que le point N soit infiniment près du point M , il s'ensuit que dans le triangle MTN , l'angle interne NMT , qui est moindre que l'exterieur NTS , sera aussi infiniment petit, c'est à dire, moindre qu'aucun angle donné; & qu'ainsi on ne pourra mener par le point M aucune ligne droite qui tombe dans l'angle TMN . D'où l'on voit que ces deux lignes MT , NM , se confondent entr'elles, & qu'ainsi on peut regarder une tangente comme une ligne droite qui passe par deux points d'une ligne courbe infiniment proches l'un de l'autre.

COROL.

COROLLAIRE II.

189. **S**i l'on imagine qu'une ligne courbe quelconque soit divisée en une multitude infinie d'arcs infiniment petits tels que MN ; il est clair qu'en prenant au lieu de ces arcs leurs soutendantes, on verra naître un Polygone d'une infinité de côtés, chacun infiniment petit, que l'on pourra prendre pour la ligne courbe : puisqu'elle * n'en différera en aucune manière. De plus les petits côtés de ce Polygone étant prolongés de part & d'autre, seront les tangentes de cette courbe ; puisqu'ils passent chacun par deux de ses points infiniment proches l'un de l'autre. * Art. 187.

REMARQUE.

190. **O**n doit faire ici attention que l'idée ou notion qu'on a donnée des tangentes des Sections Coniques, ne convient qu'aux lignes courbes qui sont toujours concaves dans toute leur étendue vers le même côté, comme sont * ces Sections : au lieu que cette dernière notion * est générale pour toutes sortes de lignes courbes. Aussi 61. 124. est-ce elle qui sert de fondement à la méthode des tangentes que j'ai expliquées, dans mon Livre des *Infiniment petits*, & que j'ose assurer être la plus simple & la plus générale qu'on puisse souhaiter. On en verra un foible échantillon à la fin de ce Livre.

DEFINITIONS.

1.

Deux segmens de lignes courbes quelconques BAD , bad , sont appelés *Semblables* ; lorsqu'ayant inscrit dans l'un d'eux une figure rectiligne quelconque $BMNOD$, on peut toujours inscrire dans l'autre une figure rectiligne semblable $bmnod$. FIG. 107. 108. 109.

2.

Deux Sections Coniques sont appelées *Semblables* ; lorsqu'ayant pris dans l'une d'elles un segment quelcon-

R.

que BAD , on peut toujours aligner dans l'autre un segment semblable bad .

3.

On appelle diamètres *Semblables* AP , ap , dans différentes Sections Coniques, ceux qui font avec leurs ordonnées PM , pm , les mêmes angles APM , apm .

COROLLAIRE.

191. **P** LUS chacun des côtés BM , MN ; &c. bm , mn , &c. devient petit; plus leur nombre augmente, & plus aussi les figures rectilignes semblables $BMNO D$, $bmno d$, approchent des segmens BAD , bad , auxquels elles sont inscrites; de sorte qu'elles leur deviennent enfin égales * lorsque chacun des côtés est infiniment petit, & que leur nombre par conséquent est infini. D'où il suit que les segmens semblables BAD , bad , sont entr'eux comme les quarrés de leurs soutendantes BD , bd , qui sont des côtés homologues; & les portions des courbes BAD , bad ; comme ces soutendantes.

* Art. 189.

PROPOSITION I.

Theorème.

FIG. 107. 192. **S** OIENT deux Paraboles AM , am , qui aient deux diamètres semblables AL , aL , situés sur la même droite, en sorte que leurs ordonnées PM , pm , soient parallèles entr'elles; & soit marqué sur cette droite au dedans des Paraboles un point fixe L , tel que LA soit à La , comme le paramètre AG du diamètre AL de la Parabole AM , est au paramètre ag du diamètre aL de la Parabole am . Je dis que si l'on mène du point fixe L à un point quelconque M de la Parabole AM , une ligne droite LM ; elle rencontrera l'autre Parabole am en un point m tel que $LM.Lm :: LA.La$.

Ayant mené l'ordonnée MP , & nommé les données LA , a ; La , b ; AG , p ; & les indéterminées AP , x ;

PM, y ; on aura $LA(a). La, (b) :: AG(p). ag = \frac{bp}{a}$.
 Or si l'on prend sur le diamètre AL de la Parabole am ,
 la partie $ap = \frac{bx}{a}$, & qu'on mene l'ordonnée pm ; il est
 clair * que $\overline{pm}^2 = pa * ag \left(\frac{bbpx}{aa} \right) = \frac{bbyy}{aa}$ en mettant * Art. 6. &
 pour px * sa valeur yy ; & qu'ainsi $pm = \frac{by}{a}$. Donc PM * Ibid.
 $(y). pm \left(\frac{by}{a} \right) :: LP(a-x). Lp \left(b - \frac{bx}{a} \right)$. Et par con-
 séquent la ligne LM passera par le point m extrémité
 de l'ordonnée pm , c'est à dire, qu'elle coupera la Para-
 bole am en ce point. Donc à cause des triangles sembla-
 bles $LP M, Lpm$, on aura $LM. Lm :: PM(y). pm$
 $\left(\frac{by}{a} \right) :: LA(a). La(b)$. Ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE I.

193. SI l'on prend dans la Parabole AM un seg-
 ment quelconque BAD ; & qu'ayant mené les droites
 LB, LD qui rencontrent l'autre Parabole am aux
 points b, d , on tire la soutendante bd : je dis que le seg-
 ment $b a d$ de la Parabole am , est semblable au segment
 BAD de la Parabole AM . Car ayant inscrit dans le
 segment BAD une figure rectiligne quelconque
 $BMNOD$, il est clair que si l'on mene les droites
 LM, LN, LO , qui rencontrent l'autre Parabole aux
 points m, n, o ; les triangles $LB M, L b m$; $LM N$,
 $L m n$; $LN O, L n o$; $LO D, L o d$; $LB D, L b d$, seront
 semblables; & qu'ainsi les côtés BM, bm ; MN, mn ;
 NO, no ; OD, od ; BD, bd ; seront parallèles, & tou-
 jours en même raison chacun à son correspondant;
 puisque toutes les droites LB, LM, LN, LO, LD ,
 sont coupées en même raison aux points b, m, n, o, d .
 D'où l'on voit que les figures rectilignes $BMNOD$,
 $b m n o d$, sont semblables. Or comme il est évident que
 cette démonstration subsiste toujours, telle que puisse
 être la figure rectiligne inscrite dans le segment BAD ;

R ij.

- * Def. 1. il s'ensuit que les segmens BAD , bad , * sont semblables ; & par conséquent * que les Paraboles AM , am , le sont aussi.
- * Def. 2.

COROLLAIRE II.

194. **D**E-LA il est évident que si l'on mène par le point L une double ordonnée EF dans la Parabole AM , laquelle rencontre l'autre Parabole am aux points e , f ; les segmens EAF , eaf ; des deux Paraboles AM , am , seront semblables entr'eux.

COROLLAIRE III.

195. **T**OUTES les Paraboles sont semblables entr'elles ; car si l'on prend sur deux diametres semblables de deux différentes Paraboles, les parties AL , aL , qui soient entr'elles comme les parametres AG , ag ; & si l'on conçoit que le diametre La soit situé sur le diametre LA : en sorte que les points L , L , tombent l'un sur l'autre, & que leurs ordonnées PM , pm , soient parallèles entr'elles : il est clair qu'ayant mené du point fixe L à un point quelconque M de la Parabole AM , une ligne droite LM ; elle rencontrera toujours l'autre Parabole am en un point m tel que LM . $Lm :: LA$. La .

* Art. 193. Donc * &c.

COROLLAIRE IV.

196. **D**E-LA il suit que si l'on prend sur deux diametres semblables de deux différentes Paraboles, les parties AL , aL , qui soient entr'elles comme les parametres de ces diametres, & qu'on tire par les points L , L , les doubles ordonnées EF , ef : les segmens EAF , eaf , des deux Paraboles AM , am , seront semblables entr'eux.

COROLLAIRE V.

197. **S**I deux segmens BAD , bad , sont semblables entr'eux, & que l'un d'eux BAD , soit le segment d'une

Parabole ; je dis que l'autre bad sera le segment d'une autre Parabole, & qu'ainsi il n'y a entre toutes les courbes imaginables que des Paraboles qui puissent être semblables à une Parabole donnée. Car si l'on place le petit segment bad au dedans du grand BAD , en sorte que les soutendantes bd , BD , soient parallèles ; & qu'on inscrive dans l'un & l'autre deux figures rectilignes quelconques semblables $BMNO$, $bmno$: il est clair que les côtés homologues BM , bm ; MN , mn ; &c. de ces deux figures seront parallèles : puisque les angles DBM , dbm ; BMN , $bm n$; &c. sont égaux entr'eux. Or menant LM , LN , LO , par le point de concours L des deux droites Bb , Dd , qui joignent les extrémités des soutendantes parallèles BD , bd , qui sont les deux côtés homologues donnés ; ces droites LM , LN , LO , passeront par les points correspondans m , n , o , où elles seront divisées en même raison que LB l'est en b , ou LD en d ; puisque $BD. bd :: LB. Lb :: BM. bm :: LM. Lm :: MN. Mn :: LN. Ln :: NO. no :: LO. Lo :: OD. od$.

Maintenant si l'on mene par le point L le diamètre LA de la Parabole AM ; qu'on le divise en a , en la même raison que LB l'est en b , ou LD en d ; & qu'on décrive * du diamètre aL , & du paramètre ag qui soit * *Art. 161.* au paramètre AG du diamètre AL de la Parabole AM , comme La est à LA , une Parabole am dont les ordonnées pm soient parallèles aux ordonnées PM de l'autre Parabole : il est évident * qu'elle passera par tous les * *Art. 192.* points b , m , n , o , d , qui divisent dans la raison donnée de BD à bd toutes les droites LB , LM , LN , LO , LD . Or comme ce raisonnement subsiste toujours tel que puisse être le nombre des côtés des figures rectilignes semblables $BMNO$, $bmno$, & de telle grandeur qu'ils puissent être ; il s'ensuit que la Parabole am passe par tout par où le segment bad passe, & qu'ainsi ce segment en est une portion. *Ce qu'il falloit démontrer.*

PROPOSITION II.

Theorème.

FIG. 108.
109.

198. **SOIT** une Ellipse ou Hyperbole AM qui ait pour un de ses premiers diamètres la ligne AH , & pour paramètre de ce diamètre la ligne AG ; & ayant pris sur ce diamètre (prolongé dans l'Hyperbole) un point fixe L , & divisé en même raison aux points a, h , ses parties LA, LH . Soit une autre Ellipse ou Hyperbole am qui ait pour premier diamètre la ligne ah , pour paramètre de ce diamètre la ligne ag qui soit à AG comme ah est AH , & dont les ordonnées pm soient parallèles aux ordonnées PM de l'autre Section AM . Je dis que si l'on mène du point fixe L à un point quelconque M de la Section AM , une ligne droite quelconque LM ; elle rencontrera l'autre Section am , en un point m tel que $LM. Lm :: LA. La$: c'est à dire que toutes les droites tirées du point fixe L aux points de la Section AM , sont divisées en même raison par la Section am .

Il faut prouver que $LM. Lm :: LA. La$.

Ayant mené l'ordonnée MP , & nommé les données LA, a ; La, b ; $AH, 2t$; & les indéterminées AP, x ; PM, y ; on aura $LA(a). La(b) :: LH. Lh :: LH \pm LA$ ou $AH(2t). Lh \pm La$ ou $ab = \frac{2bt}{a}$.

Or si l'on prend sur le diamètre ah de la Section am la partie $ap = \frac{bx}{a}$, & qu'on mène l'ordonnée pm ; il est

*Art. 42. 35. clair * que $AP * PH(2tx \mp xx). \overline{PM}^2(yy) :: AH.$

31. & 118. $AG :: ah. ag :: ap * ph \left(\frac{2bbtx \mp bxx}{aa} \right). \overline{pm}^2 = \frac{bby}{aa},$ &

qu'ainsi $pm = \frac{by}{a}$. Donc $PM(y). pm(\frac{by}{a}) :: LP(a-x).$

$LP(b - \frac{bx}{a})$. Et par conséquent la ligne LM passera

par le point m extrémité de l'ordonnée pm , c'est à dire qu'elle coupera la Section am en ce point. Donc à cause des triangles semblables $LP M, Lpm$, on aura

$LM.Lm :: PM(y).pm(\frac{by}{a}) :: LA(a).La(b)$. Ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE I.

199. SI l'on prend dans la Section AM un segment quelconque BAD , & qu'ayant mené les droites LB , LD , qui rencontrent l'autre Section am aux points b , d , on tire la soutendante bd : je dis que le segment bad de la Section am est semblable au segment BAD de la Section AM ; & partant que si l'on mene par le point L une double ordonnée EF dans la Section AM , laquelle rencontre l'autre Section aux points e , f ; les segmens EAF , eaf , des deux Ellipses ou des deux Hyperboles AM , am , seront semblables entr'eux. Cela se prouve de même que pour la Parabole dans les articles 193. & 194.

COROLLAIRE II.

200. TOUTES les Ellipses ou Hyperboles AM , am , qui ont deux diametres semblables AH , ah , en même raison avec leurs parametres AG , ag , sont semblables entr'elles. Car si l'on prend les parties AL , aL , qui soient entr'elles comme les diametres AH , ah , & que l'on conçoive que le diametre ah soit situé sur le diametre AH , en sorte que les points L , L , tombent l'un sur l'autre, & que les ordonnées pm , PM , soient paralleles entr'elles: il est clair qu'ayant mené du point fixe L à un point quelconque M de la Section AM une ligne droite LM , elle rencontrera toujours l'autre Section am , en un point m tel que $LM.Lm :: LA.La$. Donc * &c.

* Art. 199.

COROLLAIRE III.

201. DE LA il est évident que s'il y a deux Ellipses ou deux Hyperboles AM , am , dont deux diametres semblables AH , ah , soient en même raison avec leurs parametres AG , ag ; & qu'ayant pris les parties AL , aL ,

qui soient entr'elles comme les diametres AH, ah , on tire par les points L, L , les doubles ordonnées EF, ef : il est évident, dis je, que les segmens EAF, eaf , des deux Sections AM, am , sont semblables entr'eux.

COROLLAIRE IV.

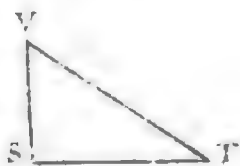
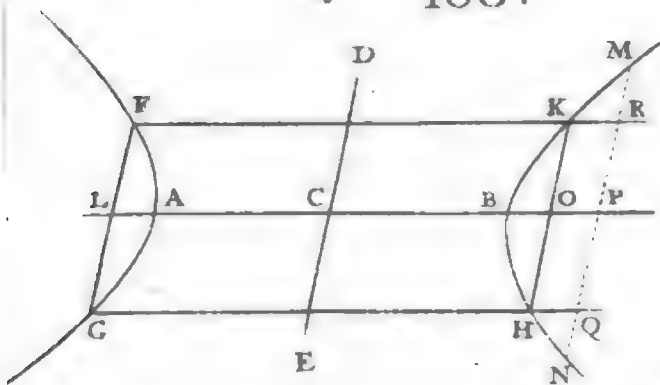
202. **S**i deux segmens BAD, bad , sont semblables entr'eux; & que l'un d'eux soit le segment d'une Ellipse ou d'une Hyperbole AM , qui ait pour un de ses diametres quelconques la ligne AH dont le parametre est AG ; Je dis que l'autre bad sera le segment d'une autre Ellipse ou d'une autre Hyperbole am , qui aura pour l'un de ses diametres semblables à AH , la ligne ah qui sera en même raison avec son parametre ag , que AH avec le sien AG . Car ayant placé le segment bad , au dedans du segment BAD , en sorte que la soutendante bd soit parallele à la soutendante BD , & que les lignes Bb, Dd , concourent en un point L du diametre AH (ce qui est toujours possible), & inscris dans l'un & l'autre deux figures rectilignes quelconques semblables; on prouvera comme dans la Parabole article 197. que les droites LM, LN, LO , passeront par les points correspondans m, n, o , où elles seront divisées en même raison que LB l'est en b , ou LD en d .

Maintenant si l'on divise les parties LA, LH , du diametre AH aux points a, h , en même raison que LB l'est en b ; & qu'on décrive * du diametre ah & du parametre ag qui soit au parametre AG du diametre AH , comme La est à LA , ou ah à AH , une Ellipse ou une Hyperbole am , dans les ordonnées pm soient paralleles aux ordonnées PM de l'autre Ellipse ou Hyperbole AM : il est évident * qu'elle passera par tous les points b, m, n, o, d , qui divisent dans la raison donnée de bd à BD toutes les droites LB, LM, LN, LO, LD . Or comme ce raisonnement subsiste toujours tel que puisse être le nombre des côtés des figures rectilignes semblables.

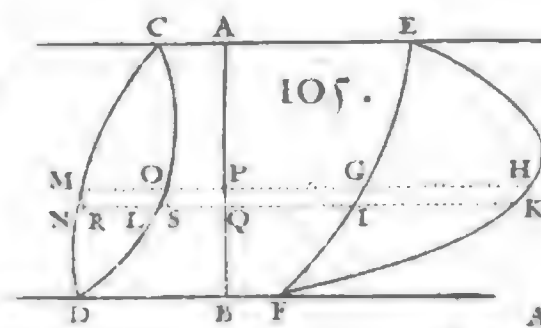
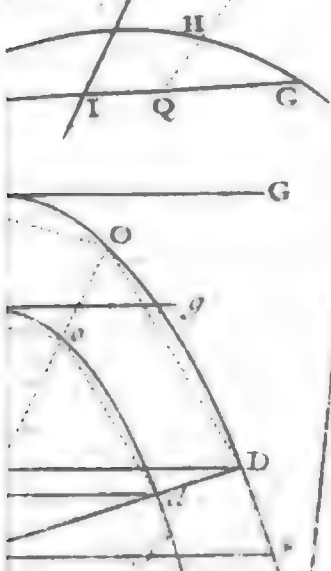
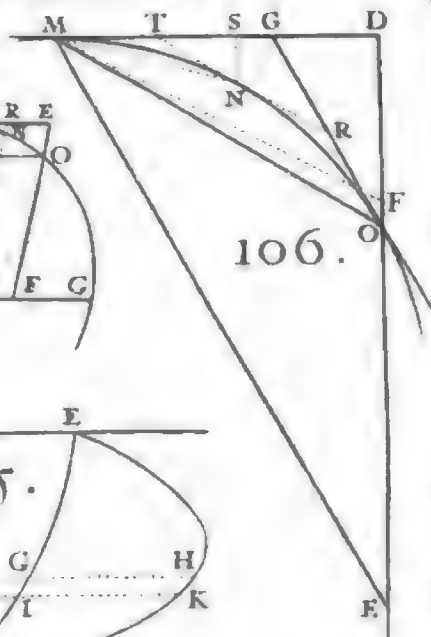
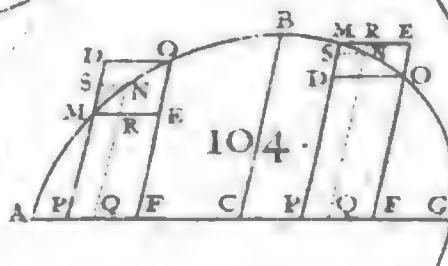
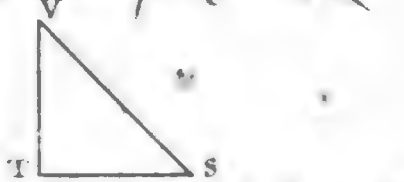
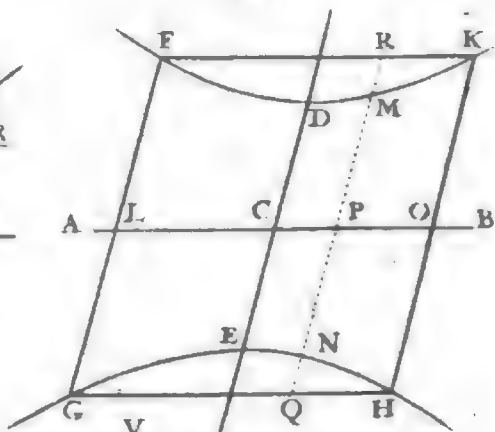
* Art. 161.

* Art. 198.

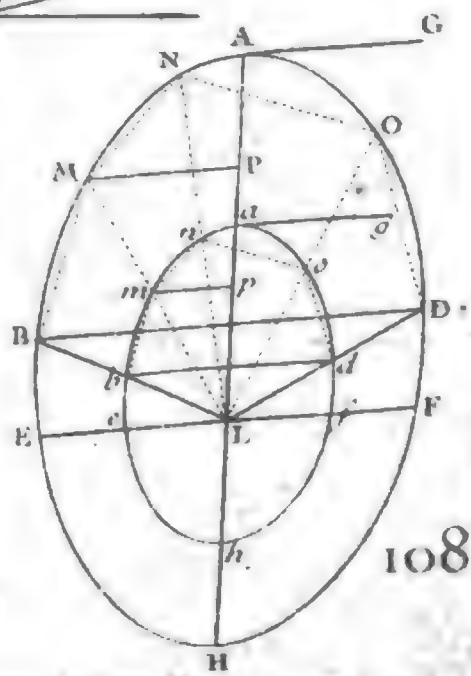
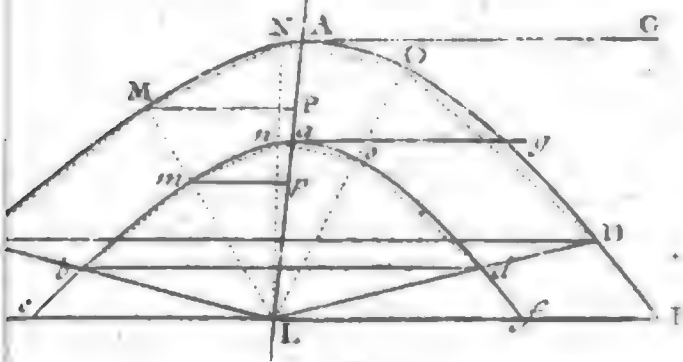
100.



101.



100.



semblables $BMNO D$, $bmnod$, & de telle grandeur qu'ils puissent être ; il s'ensuit que l'Ellipse ou l'Hyperbole am passe par tous les mêmes points par lesquels passe le segment bd , & qu'ainsi ce segment en est une portion. Ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE. V.

203. IL est donc évident que si deux Ellipses ou deux Hyperboles AM , am , sont semblables, & qu'on prenne dans la Section AM un de ses diamètres quelconques AH ; il y aura toujours dans l'autre Section am un diamètre ah semblable à AH , qui aura avec son paramètre ag la même raison que AH avec le sien AG : & qu'ainsi les diamètres semblables AH , ah , seront en même raison avec leurs diamètres conjugués. Or comme dans une Ellipse ou Hyperbole il ne peut y avoir * que deux * *Art. 66.* differens diamètres conjugués qui fassent entr'eux les mêmes angles, & que ces diamètres ne different que par leur position, leur grandeur demeurant la même ; il s'ensuit que dans les Ellipses ou les Hyperboles semblables tous les diamètres conjugués qui feront les mêmes angles, seront entr'eux en même raison ; observant de prendre pour les antécédens de ces deux raisons les plus grands de ces deux diamètres conjugués, & pour conséquens les moindres. *Ch. 128.*

PROPOSITION. III.

Theorème.

204. SI l'on mène dans une Section Conique deux parallèles quelconques BD , EF , terminées par la Section ; & qu'on joigne leurs extrémités par deux droites BE , DF ; je dis que les segments $BMEB$, $DMFD$, compris par des portions de la Section, & par les droites qui joignent les extrémités des parallèles, seront égaux entr'eux. *Fig. 110.*

Car ayant prolongé les soutendantes BE , DF , jusqu'à ce qu'elles se rencontrent en un point G , & ayant mené par ce point & par le point de milieu H de la ligne BD , la droite GH ; il est clair qu'elle divisera par le milieu en K la parallèle EF à BD , comme aussi par le milieu en P un autre parallèle quelconque OO à la même ligne BD . Donc la ligne HK sera un diamètre

- * Art. 146. * qui aura pour ordonnées de part & d'autre les parallèles BD , EF ; & partant si l'on mène par un de ses points quelconques P une parallèle à ces lignes, elle rencontrera * la Section en deux points M , M , également éloignés du point P ; d'où l'on voit que les parties MO , OM , de la même parallèle MM à BD , comprises dans les segmens $BMEB$, $DMFD$, sont toujours égales entr'elles, en quelque endroit que puisse tomber cette parallèle entre les lignes BD , EF . Il est donc évident * que ces deux segmens seront égaux entr'eux.

Si les soutendantes BE , DF , étoient parallèles entr'elles, il faudroit mener par le point de milieu H de la ligne BD une droite HK parallèle à ces soutendantes, & la démonstration demeureroit toujours la même.

COROLLAIRE I.

- FIG. 110. 205. PUISQUE PM est toujours égale à PM ; il s'ensuit 1°. Que les Trapezes Coniques $KHBE$, $KHDF$, sont égaux entr'eux. 2°. (Lorsque la ligne BD au lieu de rencontrer la Section en deux points la touche en un point A) que les Trilignes Coniques AKE , AKF , sont égaux; & qu'ainsi les segmens $AEMA$, $AFMA$, le sont aussi; puisque le triangle AEF est divisé en deux parties égales par le diamètre AK qui passe par le milieu de EF .

COROLLAIRE II.

- FIG. 110. 206. SI la Section étant une Parabole, une Ellipse, ou une Hyperbole, l'on mène par les extrémités des parallèles

BD , EF , les droites BF , DE , qui s'entrecoupent entre ces parallèles ; les segments $BFDAB$, $DEBAD$, seront égaux entr'eux. Car les triangles BFD , BED , qui sont entre les mêmes parallèles BD , EF , & qui ont la même base BD , sont égaux entr'eux ; & partant si l'on ajoute d'une part le segment $DMFD$ plus le segment $BADB$, & de l'autre $BMEB$ égal au segment $DMFD$, plus aussi le même segment $BADB$; les tous $BFDAB$, $DEBAD$, seront égaux entr'eux.

COROLLAIRE III.

270. **D**E-LA on voit comment on peut couper par FIG. 112. un point donné D sur une Section Conique, deux segments $DGED$, $DFBD$, égaux chacun à un segment donné $BEDB$. Car ayant tiré les droites BD , DE , & mené BG parallèle à DE , & EF parallèle à BD , lesquelles rencontrent la Section aux points G , F ; il est clair * en joignant la droite DF , que le segment $DFBD$ est égal au segment $BEDB$, à cause des parallèles DB , EF ; & de même en joignant DG , que le segment $DGED$ est égal au segment $BEDB$, à cause des parallèles BG , DE . * Art. 106.

Si le point donné tomboit sur l'une des extrémités du segment donné que je suppose être à présent $DGED$, il faudroit mener par l'autre extrémité G , une parallèle GF à la tangente qui passe par le point D ; & tirant par le point F où cette parallèle rencontre la Section, & par le point donné D ; la soutendante DF , il est clair que le segment $DFBD$ sera égal au segment donné $DGED$.

Il est visible qu'il ne peut y avoir dans ce dernier cas que le seul segment $DFBD$ qui soit égal au segment donné $DGED$; puisque tout autre segment qui aura pour l'une de ses extrémités le point donné D , sera plus grand ou moindre que le segment $DFBD$, selon que son autre extrémité sera plus proche ou plus éloignée du point D que n'est le point F . D'où il suit que si deux segments $DGED$, $DFBD$, qui ont une extrémité commune D , sont égaux.

S ij

entr'eux ; & que si l'on mene par le point D une parallèle à la droite GF qui joint leurs autres extremités , elle sera tangente en D .

COROLLAIRE IV.

208. **O**N tire du Corollaire précédent une maniere toute nouvelle & fort aisée de mener une Tangente par un point donné D sur une Section Conique donnée.

Car ayant tiré par ce point deux droites quelconques DB, DE , qui rencontrent la Section aux points B, E , on menera par le point B une parallèle BG à DE , & par le point E une parallèle EF à BD , lesquelles rencontrent la Section aux points G, F , que l'on joindra par une ligne droite GF , à laquelle on tirera par le point D une parallèle qui sera la tangente cherchée ; puisque les segments $DGED, DFB D$, étant égaux chacun au même segment $BEDB$, le seront entr'eux.

PROPOSITION IV.

Theorème.

FIG. 113. 209. **S**'IL y a dans une Ellipse , dans une Hyperbole,
114. & 115. ou dans les Hyperboles opposées deux lignes droites BD, EF ,
parallèles entr'elles & terminées par la Section ; & qu'on tire
du centre C les demi-diamètres CB, CE, CD, CF , les Secteurs
Elliptiques ou Hyperboliques CBE, CDF , seront égaux
entr'eux.

Car menant par les points de milieu H, K , des droites BD, EF , le diamètre CK , les triangles CHB, CHD , & CKE, CKF , seront égaux entr'eux ; puisqu'ils ont le même sommet C , & que leurs bases HB, HD , & KE, KF , sont égales. Par conséquent (fig. 114.)
 $KHBE + CBE = CKE - CHB = CKF - CHD =$
 $= KHD + CDF$, & (fig. 113. 115.) $KHBE - CBE$
 $= +CHB + CKE = +CHD + CKF = KHD -$
 $-CDF$. Donc puisque les Trapezes Coniques $KHBE,$

$K H D F$, sont * égaux, il s'ensuit que les Secteurs Ellip- * *Art. 205.*
tiques ou Hyperboliques $C B E$, $C D F$, le seront aussi.

COROLLAIRE I.

210. **S** I la Section est une Ellipse, ou une Hyperbo- *FIG. 113.*
le; & que la ligne $B D$ parallèle à $E F$, devienne tangen- *114.*
te en A ; il est clair que les Secteurs $C A E$, $C A F$, se-
ront égaux entr'eux. Car prolongeant le demi-diametre
 $C A$ jusqu'à ce qu'il rencontre la ligne $E F$ au point K ,
cette ligne sera coupée en deux également en ce point;
& par conséquent les triangles $C K E$, $C K F$, seront
égaux. Or les trilignes Coniques $A K E$, $A K F$, le sont
* aussi. Donc &c. * *Art. 205.*

COROLLAIRE II.

211. **D**E-LA on voit que pour diviser en deux par-
ties égales un Secteur Elliptique ou Hyperbolique quel-
conque $C E F$; il n'y a qu'à mener le demi-diametre $C A$
qui divise par le milieu en K la soutendante $E F$ de ce
Secteur. Ce qui donne encore les Secteurs $C B E$, $C D F$,
égaux entr'eux, en supposant $B D$ parallèle à $E F$. Car
ayant de cette manière les Secteurs $C A E$, $C A F$, &
 $C A B$, $C A D$, égaux entr'eux, les Secteurs $C B E$,
 $C D F$, qui en sont les différences, doivent aussi être
égaux entr'eux.

PROPOSITION V.

Theorème.

212. **S**OIT un demi-cercle $A D H$, qui ait pour diame- *FIG. 116.*
tre le premier ou grand axe $A H$ d'une demi Ellipse $A B H$;
soit menée par un point quelconque P de l'axe $A H$, une per-
pendiculaire à cet axe, qui rencontre l'Ellipse au point M , &
le cercle au point N ; par où & par le centre C soient tirées
les droites $C M$, $C N$. Je dis que le Secteur Elliptique
S iij

CAM est au Secteur circulaire CAN , comme la moitié CB du petit axe de l'Ellipse, est à la moitié CA ou CD du grand.

* Art. 42.
 & 55.

Car par la propriété * de l'Ellipse $\overline{PM}^2 : \overline{CB}^2 :: AP \times PH. AC \times CH$ ou \overline{CA}^2 , & par la propriété du cercle $\overline{PN}^2 : \overline{CD}^2 :: AP \times PH. AC \times CH$ ou \overline{CA}^2 .
 Donc $\overline{PM}^2 : \overline{CB}^2 :: \overline{PN}^2 : \overline{CD}^2$ ou $\overline{PM}^2 : \overline{PN}^2 :: \overline{CB}^2 : \overline{CD}^2$. Et en tirant les racines quarrées, $PM : PN :: CB : CD$ ou CA .

* Art. 186.

Or comme cela arrive toujours en quelque endroit que tombe la perpendiculaire PMN , il s'ensuit * que l'espace Elliptique entier $ABHA$ est au demi cercle $ADHA$, & la portion APM de cet espace à la portion APN du demi cercle, comme CB est à CD ou à CA . Mais le triangle rectangle CPM est au triangle rectangle CPN qui a la même hauteur, comme la base PM est à la base PN , c'est à dire, comme CB est à CD ou à CA ; & par conséquent l'espace Elliptique APM plus ou moins le triangle CPM (plus lorsque AP est moindre que AC , & moins lorsqu'elle est plus grande) c'est à dire, le Secteur Elliptique CAM sera à l'espace circulaire APN plus ou moins le triangle CPN , c'est à dire, au Secteur circulaire CAN , comme CB est à CD ou à CA . Ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE I.

213. COMME le Secteur de cercle CAN est égal au rectangle de l'arc AN par la moitié du rayon CA ou CD ; il s'ensuit que le Secteur Elliptique CAM est aussi égal au rectangle de ce même arc AN par la moitié de CB .

COROLLAIRE II.

214. SI l'on mene par un point quelconque G du grand axe AH autre que le point P , une perpendiculaire à cet axe, qui rencontre l'Ellipse au point E , & le

cercle au point F ; je dis que les Secteurs Elliptiques ACE , ACM , sont entr'eux, comme les Secteurs circulaires ACF , ACN . Car $ACM. ACN :: CB. CD$. Et de même $ACE. ACF :: CB. CD$. Et partant $ACM. ACN :: ACE. ACF$. Et $ACM. ACE :: ACN. ACF$. D'où l'on voit que pour trouver un Secteur Elliptique ACM , qui soit au Secteur Elliptique ACE en raison donnée ; il n'est question que de trouver un Secteur circulaire ACN qui soit en raison donnée au Secteur ACF , ou ce qui est la même chose, de diviser en raison donnée l'arc ANF ou l'angle ACF .

PROPOSITION VI.

Theorème.

215. S'IL y a deux demi-Hyperboles AM , AN , ou BM , DN , qui ayent pour centres le même point C , pour un de leurs demi-diamètres la même droite CA , & pour les deux demi-diamètres conjugués au demi-diamètre CA , deux droites quelconques CB , CD , situées sur la même ligne ; & qu'on mène par un point quelconque P du demi-diamètre CA (prolongé s'il est nécessaire) une droite parallèle à CD , laquelle rencontre les Hyperboles aux points M , N ; par lesquels & par le centre C , soient tirées les droites CM , CN : je dis que les Secteurs Hyperboliques CAM , CAN , ou CBM , CDN , seront entr'eux comme les demi-diamètres conjugués $CB. CD$. FIG. 117. 118.

On aura par la propriété * des deux Hyperboles AM , AN , ou BM , DN , ces deux proportions $\frac{PM}{CB} :: \frac{CP}{CA} \cdot \frac{CA}{CA} :: \frac{PN}{CD}$. Et par conséquent $PM \cdot PN :: CB \cdot CD$. Et en prenant les racines quarrées, $PM. PN :: CB. CD$. Or comme cela arrive toujours en quelque endroit que tombe la parallèle PMN , il s'ensuit * que les espaces Hyperboliques APM , APN , ou $CPMB$, $CPND$, sont entr'eux comme CB est à CD . Mais les triangles CPM , CPN , sont en- * Art. 81. & 118. * Art. 186.

tr'eux, comme leurs bases PM , PN , (puisque'ils sont situés entre les mêmes parallèles CD , PN), ou comme les demi diamètres conjugués CB , CD . Et par conséquent (*fig. 117.*) $CB \cdot CD :: CPM - APM \cdot CPN - APN :: CAM \cdot CAN$. Ou bien (*fig. 118.*) $CB \cdot CD :: CPMB - CPM \cdot CPND - CPN :: CBM \cdot CDN$. Ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE.

216. Si les deux demi diamètres conjugués CA , GD , sont égaux entr'eux, l'Hyperbole AN ou DN sera équilatère. Et si l'on avoit trouvé le moyen de quarrer les Secteurs Hyperboliques CAN , ou CDN , on auroit aussi la quadrature des Secteurs CAM , ou CBM , qui ont pour bases des portions AM , ou BM d'une autre Hyperbole, dont le demi diamètre conjugué CB peut être pris de telle grandeur qu'on veut; puisque le rapport des Secteurs Hyperboliques CAM , CAN , ou CDN , CBM , étant exprimé par les droites CD , CB , est donné. D'où l'on voit que si l'on avoit la quadrature de l'Hyperbole équilatère, on auroit aussi celle de toutes les autres Hyperboles: de même qu'ayant * la quadrature du Cercle, on auroit celle de toutes les Ellipses.

PROPOSITION VII.

Theorème.

FIG. 119. 217. Si l'on prend sur une asymptote CN d'une Hyperbole $EBDF$, deux parties CK , CL , qui soient entr'elles en même raison que deux autres parties quelconques CG , CH , de la même asymptote; & qu'ayant mené les parallèles GF , HD , KB , LE , à l'autre asymptote CP , lesquelles rencontrent l'Hyperbole aux points F , D , B , E , on tire les demi diamètres CF , CD , CB , CE : je dis que les deux Secteurs

Secteurs Hyperboliques CBE , CDF , *seront égaux entr'eux.*

Ayant mené les deux droites BD , EF , qui rencontrent les asymptotes aux points M , O , N , P ; les parallèles KB , HD , donneront cette proportion, $MB. MK :: DO. CH$. Les parallèles LE , GF , donneront aussi cette autre proportion, $NE. NL :: FP. CG$. Et partant puisque $MB = DO$, & $NE = FP$, il s'ensuit que $MK = CH$, * *Art. 95.* & $NL = CG$. Or par la supposition CG ou LN . CH ou $KM :: CK. CL :: LE. KB$. Et partant $LN. LE :: KM. KB$. Donc les lignes NE , MB , c'est à dire, les deux droites EF , BD , dont elles font parties, seront parallèles entr'elles. Donc * les Secteurs Hyperboliques CBE , * *Art. 109.* CDF , sont égaux entr'eux. *Ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE I.

218. Si les parties CK , CL , de l'asymptote CN , sont en même raison que deux parties quelconques CS , CT de l'autre asymptote CP ; & qu'on mene les parallèles KB , LE , à l'asymptote CP , & les parallèles SD , TF , à l'autre asymptote CN ; il est clair que les Secteurs Hyperboliques CDF , CBE , seront aussi égaux entr'eux. Car ayant mené les parallèles FG , DH , à l'asymptote CP , on aura * $CG. CH :: HD$ ou CS . * *Art. 100.* GF ou CT * :: $CK. CL$. Donc &c. * *Hyp.*

COROLLAIRE II.

219. Si l'on prend sur la même asymptote la partie CK troisième proportionnelle à deux parties quelconques CG , CH ; on prouvera par un raisonnement semblable à celui du Theorème que la ligne BF est parallèle à la tangente qui passe par le point D ; & qu'ainsi * * *Art. 110.* les Secteurs Hyperboliques CFD , CDB , sont égaux entr'eux. D'où il suit que si l'on prend sur une asymptote autant de parties qu'on voudra CG , CH , CK , CL , &c. en progression geometrique continuë, d'où partent les parallèles GF , HD , KB , LE , &c. à l'au-
T.

tre asymptote, les Secteurs Hyperboliques CFD , $CD\mathcal{E}$, CBE , &c. seront tous égaux entr'eux.

COROLLAIRE III.

220. **D**E LA on voit que si CH est la première de deux moyennes geometriquement proportionnelles entre les extrêmes CG , CL ; & qu'on tire les droites GF , HD , LE , paralleles à l'autre asymptote; le Secteur CDF , sera au Secteur CFE , comme 1 est à 3. De même, si CH est la première de trois moyennes proportionnelles entre CG , CL ; le Secteur CDF sera au Secteur CFE , comme 1 est à 4. Et en général, si la lettre m marque un nombre entier quelconque, & que GH soit la première d'autant de moyennes proportionnelles entre les extrêmes CG , CL , que le nombre $m - i$ contient d'unités; le Secteur CDF , sera au Secteur CFE , comme i est au nombre m .

REMARQUE.

221. **O**N peut ici donner une idée fort exacte de ce qu'on appelle *Logarithmes* dans l'Arithmetique, & de l'extrême facilité qu'ils apportent au calcul, lorsqu'il s'agit d'operer sur de fort grands nombres. Voici comment:

Si l'on suppose que CG , exprime l'unité, & que CL étant decuple de CG , c'est à dire, 10, le Secteur Hyperbolique CFE , soit divisé en 10000000000 parties égales. Et si l'on compose une table divisée en deux colonnes, dont la première renferme de suite tous les nombres naturels 1, 2, 3, 4, 5, 6, &c. & l'autre des nombres artificiels, placés vis-à-vis, & qui soient tels que CH , exprimant un nombre quelconque naturel, le nombre artificiel placé vis-à-vis, exprime le nombre des parties que le Secteur Hyperbolique CDF contient par rapport au nombre des parties que contient le Secteur

$C F E$: les nombres artificiels seront appelés les *Logarithmes* des nombres naturels auxquels ils répondent. Cela posé,

1°. Si l'on propose de multiplier deux nombres naturels quelconques $C H$, $C K$, l'un par l'autre, il n'y aura qu'à prendre dans la table leurs Logarithmes qui expriment les Secteurs $C F D$, $C F B$, & ajoutant ensemble ces deux Logarithmes, on aura le Logarithme qui exprime le Secteur $C F E$, vis-à-vis duquel sera placé le nombre naturel $C L$ produit de la multiplication des deux nombres $C H$, $C K$.

2°. Si l'on propose de diviser le nombre $C L$ par le nombre $C K$, il n'y aura qu'à retrancher le Logarithme $C F B$ du Diviseur $C K$, du Logarithme $C F E$ du nombre à diviser $C L$, pour avoir le Logarithme $C B E$ ou $C F D$ du quotient $C H$.

3°. Si l'on propose d'extraire une racine quelconque du nombre $C L$, par exemple la cubique, il n'y aura qu'à diviser son Logarithme $C F E$ en trois parties égales, pour avoir le Logarithme $C F D$ vis-à-vis duquel est placé le nombre $C H$, qui est la racine cubique cherchée.

Tout cela est une suite de ce que les Secteurs Hyperboliques $C F D$, $C B E$, sont égaux entr'eux, lorsque $C G. C H :: C K. C L$. Et que les Secteurs $C F D$, $C D B$, $C B E$, &c. sont aussi égaux entr'eux, lorsque $C G. C H :: C H. C K :: C K. C L ::$ &c. Il est donc évident que par le moyen de cette table, on pourra abréger extrêmement les opérations de l'Arithmétique, lorsqu'il s'agit d'opérer sur de grands nombres, comme dans les calculs Astronomiques.

Comme l'on n'a pû jusqu'à présent trouver en nombres exacts, le rapport des Secteurs Hyperboliques $C F D$, $C F B$, &c. au Secteur $C F E$, on s'est contenté d'exprimer ce rapport en nombres fort approchant; & par le moyen de ces nombres qu'on appelle *Artificiels*, & des nombres naturels qu'on a pla-

cés vis-à-vis, on a composé la Table des Logarithmes qui a les propriétés qu'on vient d'expliquer. Or dans la supposition que le Secteur CFE Logarithme de CL (10) contient 10000000000 parties égales, on trouvera que le parallélogramme $CGFT$ contient plus de 4342944818 de ces parties, & moins de 4342944819. D'où l'on voit qu'un Secteur Hyperbolique quelconque CBF , est au parallélogramme $CGFT$ à peu près comme le Logarithme du nombre CK trouve dans la Table, est au nombre 4342944819, & cela en prenant les Logarithmes de dix caractères outre le caractéristique.

PROPOSITION VIII.

Theorème.

FIG. 120. 222. S'il y a sur chaque asymptote deux parties CG , CL , & CR , CS , qui soient telles que $\sqrt[m]{CG} \cdot \sqrt[n]{CL} :: \sqrt[n]{CR} \cdot \sqrt[m]{CS}$; & qu'on tire les droites GF , LE , RT , SV , parallèles aux asymptotes: je dis que le Secteur CFE , sera au Secteur CTV , comme m est à n . Les lettres m & n marquent des nombres entiers quelconques.

Car si l'on fait $\sqrt[m]{CG} \cdot \sqrt[n]{CL} :: CG \cdot CH$. Et $\sqrt[n]{CR} \cdot \sqrt[m]{CS} :: CR \cdot CQ$. Et qu'on tire les droites HD , QN , parallèles aux asymptotes; il est clair que les Secteurs Hyperboliques CFD , CTN , seront égaux * entr'eux, * *Art. 218.* puisque * $CG \cdot CH :: CR \cdot CQ$. Or selon la nature des Progreffions geometriques, la ligne CH sera la première d'autant de moyennes proportionnelles entre CG & CL que le nombre $m-i$ contient d'unités, & de même la ligne CQ sera la première d'autant de moyennes proportionnelles entre CR & CS que le nombre $n-i$ contient d'unités. Donc * $CFE \cdot CFD :: m \cdot i$. Et CTN ou $CFD \cdot CTV :: i \cdot n$. Et par conséquent le Secteur CFE est au Secteur CTV en raison composée de m à i , & de i à n , c'est à dire, comme le nombre m est au nombre n . Ce qu'il falloit démontrer.

* *Hyp.*

* *Art. 220.*

COROLLAIRE.

223. D E-LA on voit qu'un Secteur Hyperbolique $C F E$ étant donné avec un point quelconque T de l'Hyperbole, il ne faut pour trouver un autre point V de la même Hyperbole, tel que le Secteur $C F E$ soit au Secteur $C T V$, comme m est à n , que prendre $C S$ en sorte que $\sqrt[m]{C G} \cdot \sqrt[n]{C L} :: \sqrt[m]{C R} \cdot \sqrt[n]{C S}$, ou (ce qui revient au même) $\sqrt[m]{C G} \cdot \sqrt[n]{C L} :: C R \cdot C S$. C'est à dire, qu'il faut prendre $C R = C R \times \sqrt{\frac{C L}{C G}}$.

PROPOSITION IX.

Theorème.

224. S I l'on mene par les extrémités B, F , d'un Secteur Hyperbolique quelconque $C B F$, les droites $B K, F G$, parallèles à une asymptote $C S$, & terminées par l'autre $C L$; je dis que le Secteur Hyperbolique $C B F$ est égal à l'espace hyperbolique $B K G F$ compris entre les parallèles $B K, F G$, à une asymptote $C S$, la partie $G K$ de l'autre asymptote $C L$, & la portion $B F$ de l'Hyperbole. FIG. 121.

Car si l'on retranche des triangles égaux * $C K B$, * $C G F$, le même triangle $C G A$ (le point A est le point d'intersection des deux droites $F G, C B$) & qu'on ajoute aux deux restes $B K G A, C A F$, le même espace hyperbolique $B A F$, on formera d'une part l'espace $B K G F$, & de l'autre le Secteur $C B F$ qui seront égaux entr'eux. Ce qu'il falloit démontrer. * Art. 99.

COROLLAIRE I.

225. S I l'on eut mené les lignes $B Q, F O$, parallèles à l'asymptote $C L$, & terminées par l'asymptote $C S$, on auroit prouvé de même que le Secteur Hyperbolique

T iij

CBF est égal à l'espace hyperbolique $BQOF$; d'où l'on voit que les espaces ou Trapezes hyperboliques $BKGF$, $BQOF$, sont égaux entr'eux.

COROLLAIRE II.

226. DE-LA il est évident que tout ce qu'on vient de démontrer dans les articles 217, 218, 219, 220, 221, 222, & 223, des Secteurs Hyperboliques, se doit aussi entendre de ces sortes de Trapezes ; puisqu'ils leurs sont égaux.

PROPOSITION X.

Theorème.

FIG. 122. 227. SOIENT deux différentes Hyperboles BMF , HND , qui ayent les mêmes asymptotes CL , CS , & soient menées par deux points quelconques G , K , d'une asymptote deux parallèles GDF , KHB , à l'autre. Je dis que l'espace hyperbolique $HKGD$ est à l'espace hyperbolique $BKGF$, comme la puissance de l'Hyperbole HND , est à la puissance de l'Hyperbole BMF .

Car ayant mené par un point quelconque P de la partie GK , une parallèle aux deux droites GD , KH , laquelle rencontre l'Hyperbole BMF au point M , & l'Hyperbole HND au point N ; & nommé la puissance de l'Hyperbole HND , aa ; celle de l'Hyperbole BMF , bb ; & l'indéterminée CP , x ; on aura

* Art. 101. * $PN = \frac{aa}{x}$, & $PM = \frac{bb}{x}$; & partant $PN. PM :: aa. bb$.

Or comme cela arrive toujours en quelque endroit de la partie GK que tombe le point P ; il s'ensuit * que l'espace hyperbolique $HKGD. BKGF :: aa. bb$. Ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE.

228. LORSQUE les puissances des Hyperboles HND , BMF , sont entr'elles comme le nombre m est au nom-

bre n ; on pourra toujours trouver dans l'Hyperbole HND un Trapeze hyperbolique $RSVT$ égal à un Trapeze hyperbolique $GKBF$ de l'autre BMF , les droites CG, CK, CR , étant données. Car il est clair * que le * Art. 222.
 Trapeze $GKHD$ est au Trapeze $GKBF$, comme m est ϕ 225.
 à n ; & qu'ainsi toute la difficulté se réduit à trouver dans
 la même Hyperbole HND , le Trapeze $RSVT$, qui
 soit au Trapeze $GKHD$, comme le nombre n est au
 nombre m : & c'est ce qui se fera * en prenant CS , telle * Art. 223.
 que $\sqrt{CG} \cdot \sqrt{CK} :: CR \cdot CS$. ϕ 226.

DÉFINITIONS.

4.

Soit une ligne droite indéfinie AC , qui ait pour ori- FIG. 113.
 gine le point fixe A ; & soit une ligne courbe AMB
 telle qu'ayant mené d'un de ses points quelconques M
 une droite MP qui fasse avec AC un angle donné
 APM , & ayant nommé les indéterminées AP, x ;
 PM, y ; on ait toujours $ax = yy$ (la lettre a marque une
 ligne donnée) : il est clair * dans cette supposition que la * Art. 19.
 ligne courbe AMB est une Parabole qui a pour dia-
 metre la ligne AC , pour une ordonnée à ce diamètre
 la droite PM , & pour parametre de ce diamètre la don-
 née a . Mais si l'on suppose à présent que la nature de la
 courbe AMB soit exprimée par l'équation $y' = aax$,
 ou par cette autre $y' = axx$; cette ligne courbe sera
 nommée *Parabole cubique* ou *du troisième degré* ; parce
 que celle des deux indéterminées x ou y , dont la puissan-
 ce est la plus élevée, monte au troisième degré. De mê-
 me si l'équation est $y' = a'x$, ou $y' = ax'$; la ligne cour-
 be AMB est appelée *Parabole du quatrième degré* ; parce
 que l'indéterminée y dont la puissance est la plus haute,
 monte au quatrième degré. Il en est ainsi de toutes les
 autres à l'infini.

5.

Soit comme dans la définition précédente une ligne FIG. 114.
 droite AC qui ait pour origine le point fixe A ; & soit

une ligne courbe BM , telle qu'ayant mené d'un de ses points quelconques M la droite MP qui fasse avec AC un angle donné APM , & ayant nommé AP , x ; PM , y ; on ait toujours $xy = aa$ (la lettre a marque une ligne donnée): il est clair * que cette ligne courbe sera une Hyperbole, qui aura pour l'une de ses asymptotes la ligne AC , & pour l'autre, la ligne AD parallèle à PM , & dont la puissance sera le quarré aa . Mais si l'équation qui exprime la nature de la courbe BM est $xy = a'$; cette ligne courbe sera nommée *Hyperbole cubique* ou *du troisième degré*, parce que le produit xy des deux indéterminées x & y , a trois dimensions. De même, si l'équation étoit $x'y = a''$; la ligne courbe BM feroit une *Hyperbole du quatrième degré*; parce que le produit $x'y$ a quatre dimensions. Il en est ainsi de toutes les autres à l'infini.

COROLLAIRE I.

FIG. 123. 229. SI l'on suppose que la lettre m marque un nombre entier quelconque qui soit l'exposant de la puissance de l'indéterminée $AP(x)$; & de même que la lettre n marque l'exposant de la puissance de l'autre indéterminée $PM(y)$: il est clair que l'équation $y^m = x^n \times a^{m-n}$ (ou simplement $y^m = x^n$, en faisant pour abréger la donnée $a=1$) exprimera la nature des Paraboles de tous les degrés à l'infini. On voit de même que l'équation $x^m y^n = a^{m+n}$ (ou simplement $x^m y^n = 1$, en faisant $a=1$) exprime en general la nature des Hyperboles de tous les degrés à l'infini.

COROLLAIRE II.

230. SI l'on mene par l'origine fixe A de la ligne AC une ligne droite indéfinie AD parallèle à PM ; & qu'ayant tiré MK parallèle à AC , qui rencontre AD au point K , on nomme les indéterminées AK , x ; KM , y ; il

il est clair que l'indéterminée x qui exprimoit auparavant la ligne AP ou MK , devient à présent y ; & qu'au contraire y qui exprimoit PM ou AK , devient à présent x . D'où il suit.

1°. Que si la courbe AMB est une Parabole ordinaire. FIG. 123.
 re, elle aura pour équation $yy = ax$ ou $xx = ay$, selon qu'on rapportera les points à ceux de la ligne AC ou AD ; & de même que la Parabole cubique qui a pour équation $y^3 = axx$ lorsqu'on rapporte les points à ceux de la ligne AC , aura pour équation $x^3 = aay$ lorsqu'on les rapporte à ceux de la ligne AD ; & en general que si la ligne courbe AMB a pour équation $y^n = x^m a^{n-m}$ étant rapportée à la ligne droite AC , cette même courbe aura pour équation $x^n = y^m a^{n-m}$ (l'on suppose que n surpasse m) étant rapportée à la ligne AD .

2°. Que l'Hyperbole ordinaire a toujours la même FIG. 124.
 équation $xy = aa$, soit qu'on la rapporte à la ligne AC ou à la ligne AD ; que l'Hyperbole cubique qui a pour équation $xxxy = a^3$ étant rapportée à AC , aura pour équation $xyy = a^3$ étant rapportée à l'autre ligne AD ; & en general que l'Hyperbole qui a pour équation $x^ny^n = a^{n+m}$ lorsqu'on rapporte les points à ceux de la ligne AC , aura pour équation $x^ny^n = a^{n+m}$ lorsqu'on les rapporte à ceux de la ligne AD .

COROLLAIRE III.

231. D E-LA il est évident qu'il y a deux Paraboles cubiques dont l'une a pour équation $y^3 = aax$ ou $x^3 = aay$, & l'autre $y^3 = axx$ ou $x^3 = ayy$; au lieu qu'il n'y a qu'une seule Hyperbole cubique $xxxy = a^3$ ou $xyy = a^3$. Car les indéterminées x & y ne peuvent être combinées que des quatre premières manières pour exprimer les Paraboles cubiques ou du troisième degré; & des deux secondes pour exprimer les Hyperboles cubiques. Or comme les quatre premières égalités appartiennent à deux différentes courbes, & les deux secondes à la même; il s'ensuit, &c. On peut trouver par

V.

la même voie le nombre des Paraboles ou des Hyperboles du quatrième, cinquième degré, &c.

COROLLAIRE IV.

FIG. 124. 232. **N**ON-SEULEMENT l'Hyperbole ordinaire a pour asymptotes les lignes droites indefinies AC , AD ; mais encore celle de tous les degrés à l'infini. Car soit l'équation generale $x^m y^n = a^{m+n}$ ou $y^n = \frac{a^{m+n}}{x^m}$ ($AP = x$, $PM = y$) qui exprime la nature de telle Hyperbole qu'on voudra, lorsqu'on rapporte ses points à ceux de la ligne AC ; il est manifeste que plus AP (x) augmente, plus au contraire y^n , & par conséquent PM (y) diminue; de sorte que x étant infiniment grande, PM (y) devient nulle ou zero: c'est à dire que l'Hyperbole BM & la ligne AC , étant prolongées l'une & l'autre à l'infini, s'approchent toujours de plus en plus jusqu'à ce qu'enfin elles se joignent dans l'infini même; ce qui constitue l'essence d'une asymptote. Maintenant si l'on rapporte les points de la même Hyperbole à ceux de la ligne AD , on aura $x^n y^m = a^{m+n}$ ou $y^m = \frac{a^{m+n}}{x^n}$ ($AK = x$, $KM = y$); d'où il suit que plus AK (x) devient grande, plus au contraire KM (y) devient petite, & cela à l'infini; & qu'ainsi la ligne AD est encore une asymptote de la même Hyperbole.

PROPOSITION XI.

Problème.

FIG. 123. 233. **S**OIT proposé de mener d'un point donné M sur la seconde Parabole cubique AMB , dont la nature est exprimée par l'équation $y^3 = axx$, la tangente MT .

Ayant supposé l'arc MN infiniment petit, & mené NQ parallele à PM , & MR parallele à AC : le petit triangle MNR sera semblable au grand TPM ; puisque le

petit arc MN peut être regardé * comme la prolon- * *Art. 189.*
 gation de la tangente TM . Cela posé, on nommera la
 soustangente cherchée TP , s ; & la petite droite PQ ou
 MR , e ; ce qui donnera $RN = \frac{e^2}{s}$, à cause des trian-
 gles semblables TPM , MRN . Or si l'on met le cube
 de QN ($y + \frac{e^2}{s}$) à la place de y^3 dans l'équation y^3
 $= axx$ qui exprime la nature de la courbe AMB ;
 & à la place de xx , le quarré de AQ ($x + e$): il est é-
 vident qu'on formera une équation $y^3 + \frac{3ey^2}{s} + \frac{3ee^2}{ss}$
 $+ \frac{e^3}{s^3} = axx + 2eax + eea$ qui exprimera le rap-
 port de AQ à QN . Et si l'on retranche par ordre des
 deux membres de cette dernière équation ceux de la
 première, & qu'on divise ensuite par e , on trouvera $\frac{3y^2}{s}$
 $+ \frac{3ey^2}{ss} + \frac{ee^2}{s^3} = 2ax + ea$; dans laquelle effaçant tous
 les termes où e se rencontre, parce que $PQ(e)$ étant
 infiniment petite ou nulle, ces termes sont nuls par rap-
 port aux autres; il vient enfin $\frac{3y^2}{s} = 2ax$; & partant
 $PT(s) = \frac{3y^2}{2ax} = \frac{3}{2}x$ en mettant pour y^3 sa valeur axx .
Ce qu'il falloit trouver.

REMARQUE.

234. Si l'on fait attention sur le calcul précédent, on
 verra avec évidence qu'en substituant à la place de la puis-
 sance de y , une pareille puissance de $y + \frac{e^2}{s}$, on n'a besoin
 que des deux premiers termes de cette puissance. Car
 tous les autres étant multipliés par les puissances de e ,
 ils renferment chacun e , ou des puissances de e , dans
 la dernière équation que l'on trouve à la fin de l'opéra-
 tion; & doivent par conséquent être effacés. Il en est de
 même lorsqu'on substitue à la place de la puissance de x ,
 une pareille puissance de $x + e$. Mais si l'on forme de suite

V. ij

toutes les puissances du binome $x + e$, on aura pour les deux premiers termes de la seconde puissance $x^2 + 2ex$; de la troisième $x^3 + 3exx$; de la quatrième $x^4 + 4ex^2$; de la cinquième $x^5 + 5ex^3$; & ainsi de suite à l'infini. De sorte que les deux premiers termes d'une puissance quelconque m de $x + e$, seront $x^m + m e x^{m-1}$. On trouvera de même que les deux premiers termes d'une puissance quelconque n du binome $y + \frac{e y^n}{n}$, seront $y^n + \frac{n e y^n}{n}$.

COROLLAIRE.

235. **D**E-LA on voit que pour trouver une expression générale de la sous-tangente $PT (s)$ des Paraboles de tous les degrés à l'infini; il n'y aura qu'à se servir de l'équation générale $y^m = x^m a^{m-1}$, ou (prenant a pour l'unité) $y^m = x^m$ qui exprime la nature de toutes ces Paraboles. Voici comment.

On mettra dans l'équation générale $y^m = x^m$ à la place de y^n , les deux premiers termes de la puissance n de $y + \frac{e y^n}{n}$, c'est à dire, $y^n + \frac{n e y^n}{n}$; & de même à la place de x^m , les deux premiers termes de la puissance m de $x + e$, c'est à dire, $x^m + m e x^{m-1}$: ce qui donnera $y^n + \frac{n e y^n}{n} = x^m + m e x^{m-1}$. Et retranchant par ordre les membres de la première équation de ceux de celle-ci, & divisant ensuite par e , l'on aura $\frac{n y^n}{n} = m x^{m-1}$; & partant $s = \frac{n y^n}{m x^{m-1}} = \frac{n}{m} x$ en mettant pour y^n sa valeur x^m .

PROPOSITION XII.

Problème.

FIG. 124. 236. **M**ENER les tangentes des Hyperboles de tous les degrés à l'infini.

La même préparation étant faite que dans la propo;

sition précédente , on mettra dans l'équation générale $x^m y^n = a^{m+n}$ qui exprime le rapport de $AP(x)$ à $PM(y)$, à la place de x^m les deux premiers termes de la puissance m de $AQ(x+c)$ c'est à dire , $x^m + me x^{m-1}$; & de même à la place de y^n les deux premiers termes de la puissance n de $QN(y-\frac{c}{s})$ c'est à dire $y^n - \frac{ney^n}{s}$: ce qui par la multiplication donne cette autre équation $x^m y^n + me y^n x^{m-1} - \frac{ney^n x^m}{s} - \frac{mneey^n x^{m-1}}{s} = a^{m+n}$ qui exprimera le rapport de AQ à QN . Et retranchant par ordre des deux membres de cette dernière équation , ceux de la première ; & divisant ensuite par ey^n ; il vient $mx^{m-1} - \frac{nx^n}{s} - \frac{mne x^{m-1}}{s} = 0$; dans laquelle équation effaçant le terme $-\frac{mne x^{m-1}}{s}$ qui est nul par rapport aux deux autres , parce qu'il renferme dans son expression la ligne infiniment petite ou nulle $PQ(c)$, on trouve en transposant à l'ordinaire $PT(s) = \frac{nx^n}{mx^{m-1}} = \frac{n}{m}x$.

COROLLAIRE.

237. IL est donc évident que pour mener la Tangente MT d'un point donné M sur une Parabole ou une Hyperbole de tel degré qu'on voudra ; dont l'équation est pour la Parabole $y^n = x^m a^{n-m}$, & pour l'Hyperbole $x^m y^n = a^{m+n}$: il ne faut que prendre la soutangente $PT = \frac{n}{m} AP$ du même côté du point A par rapport au point P , lorsque c'est une Parabole ; & du côté opposé , lorsque c'est une Hyperbole.

 FIG. 123.
& 124.


PROPOSITION XIII.

Theorème.

FIG. 125.

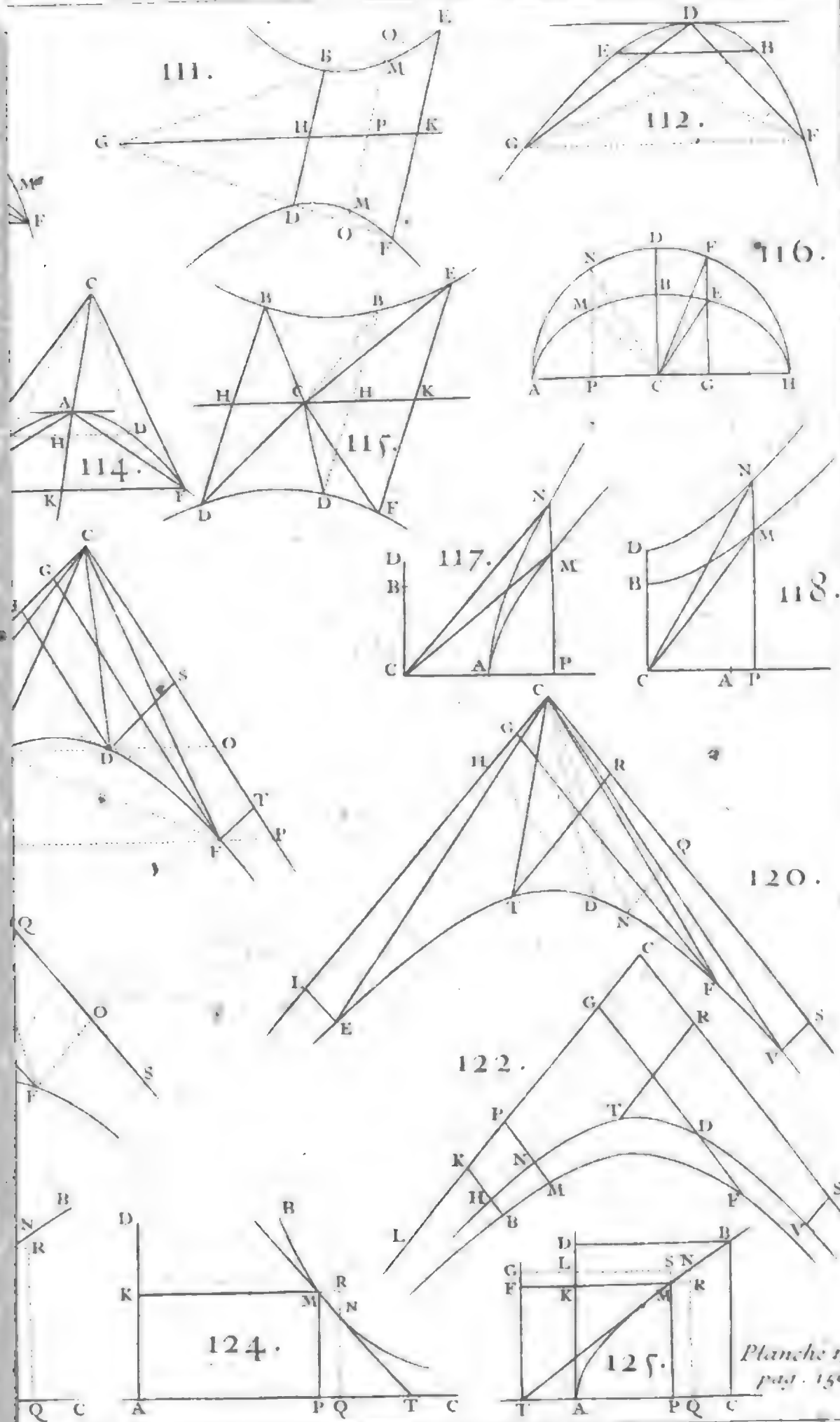
238. SOIT comme dans la définition quatrième, une Parabole AMB de tel degré qu'on voudra, dont la nature est exprimée par l'équation $y^n = x^m a^{n-m}$: soit menée d'un de ses points quelconques B la droite BC qui fasse avec AC l'angle donné ACB , & soit achevé le parallélogramme $ACBD$. Je dis que le parallélogramme circonscrit $ACBD$ est à l'espace Parabolique $ACBMA$ compris par les droites AC, CB , & par la portion de Parabole AMB ; comme $m + n$ est à n .

Il faut prouver que $ACBD. ACBMA :: m + n. n$.

Ayant supposé sur la portion de Parabole AMB l'arc MN infiniment petit, où si l'on aime mieux, indéfiniment petit, c'est à dire, moindre qu'aucune portion donnée de la Parabole, si petite qu'elle puisse être; & mené les droites MP, NQ , parallèles à BC , & MK, NL , parallèles à AC ; lesquelles forment par leurs rencontres le petit parallélogramme $MRNS$: on tirera la tangente MT qui rencontre le diamètre AC au point T , par où l'on menera une parallèle à CB , qui rencontre les lignes MK, NL , aux points F, G . Cela fait,

* Art. 189. on regardera * le petit arc MN comme l'un des petits côtés du Polygone qui compose la portion de Parabole AMB , & la tangente MT comme le prolongement de ce petit côté; de sorte que l'on a deux triangles rectilignes NRM, MPT , qui sont semblables: c'est pourquoi NR ou $MS. RM :: MP. PT$ ou MF . Et partant le parallélogramme $PMRQ$ est égal au parallélogramme $FMSG$; puisque les angles PMR, FMS , sont égaux, & que les côtés autour de ces angles sont reciproquement proportionnels.

* Art. 137. Or * MF ou $PT = \frac{n}{m} AP$ ou $\frac{n}{m} MK$. Donc aussi le parallélogramme $FMSG$ ou son égal $PMRQ = \frac{n}{m} KMSL$. Et comme cela arrive toujours en quel-





que endroit de la portion de Parabole AMB que tombe le petit arc MN ; il s'ensuit que la somme de tous les petits parallelogrammes $PMRQ$, c'est à dire, * le * *Art. 184.*

Triligne parabolique $ACBMA = \frac{n}{m} ADBMA$ somme de tous les petits parallelogrammes $\frac{n}{m} KMSL$. On aura donc $ADBMA. ACBMA :: m. n$. Et par conséquent $ADBMA + ACBMA$ ou $ACBD. ACBMA :: m + n. n$. Ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE.

239. DE LA il est évident que le Triligne parabolique APM est au parallelogramme circonscrit $APMK$, comme n est à $m + n$: & qu'ainsi le Trapeze parabolique $MPCB = \frac{n}{m+n} ABCD - \frac{n}{m+n} APMK$; puisque $ACBMA = \frac{n}{m+n} ACBD$, & $APM = \frac{n}{m+n} APMK$.

PROPOSITION XIV.

Theorème.

240. SOIT comme l'on a expliqué dans la définition *Fig. 116* cinquième, une Hyperbole $BM O$ de tel degré qu'on voudra, dont la nature est exprimée par l'équation $x^m y^n = a^{m+n}$; soit menée d'un de ses points quelconques B la ligne BC parallele à l'une des asymptotes AD , & terminée par l'autre en C ; & soit achevé le parallelogramme $ACBD$. Je dis que ce parallelogramme inscrit $ACBD$ est à l'espace hyperbolique $ECBMO$ renfermé par la droite déterminée BC , par la ligne CE prolongée à l'infini du côté de E , & par la portion d'Hyperbole $BM O$, prolongée aussi à l'infini du côté de O , comme $m - n$ est à n .

Il faut prouver que $ACBD. ECBMO :: m - n. n$.

La même preparation étant faite que dans la proposition précédente, on prouvera de la même maniere que le petit parallelogramme $PMRQ = \frac{n}{m} KMSL$.

Or comme cela arrive toujours en quelque endroit de la portion d'Hyperbole BMO que tombe le petit arc MN ; il s'ensuit que la somme de tous les petits parallelogrammes $PMRQ$, c'est à dire, * l'espace $ECBMO = \frac{n}{m} EADBMO$ somme de tous les petits parallelogrammes $\frac{n}{m} KMSL$. On aura donc $EADBMO. ECBMO :: m. n$; & partant $EADBMO - ECBMO$, ou $ACBD. ECBMO :: m - n. n$. Ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE I.

241. DE-LA il est évident que le Trapeze hyperbolique $CPMB = \frac{n}{m-n} ACBD - \frac{n}{m-n} APMK$; puisque $ECBMO = \frac{n}{m-n} ACBD$, & que par la même raison l'espace $EPMO = \frac{n}{m-n} APMK$.

COROLLAIRE II.

242. DE-LA il suit :

1°. Que lorsque m surpasse n , le rapport du parallelogramme inscrit $ACBD$ à l'espace $ECBMO$ indéfiniment étendu du côté de E , sera toujours exprimé par des nombres positifs ; & qu'ainsi on aura toujours dans ce cas la quadrature absolue de cet espace.

2°. Que lorsque $m = n$, ce qui arrive dans l'Hyperbole ordinaire ; on trouve que le parallelogramme $ACBD$ est à l'espace hyperbolique $ECBMO$, comme zero est à l'unité : c'est à dire que cet espace est infini par rapport au parallelogramme inscrit $ACBD$.

3°. Que lorsque m est moindre que n , le parallelogramme inscrit $ACBD$ sera à l'espace hyperbolique $ECBMO$ comme un nombre negatif à un nombre positif : ce qui fait voir alors que la raison de cet espace au parallelogramme $ACBD$, est pour ainsi dire plus qu'infinité. Mais on doit remarquer dans ce dernier cas, que

que l'espace hyperbolique renfermé par la droite DB , par l'asymptote AD prolongé à l'infini du côté de D , & par l'Hyperbole OMB aussi prolongée à l'infini du côté de B , sera au parallélogramme inscrit $ACBD$, comme m est à $n-m$, c'est à dire, que cet espace sera quarrable; car prenant les indéterminées (x) sur l'asymptote AD , au lieu qu'on les avoit prises sur l'asymptote AC , l'équation à l'Hyperbole deviendra $x^2 y^2 = a^2 + x^2$. *Art. 230.*

PROPOSITION XV.

Theorème.

243. *SOIT* dans l'angle droit CAD une ligne courbe *FIG. 117.* quelconque AMB , dont l'on sçache mener la tangente MT ; & soit dans l'angle DAH qui est à côté de celui-ci, une autre ligne courbe HFE , telle qu'ayant mené d'un de ses points quelconques F la ligne FM parallèle à AC , qui rencontre en K la ligne AD , & en M la première courbe AMB , & ayant tiré la tangente MT , qui rencontre AC au point T : on ait toujours comme AK est à MT ainsi une ligne constante a qui demeure toujours la même en quelque endroit que tombe le point F , est à KF . Je dis que si par un point quelconque D de la ligne AD l'on mene une ligne droite EB parallèle à AC & terminée par les deux courbes; l'espace $ADEFH$ sera égal au rectangle de la courbe AMB par la constante a .

Il faut prouver que $ADEFH = AMB \times a$.

Ayant supposé par tout où l'on voudra sur la courbe AMB l'arc MN infiniment petit, & mené les droites MF , NG , parallèles à AC , & qui rencontre la droite AD aux points K , L , & la courbe HFE aux points F , G , on tirera les droites FS , MR , parallèles à AD , & on prolongera RM jusqu'à ce qu'elle rencontre AC en P . Cela posé, les deux triangles rectangles semblables MPT , MNR , donnent $MR : MN :: MP$ ou $AK : MT :: a : KF$. Et partant $KF \times MR$, c'est à dire;

X.

le petit rectangle $FKLS = MN \times a$. Or comme cela arrive toujours en quelque endroit de la Courbe AMB qu'on prenne le petit arc MN , il s'ensuit que la somme de tous les petits rectangles $KL SF$, * c'est à dire, l'espace $ADEFH$ sera égal à la somme de tous les petits rectangles $MN \times a$, c'est à dire, au rectangle de la courbe AMB par la constante a . *Ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE I.

244. **D**E-LA il est évident que le rectangle de la portion AM par la constante a , est égal à l'espace $AKFH$; & de même que le rectangle de la portion MB par la même ligne a , est égal à l'espace $KDEF$.

COROLLAIRE II.

245. **S**I l'on suppose que la Courbe AMB soit la seconde Parabole cubique, qui ait pour équation * *Art. 233.* $y' = axx$ ($AP = x$, $PM = y$); on aura * $PT = \frac{1}{2}x$; & à cause du triangle rectangle MPT , l'hypothénuse $MT = \sqrt{yy + \frac{1}{4}xx}$. Mais par la propriété de la Courbe HFE , il faut que $MP(y) \cdot MT(\sqrt{yy + \frac{1}{4}xx}) :: a \cdot KF$. Ce qui donne $KF = \frac{1}{4}aa + \frac{y^2}{4}$, en mettant pour axx la valeur y' . D'où l'on voit que la Courbe HFE est dans ce cas une Parabole, qui a pour axe la ligne AD , dont l'origine est au point O , pris de l'autre côté du point D par rapport au point A , en sorte que $AO = \frac{1}{4}a$, & dont le parametre = $\frac{1}{2}a$: * *Art. 19.* car par la propriété de cette Parabole * le quarré de l'ordonnée KF sera égal au rectangle de KO par le parametre $\frac{1}{2}a$, c'est à dire en termes analytiques, $KF^2 = aa + \frac{1}{2}ay$. Or comme les Trapezes paraboliques * *Art. 239.* $ADEH$, $AKFH$, sont * quarrables, il s'ensuit qu'on a la rectification tant de la Courbe AMB , que d'une

de ses portions quelconques AM .

Si l'on veut exprimer au juste la valeur de la portion AM , on remarquera que AH est $=a$; puisque $\overline{AH} = AO * \frac{2}{3}a = \frac{2}{3}aa$. Ainsi ayant nomme la tangente MT , t ; la ligne AK ou MP , y ; on aura $KF = \frac{at}{y}$, & le Trapeze parabolique $FAKH$ ou $\frac{2}{3}FK * KO - \frac{2}{3}HA * AO$ * *Art. 239*, $= \frac{2}{3}at + \frac{8at}{27} - \frac{8}{27}aa = AM * a$. C'est à dire en divisant par a , que la portion cherchée $AM = \frac{2}{3}t + \frac{8at}{27} - \frac{8}{27}a$. Ce qui donne cette construction.

Ayant mené du point donné M sur la seconde Parabole cubique AMB , la tangente MT qui rencontre en Q la ligne AK menée par l'origine A de l'axe AC perpendiculairement à cet axe, on prendra sur cette ligne la partie $AV = \frac{8}{27}a$; & ayant tiré VC parallèle à MT qui rencontre l'axe en C , on décrira du centre V & du rayon VA un arc de cercle qui coupe VC en X . Je dis que la portion AM de la seconde Parabole cubique AMB sera égale à la somme des deux droites MQ , CX .

Car à cause des triangles semblables TPM , TAQ , il est clair que $MQ = \frac{2}{3}MT$ (t), puisque $AP = \frac{2}{3}PT$; & à cause des triangles semblables MPT , VAC , il vient MP (y). MT (t) :: AV ($\frac{8}{27}a$). $VC = \frac{8at}{27}$, & partant $CX = \frac{8at}{27} - \frac{8}{27}a$. Donc &c.

PROPOSITION XVI.

Theorème.

246. SOIT une Hyperbole équilatère EAF , qui ait pour centre le point C , & pour la moitié de son premier axe la

Xij

droite CA ; avec une Parabole NCS qui ait pour axe la ligne AC prolongée du côté de C qui en sera l'origine , & pour parametre de l'axe une ligne double de CA . Si l'on mène par un point quelconque N de la Parabole NCS , une parallèle NE à CA , qui rencontre l'Hyperbole EAF au point E , & son second axe CL au point L ; je dis que l'espace hyperbolique $CLEA$ renfermé entre les droites AC , CL , LE , & la portion EA de l'Hyperbole, est égal au rectangle de la portion CN de la Parabole par la droite AC .

- Ayant mené par un point quelconque M de la portion CN de la Parabole, une perpendiculaire MG à la tangente MT qui passe par ce point, terminées l'une & l'autre par l'axe aux points G , T , & une parallèle MB à CA , qui rencontre l'Hyperbole en B , & son second axe CL en H : les lignes MG , HB , seront égales entr'elles. Car menant l'ordonnée MP à l'axe on aura * $PG = CA$; & à cause du triangle rectangle MPG , le quarré $\overline{MG} = \overline{PM}^2 + \overline{PG}^2 = \overline{CH}^2 + \overline{CA}^2$ * $Art. 127.$ $= \overline{HB}^2$, à cause de l'Hyperbole équilatère EAF ; & partant $MG = HB$. Or les triangles rectangles semblables TPM , MPG , donnent MP ou CH . $MT :: PG$ * $Art. 143.$ ou CA . MG ou HB . Donc * &c.

COROLLAIRE I.

247. **D**E LA il est évident que le Trapeze hyperbolique $HLEB$ est égal au rectangle de la portion de Parabole MN par la moitié CA du parametre de son axe.

COROLLAIRE II.

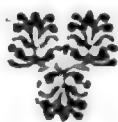
248. **S**I l'on mène dans l'Hyperbole équilatère EAF deux parallèles quelconques BD , EF ; & qu'on tire par leurs extrémités des lignes droites BM , EN , DR , FS , parallèles à AC , lesquelles rencontrent le second axe de l'Hyperbole aux points H , L , K , O ; la différence des rectangles $AC * MN$, $AC * RS$, sera

DE LA COMPARAISON DES SECTIONS CONIQ. 165
 égale (en tirant les droites BE , DF ,) à la différence des
 Trapezes rectilignes $HLEB$, $KOFD$.

Car le rectangle $AC \times MN$ est égal * au Trapeze hy- * *Art. 247.*
 perbolique $HLEB$; & par conséquent le rectangle
 $AC \times MN$ plus le segment hyperbolique BE sera égal
 au Trapeze rectiligne $HLEB$: de même le rectangle
 $AC \times RS$ plus le segment hyperbolique DF sera égal au
 Trapeze rectiligne $KOFD$. Donc puisque les deux seg-
 mens hyperboliques EB , DF , sont * égaux entr'eux, la * *Art. 104.*
 différence des rectangles $AC \times MN$, $AC \times RS$, sera éga-
 le à la différence des Trapezes rectilignes $HLEB$, $KOFD$.
Ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE III.

249. **L**ES mêmes choses étant posées que dans le
 Corollaire précédent; si l'on fait $2AC. LH ::$
 $BH + LE. m$ il est clair que le rectangle $AC \times m = \frac{1}{2} LH$
 $\times BH + LE$, c'est à dire, égal au Trapeze rectiligne
 $HLEB$. De même si l'on fait $2AC. KO :: KD + FO. n$,
 il est clair que $AC \times n$ est égal au Trapeze rectiligne
 $KOFD$. Par conséquent * la différence des rectangles * *Art. 248.*
 $AC \times MN$, $AC \times RS$, sera égale à la différence des
 rectangles $AC \times m$, $AC \times n$; c'est à dire, en divisant
 par AC , que la différence des arcs paraboliques MN ,
 RS , sera égale à la différence des droites m , n . D'où
 l'on voit qu'on peut trouver des lignes droites égales à la
 différence d'une infinité d'arcs Paraboliques tels que
 MN , RS .



LIVRE SIXIÈME.

Des Sections Coniques considérées dans le Solide.

CHAPITRE PREMIER.

Des trois Sections Coniques en général.

DÉFINITIONS.

FIG. 129. ^{1.} SI par un point fixe S élevé au dessus du plan d'un cercle VXY , on fait mouvoir une ligne droite SZ indéfiniment prolongée de part & d'autre du point S , autour de la circonférence du cercle, en sorte qu'elle fasse un tour entier; les deux surfaces convexes produites par la ligne droite indéfinie SZ dans ce mouvement, sont appelées chacune séparément *Surface Conique*, & toutes deux ensemble *Surfaces Coniques opposées*.

^{2.} Le point fixe S qui est commun à l'une & à l'autre Surface Conique, est nommé *Sommet*.

^{3.} Le Cercle VXY , *Base*.

^{4.} Le Solide compris par la base VXY , & par la portion de la Surface Conique que cette base coupe depuis le Sommet S , est appelé *Cone*.

^{5.} La ligne SX menée du Sommet S à un point quelconque X de la base, en est un des *Côtés*.

^{6.} La ligne SO menée du Sommet S du Cone par le centre O de la base, en est l'*Axe*.

^{7.} On dit qu'un Cone est *droit*, lorsque son axe est per-

pendiculaire sur le plan de sa base ; & au contraire qu'il est *scalene* , lorsque son axe est oblique sur ce plan.

8.

Si l'on coupe une Surface Conique par un plan FAG FIG. 130. qui ne passe point par le Sommet S , & qui ne soit point 131. 132. parallèle au plan de la base VXY ; la ligne courbe FAG formée par la rencontre de ce plan avec la Surface Conique , est appelée *Section Conique*.

9.

Si l'on mene par le Sommet S d'un Cone , un plan SDE parallèle au plan d'une Section Conique ; la droite indéfinie DE formée par la rencontre de ce plan avec celui de la base du Cone , s'appellera *Directrice*.

10.

Une Section Conique FAG est appelée *Parabole* , lorsque la Directrice DE touche le cercle qui est la base du Cone : *Ellipse* , lorsqu'elle tombe toute entière au dehors : & *Hyperbole* , lorsqu'elle le traverse.

Mais dans ce dernier cas , si l'on prolonge le plan de FIG. 131. la Section , il est visible qu'il rencontrera la Surface Conique opposée ; la ligne courbe KMH formée par cette rencontre , sera nommée *Hyperbole opposée* à la première FAG ; & les deux ensemble , *Hyperboles* ou *Sections opposées*.

11.

Si dans le plan d'une Section Conique il y a une ligne FIG. 130. droite qui ne la rencontre qu'en un seul point , & qui 131. 132. étant prolongée indéfiniment de part & d'autre n'entre point dedans , mais tombe toute entière au dehors ; cette ligne sera nommée *Tangente* , & le point où elle rencontre la Section , point d'*Attochement*.

COROLLAIRE I.

250. DANS la Parabole tous les côtés du Cone FIG. 130. étant prolongés indéfiniment rencontreront nécessairement son plan , excepté le seul côté SD tiré du Sommet S

par le point D où la Directrice DE touche la base ; puis-
qu'il n'y a que ce côté qui soit dans le plan SDE paral-
lele à celui de la Section, & que tous les autres le coupent
dans le point S . D'où il est clair que la Parabole s'étend
à l'infini, & ne rentre point en elle même.

COROLLAIRE II.

FIG. 131. 251. **D**ANS l'Ellipse tous les côtés du Cone étant
prolongés, s'il est nécessaire, rencontrent son plan ; puis-
que le plan SDE qui lui est parallele, est rencontré par
tous dans le point S . D'où l'on voit qu'elle renferme un
espace en rentrant en elle même.

COROLLAIRE III.

FIG. 133. 252. **D**ANS les Hyperboles opposées tous les côtés
du Cone excepté les deux SD, SE , tirés du Sommet S
aux points D, E , où la Directrice coupe la base, étant
prolongés indéfiniment de part & d'autre du Sommet S ,
rencontrent nécessairement leur plan ; puisqu'il n'y a
que ces deux côtés qui tombent dans le plan SDE pa-
rallele au plan de ces deux Hyperboles, & que tous les
autres le coupent dans le point S . Les côtés de la por-
tion $SDVE$ forment les points de l'Hyperbole FAG ,
& ceux de la portion $SDYE$ étant prolongés de l'autre
côté du Sommet S , forment les points de son opposée
 KMH . D'où l'on voit que les Hyperboles opposées
s'étendent chacun à l'infini, & ne rentrent point en elles-
mêmes, non plus que la Parabole.

PROPOSITION I.

Theorème.

FIG. 132. 253. **S**I l'on coupe deux surfaces Coniques opposées, par un
plan $Sa m$ qui passant par leur Sommet S , entre au dedans ;
je.

je dis qu'il formera par sa rencontre avec ces deux Surfaces, deux lignes droites Sa , Sm , indéfiniment prolongées de part & d'autre du point S .

Car soit am la commune Section du plan coupant, & du plan de la base : il est clair qu'elle rencontrera cette base en deux points a , m ; puisque par la supposition le plan Sam entre au dedans de la surface Conique. Or si l'on mène les côtés Sa , Sm , indéfiniment prolongés de part & d'autre du sommet S ; il est évident par la génération des Surfaces Coniques opposées que ces côtés seront les deux communes Sections de ces deux Surfaces, avec le plan coupant Sam . C'est ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE I.

254. COMME la partie de la ligne am qui joint les deux points a , m , de la circonférence, tombe au dedans de la base, & que tout le reste de cette ligne tombe au dehors ; il s'ensuit que si l'on conçoit que le plan Sam soit indéfiniment étendu tout autour du Sommet S , la partie de ce plan qui sera renfermée dans l'angle aSm , & dans son opposé au Sommet, tombera au dedans des deux Surfaces Coniques opposées, & que tout le reste de ce plan tombera entre ou (ce qui est la même chose) au dehors de ces deux Surfaces.

COROLLAIRE II.

255. DE-LÀ il suit que si l'on joint deux points Fig. 130. quelconques A , M , d'une Section Conique par une ligne droite, elle sera renfermée au dedans de la Section ; & qu'étant prolongée indéfiniment de part & d'autre, elle tombera toute entière au dehors. Car menant du Sommet S par les points A , M , les côtés Sa , Sm , & faisant passer un plan par ces côtés ; il est clair que la ligne AM tombe dans la partie de ce plan qui est renfermée dans l'angle aSm , & que tout le reste

Y.

de cette ligne se trouve dans la partie de ce plan qui tombe dans les angles à côté.

COROLLAIRE III.

256. **S**i l'on mène par le Sommet S du cône une ligne parallèle à une ligne AM terminée par une Section Conique ; il est clair par le Corollaire précédent que cette ligne SH , tombera dans l'un des angles à côté de l'angle asm , c'est à dire au dehors de la surface Conique ; & qu'ainsi elle ira rencontrer le plan de la base en quelque point hors la circonférence du cercle, ou bien qu'elle lui sera parallèle.

COROLLAIRE IV.

FIG. 132.

257. **I**l suit encore du Corollaire premier que si l'on joint deux points quelconques A, M , de deux Hyperboles opposées par une ligne droite, elle sera renfermée entre ces Hyperboles ; & qu'étant indéfiniment prolongée de part & d'autre, elle entrera au dedans. Car menant par le Sommet S les côtés sa, sm , qui passent par les points A, M , & faisant passer par ces côtés un plan indéfiniment étendu tout autour du point S ; il est clair que la partie de ce plan qui est renfermée dans l'angle ASM où tombe la ligne AM , est comprise entre ces deux Surfaces, & que la partie du même plan qui est renfermée entre les deux angles à côté où se trouvent les prolongemens de la ligne AM , tombent au dedans de ces deux Surfaces. Or comme la ligne AM est la commune Section du plan sam avec celui des deux Hyperboles opposées, il s'ensuit &c.

COROLLAIRE V.

258. **I**l suit aussi des Corollaires deuxième & quatrième, qu'une ligne droite ne peut rencontrer une

Section Conique, ou les deux Hyperboles opposées, au plus qu'en deux points.

PROPOSITION II.

Theorème.

259. *Si l'on coupe l'une ou l'autre des deux Surfaces Coniques opposées, par un plan $OVXY$ parallele à la base $OVXY$; je dis que la Section qu'il forme par sa rencontre avec la Surface Conique, est un cercle qui a pour centre le point O , où ce plan rencontre l'axe SO , prolongé de l'autre côté du Sommet S , lorsqu'il est nécessaire.* FIG. 119.

Car si l'on mene par un point quelconque X de la base au centre O le rayon OX , & au Sommet S le côté XS qui rencontre le plan $OVXY$ au point x : les lignes OX , ox , seront paralleles entr'elles; puisqu'elles sont les communes Sections de deux plans paralleles $OVXY$, $ovxy$, par le même plan SOX prolongé, s'il est nécessaire de l'autre côté du Sommet S . Les triangles OSX , osx , seront donc semblables; & par conséquent on aura toujours $SO. OX :: So. ox$. Or les premiers termes de cette proportion étant par tout les mêmes, le quatrième ox ne changera point de grandeur en quelque endroit que tombe le point x . D'où l'on voit que la ligne courbe vxy est la circonférence d'un cercle qui a pour centre le point O .

COROLLAIRE.

260. Il suit de-là qu'on peut placer la base d'un cone en tel endroit qu'on veut, selon qu'il est plus commode. C'est pourquoi lorsque la Section est une Parabole ou une Hyperbole, on la place ordinairement en sorte qu'elle coupe la Section; mais lorsque c'est une Ellipse on la place tantôt de manière qu'elle la coupe, & tantôt de manière qu'elle tombe audessous.

Y ij.

PROPOSITION III.

Theorème.

FIG. 130. 261. *Si dans le plan d'une Parabole FAG, l'on tire par un de ses points quelconques A vers le dedans du cone, une ligne droite indéfinie AB parallèle au côté SD qui passe par le point où la Directrice DE touche la base; je dis que cette ligne AB tombe toute entiere au dedans de la Section, & qu'elle ne la rencontrera jamais quoique prolongée à l'infini du côté de B.*

Car ayant mené par le Sommet S du cone, & par la ligne AB un plan SAB , il formera par la rencontre avec la Surface Conique deux côtés, dont l'un sera toujours la ligne SD , puisque AB lui est parallèle; & l'autre la ligne Sa qui passe par le point A . Or le plan DSa renfermé entre les côtés SD , Sa , prolongés à
 * Art. 254. l'infini du côté de D & a , tombe * au dedans de la Surface Conique. Par conséquent la ligne AB qui est toujours dans ce plan, étant parallèle au côté SD , tombera toute entiere au dedans de la Parabole, & ne la rencontrera jamais quoique prolongée à l'infini vers B .

PROPOSITION IV.

Theorème.

FIG. 130. 262. *Si dans le plan d'une Parabole FAG, l'on tire par un de ses points quelconques A vers le dedans du cone, une ligne droite AM qui ne soit point parallèle au côté SD, qui passe par le point D où la Directrice DE touche la base: je dis que cette ligne étant prolongée autant qu'il sera nécessaire, rencontrera la Parabole en quelque autre point M.*

Car si l'on fait passer par le Sommet S du cone & par cette ligne un plan SAM , il est clair qu'il entre au dedans de la Surface Conique, & qu'il ne passe point par

le côté SD ; d'où il suit que ce plan forme sur la Surface Conique * deux côtés sa , sm ; dont l'un sa passe * *Art. 253.* par le point A ; & l'autre sm n'est point parallèle au plan de la Section, puisqu'il n'y a (*hyp.*) que le seul côté SD qui lui soit parallèle. Par conséquent le côté sm étant prolongé (s'il est nécessaire) rencontrera le plan de la Parabole en un point M , par où passe la ligne AM qui est formée par la rencontre du plan asm avec celui de la Parabole. Or il est visible que ce point M est un des points de la Parabole FAG ; puisqu'il se trouve en même temps dans le plan de la Section, & sur la Surface Conique. Donc &c.

PROPOSITION V.

Problème.

263. **M**ENER d'un point donné A sur une Section Conique, une Tangente AF . FIG. 133.
134. 135.

Ayant mené par le point A & par le Sommet S du cône, une ligne droite SA qui rencontre le plan de la base au point a , on tirera à cette base par le point a ; la Tangente Eaf ; & la ligne AF formée par la rencontre du plan $SEaf$ (prolongé, s'il est nécessaire, au delà du Sommet S) avec le plan de la Section, sera la Tangente qu'on cherche.

Car puisque la Tangente Eaf tombe toute entière au dehors de la base excepté le seul point a , il s'ensuit que le plan $SEaf$ prolongé indéfiniment de part & d'autre du Sommet S ne rencontre les Surfaces Coniques opposées que dans la ligne sa aussi prolongée indéfiniment de part & d'autre du Sommet S , & que tout le reste de ce plan tombe au dehors de ces Surfaces. Par conséquent la ligne AF formée par la rencontre de ce plan avec celui de la Section, ne peut avoir de commun avec l'un ou l'autre de ces deux surfaces que le seul point A où la ligne sa rencontre le plan de la

Y jij

Section, & tombe toute entière au dehors excepté ce point. Donc &c.

COROLLAIRE I.

264. COMME l'on ne peut faire passer par le point a de la base du cône, qu'une seule Tangente Eaf ; il s'en suit aussi que d'un point donné A sur une Section Conique, on ne peut mener qu'une seule tangente AF .

COROLLAIRE II.

265. DE-LA on tire la maniere de mener une Tangente AF parallele à une ligne droite MN donnée de position sur le plan d'une Section Conique ou de deux Sections opposées. Car ayant mené par le Sommet S du cône, une parallele SE à MN , elle rencontrera la Directrice DE en un point E , ou bien elle lui sera parallele; puisque cette ligne SE sera parallele au plan de la Section, & tombera par conséquent dans le plan SDE . Si elle la rencontre en un point E qui tombe au dehors du cercle qui est la base du Cône: ayant mené du point E à ce cercle, la Tangente Eaf , il est clair que le plan $SEaf$ formera par sa rencontre avec le plan de la Section, une Tangente AF qui sera parallele à la ligne MN ; puisque les deux Sections AF, SE , des plans * paralleles $MNASED$, coupés par le plan touchant $SEaf$, sont paralleles entr'elles aussi bien que * SE, MN .

* Hyp.

COROLLAIRE III.

266. LES mêmes choses étant posées que dans le Corollaire précédent.

FIG. 135.

1°. Dans la Parabole le Problème est impossible, lorsque la ligne MN donnée de position, devient parallele au côté SD qui passe par le point D où la Directrice DE touche la base; car alors le point E tombant en D , on ne pourra mener par ce point d'autre

Tangente que la Directrice DE : & comme le plan qui passe par le Sommet & par la Directrice DE est * paral- * *Def. 9.*
 lele au plan de la Parabole, il ne pourra former par sa rencontre avec ce plan aucune Tangente. Mais lorsque la ligne donnée de position, n'est point parallèle au côté SD , on pourra toujours mener une Tangente AF parallèle à cette ligne, & jamais davantage ; car alors le point E tombant au dehors du cercle qui est la base du cône, on en pourra toujours mener Eaf , EDL à cette base ; dont l'une EDL se confondant avec la Directrice, ne peut servir à trouver aucune Tangente dans le plan de la Section ; & l'autre Eaf étant différente de la Directrice, servira toujours à trouver par la rencontre du plan $SEaf$ avec le plan de la Parabole, une Tangente AF qui satisfera. Il en est de même lorsque la ligne SE est parallèle à la Directrice ; car la Tangente Eaf deviendra alors parallèle à la Directrice ; & comme on n'en peut mener qu'une seule qui lui soit parallèle, puisque la Directrice touche elle-même la base en un point D , il s'ensuit &c.

2°. Dans l'Ellipse on pourra toujours mener deux *FIG. 134.*
 Tangentes AF , BG , parallèles à la ligne MN donnée de position ; & par conséquent entr'elles. Car tous les points de la Directrice DE tombant au dehors de la base, on pourra toujours mener du point E deux Tangentes Eaf , Ebg , à cette base qui ne se confondront point avec la Directrice, & qui serviront à former par la rencontre des plans $SEaf$, $SEbg$, avec le plan de la Section, deux Tangentes AF , BG , qui satisferont. Il en est de même lorsque la ligne SE est parallèle à la Directrice ; car au lieu des Tangentes Eaf , Ebg , qui partent d'un point E de cette Directrice, il n'y auroit qu'à lui mener deux Tangentes parallèles ; ce qui est toujours possible.

3°. Dans les Hyperboles opposées le Problème est *FIG. 135.*
 impossible, lorsque le point E tombe au dedans du cercle qui est la base du cône ; puisqu'on ne peut mener

alors aucune Tangente de ce point à la base. Mais lorsqu'il tombe au dehors, on pourra toujours trouver deux Tangentes AF , BG , parallèles à la ligne MN donnée de position; car la Directrice DE traversant la base, on pourra toujours mener du point E deux Tangentes Eaf , Ebg , à cette base, lesquelles tombent de part & d'autre de la Directrice, & qui serviront à former par la rencontre des plans $SEaf$, $SEbg$, avec le plan de la Section deux Tangentes AF , BG , qui satisferont. Il en est de même lorsque la ligne SE est parallèle à la Directrice DE ; car au lieu des deux Tangentes Eaf , Ebg , il n'y aura qu'à mener deux Tangentes parallèles à la Directrice; ce qui est toujours possible.

Il est à remarquer dans ce dernier cas, que les Tangentes parallèles AF , BG , appartiennent toujours aux Hyperboles opposées, & jamais à la même; ce qui est évident, puisque les deux Tangentes Eaf , Ebg , de la base, tombent nécessairement de part & d'autre de la Directrice DE .

COROLLAIRE IV.

267. IL suit du Corollaire précédent :

1°. Que dans une Parabole ou Hyperbole, il ne peut y avoir deux Tangentes qui soient parallèles entr'elles; & qu'au contraire dans l'Ellipse & dans les Hyperboles opposées, une Tangente AF , étant donnée de position, on en peut toujours mener une autre BG qui lui soit parallèle.

2°. Que si la ligne MN donnée de position, est terminée par une Section Conique, on pourra toujours mener dans la Parabole, une Tangente AF qui lui soit parallèle, & dans l'Ellipse ou les Hyperboles opposées deux Tangentes AF , BG ; puisque la ligne SE menée par le
 * Art. 256. Sommet S parallèlement à MN rencontrera* le plan de la base en un point E hors la circonférence, ou bien lui sera parallèle.

DÉFINITIONS.

12.

Dans une Parabole, si l'on mène par un de ses points *Fig. 133.* quelconques *A* vers le dedans une ligne *AB* parallèle au côté *SD* qui passe par le point *D* où la Directrice *DE* touche la base : cette ligne *AB* sera nommée *Diametre*, & le point *A* en sera l'origine.

13.

Dans l'Ellipse ou les Hyperboles opposées, toute ligne *Fig. 134.* droite *AB*, qui joint les points d'attouchement de deux *135.* tangentes parallèles *AF*, *BG*, est appelée *Diametre*, & les points, *A*, *B*, en sont les extrémités.

14.

Si par un point quelconque *P* de tel *Diametre AB Fig. 133.* qu'on voudra d'une Section Conique, l'on tire une ligne *134. 135.* droite *MN* qui rencontre la Section aux points *M*, *N*, & qui soit parallèle à la tangente *AF* qui passe par l'origine *A* de ce *Diametre* dans la Parabole, & par l'une ou l'autre de ses extrémités dans les autres Sections : on dira que cette ligne *MN* est *Ordonnée* de part & d'autre au *Diametre AB*, & que chacune de ses parties *PM*, ou *PN*, est *Ordonnée* à ce *Diametre*.

15.

Lorsqu'un *Diametre* fait avec ses *Ordonnées* des angles droits, on l'appelle *Axe*.

COROLLAIRE.

268. IL suit de la Définition douzième :

1°. Que tous les *Diamètres* d'une Parabole sont parallèles entr'eux, puisqu'ils sont tous parallèles au même côté du cone *SD* qui passe par le point *D* où la Directrice *DE* touche la base.

2°. Que par un point donné sur le plan d'une Parabole, on ne peut mener qu'un seul *Diametre*, puisqu'on ne peut mener par ce point qu'une seule parallèle au côté *SD*.

Z.

PROPOSITION VI.

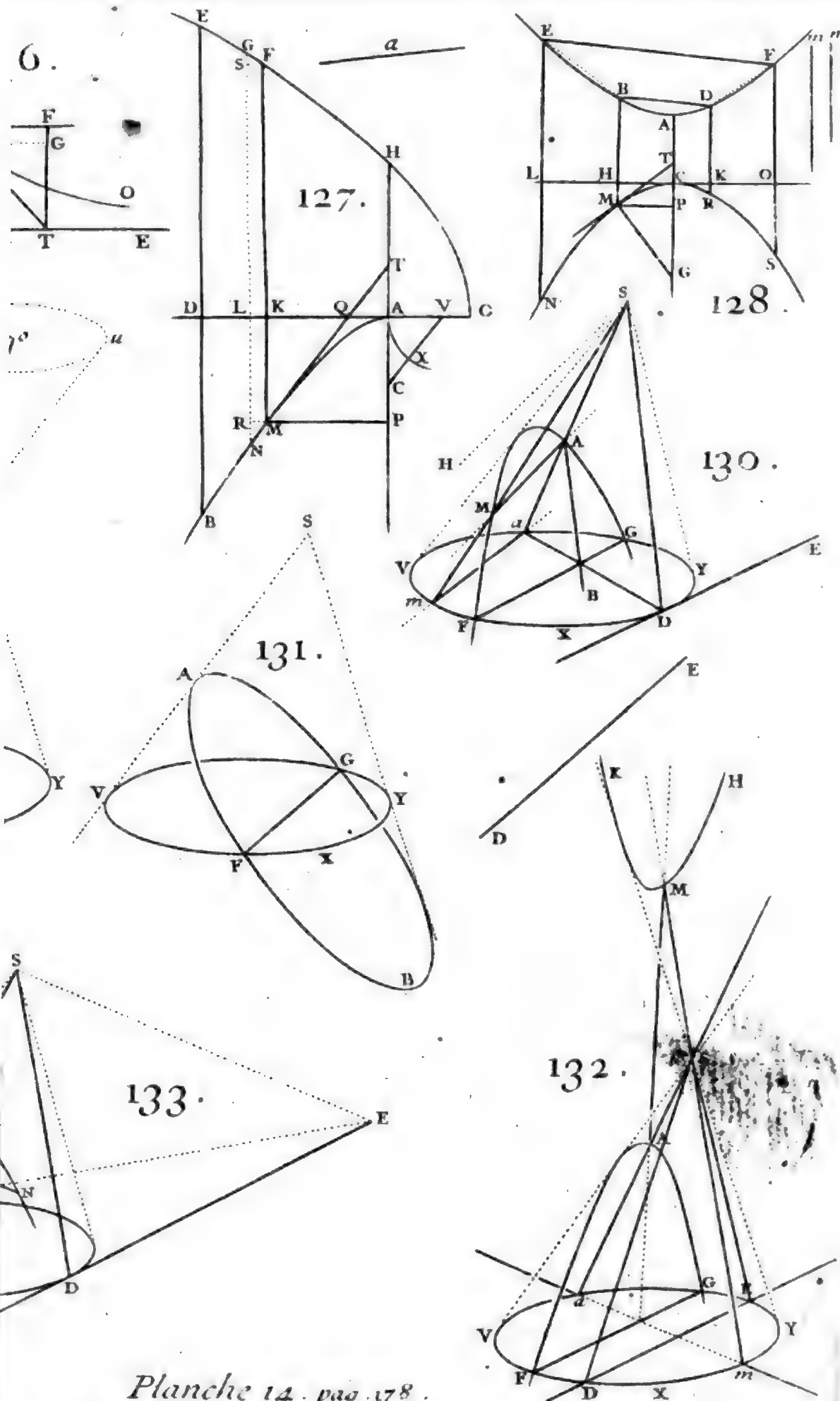
Problème.

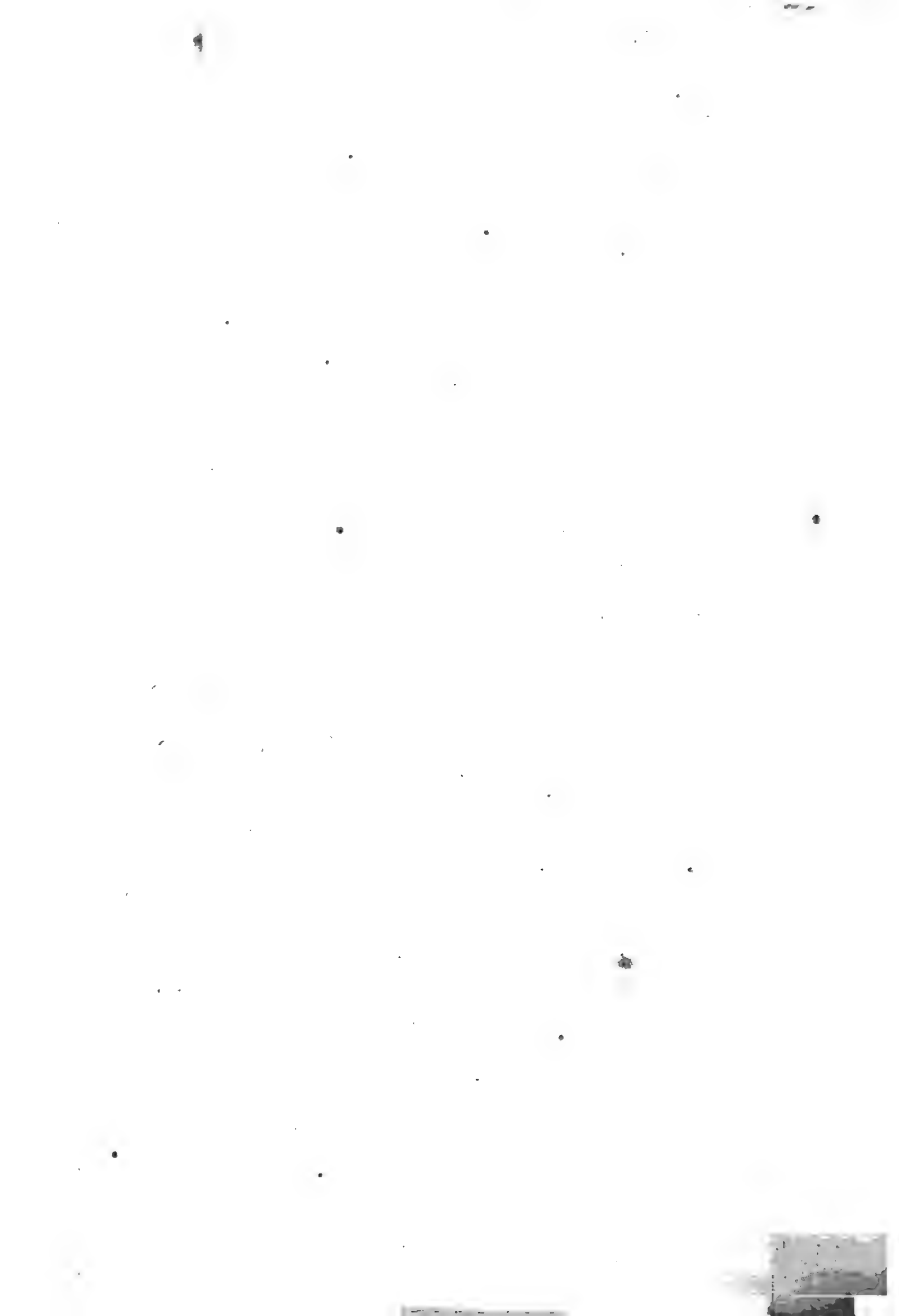
FIG. 136. 269. UN diamètre AB d'une Section Conique étant donné, avec une de ses ordonnées PM ; décrire la Section.
137. 138.

Ayant fait passer par l'ordonnée PM un plan quelconque autre que le plan APM , on menera dans ce plan par le point P une perpendiculaire indéfinie Pa à PM ; & on décrira d'un point quelconque C de cette ligne, & du rayon CM un cercle. Cela fait,

FIG. 136. 1°. Lorsque la Section doit être une Parabole. On menera de l'un des points a, D , où le cercle coupe la perpendiculaire Pa (par exemple du point a) par l'origine A du diamètre AB , la ligne aA qui rencontre en S , une ligne DS tirée de l'autre point D parallèlement à AB . On décrira ensuite une surface Conique qui ait pour sommet le point S , & pour base le cercle $DMaN$. Je dis qu'elle formera par sa rencontre avec le plan APM , la Parabole cherchée MAN . Car ayant mené par les extrémités du diamètre Da les parallèles DE, af , à PM ; il est clair qu'elles seront tangentes, puisque * PM est perpendiculaire sur Da . Or le plan SDE qui passe par le sommet S du cône & par la tangente DE , est parallèle au plan APM , puisque *
* Hyp. SD est parallèle à AP , & DE à PM , d'où il suit *
* Hyp. que la Section MAN faite par le plan APM dans la surface Conique, sera une Parabole qui aura pour diamètre la ligne AB . De plus le plan touchant Saf forme dans le plan APM * une tangente AF , qui sera parallèle à PM ; puisqu'elle est la commune Section des deux plans Saf, APM , qui passent par les parallèles
* Def. 10. & af, PM ; & par conséquent * la ligne PM sera ordonnée au diamètre AB .
12.

FIG. 137. 2°. Lorsque la Section Conique doit être une Ellipse ou une Hyperbole. On menera des points a, b , où la perpendiculaire indéfinie Pa coupe le cercle, par les ex-
138.





extrémités A, B , du diamètre AB , les droites aA, bB , qui se rencontrent au point S . On décrira ensuite un cône qui ait pour sommet le point S , & pour base le cercle $aMbN$. Je dis que le plan APM formera dans la surface de ce cône la Section MAN qu'on demande. Car menant SD parallèle au diamètre AB de la Section, & qui rencontre en D le diamètre ab de la base, par où & par les extrémités a, b , soient tirées les parallèles, DE, af, bg , à PM ; il est clair que le plan SDE sera parallèle au plan APM , & qu'ainsi DE * sera la * *Def. 9.* Directrice. Or dans l'Ellipse le point D tombe sur le diamètre ab prolongé hors le cercle; puisque le diamètre AB de la Section, tombe dans l'angle aSb fait par les côtés du cône Sa, Sb : & au contraire dans l'Hyperbole le point D tombe au dedans du cercle; puisqu'alors le diamètre AB tombe dans l'angle aSB qui est à côté de l'angle aSb . D'où il suit selon la Définition 10. que la Section MAN est une Ellipse dans le premier cas, & une Hyperbole dans le second. De plus la tangente AF qui passe par l'extrémité A du diamètre AB , étant la commune Section du plan touchant Saf & du plan coupant APM , qui passent par les parallèles af, PM , sera parallèle à PM : & de même la tangente BG étant la commune Section du plan touchant Sbg & du plan coupant APM , lesquels passent par les deux parallèles bg, PM , sera aussi parallèle à PM . D'où l'on voit que la ligne AB est * un diamètre * *Def. 13. & 14.* qui a pour ordonnée PM .

Il peut arriver dans l'Ellipse que les lignes Aa, Bb , soient parallèles entr'elles, mais alors il n'y aura qu'à prendre pour le centre C du cercle $aMbN$, tel autre point qu'on voudra de la ligne Ab .

DÉFINITION.

16.

Si par les deux points D, E , où la Directrice coupe la base, lorsque la Section est une Hyperbole, on tire

Z. ij

deux Tangentes DH , EK ; & que par le Sommet S & ces Tangentes, on fasse passer deux plans SDH , SEK : les deux lignes droites indéfinies CH , CK , que ces deux plans forment par leurs rencontres avec le plan des Hyperboles, sont appellees *Asymptotes*.

COROLLAIRE.

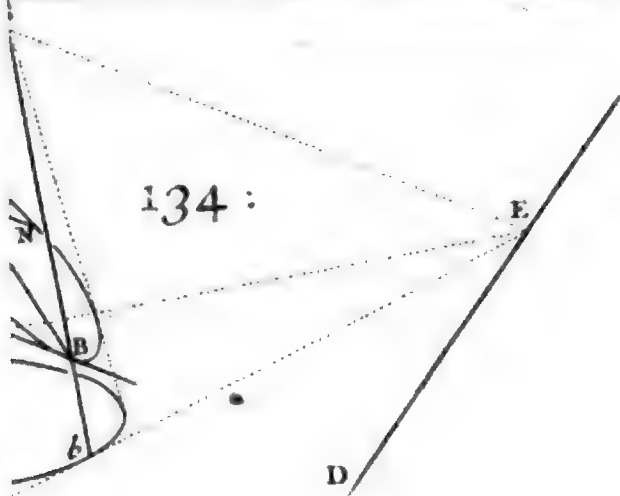
270. *Si par un point d'attouchement D , l'on mène le côté DS prolongé indéfiniment de part & d'autre du Sommet S : il est visible que le plan SDH ne peut avoir de commun avec les deux surfaces Coniques opposées que ce côté; puisque tous les points de la Tangente DH tombent hors la circonférence de la base, excepté le seul point D . Or le plan SDE qui passe par le Sommet S & par la Directrice DE , étant * parallèle au plan des Hyperboles opposées, les communes Sections SD , CH , de ces deux plans avec le même plan SDH seront parallèles entr'elles; c'est pourquoi l'Asymptote CH tombera toute entière au dehors & entre les deux surfaces Coniques opposées, & laissera par conséquent les Hyperboles opposées toutes entières de part & d'autre sans les rencontrer. On prouvera la même chose de l'autre Asymptote CK . Or comme les deux Asymptotes CH , CK , sont formées par les plans SDH , SEK , qui tombent de part & d'autre de la même surface Conique & de son opposée; il s'ensuit que tous les points de l'Hyperbole FAG sont compris dans l'angle HCK , & que tous les points de son opposée tombent dans l'angle qui lui est opposé au Sommet.*

* Def. 9.

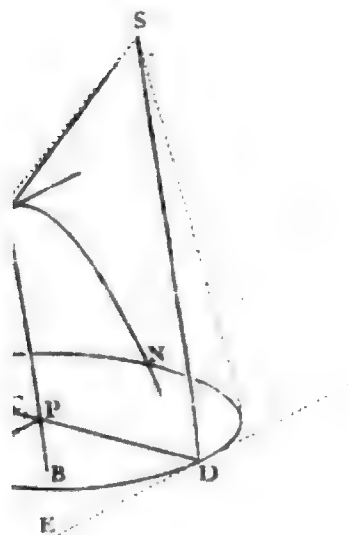
PROPOSITION VII.

Théorème.

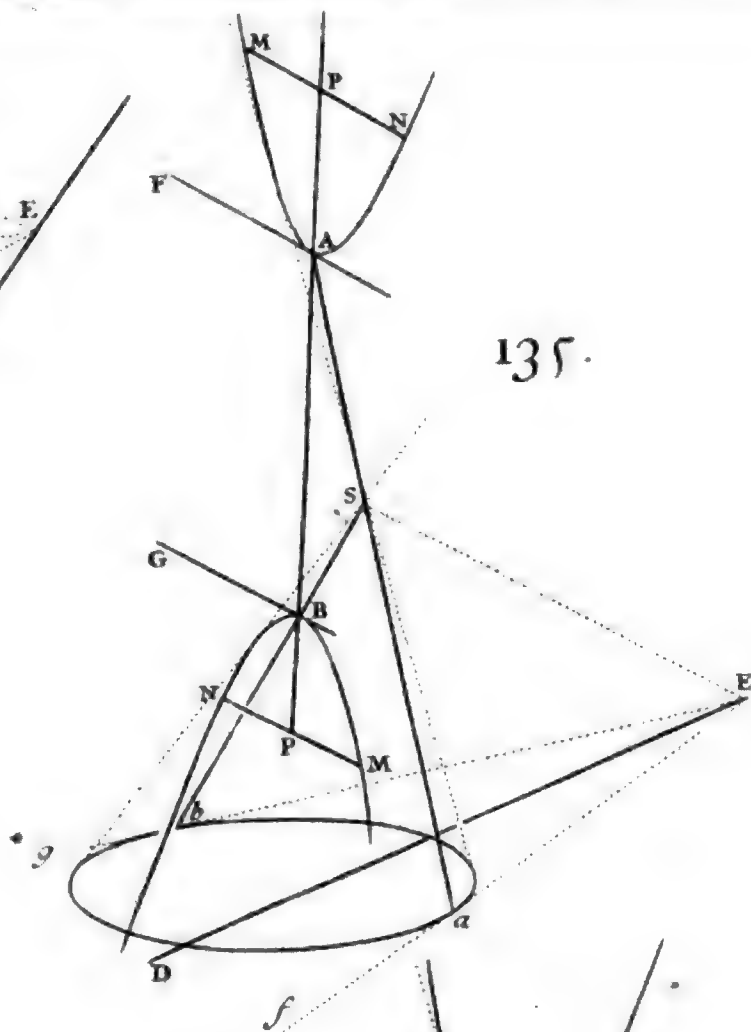
Fig. 139. 271. *Si par un point quelconque B d'une Asymptote CK , l'on mène une parallèle BA à l'autre Asymptote CH , je dis*



134 :



135.



138.

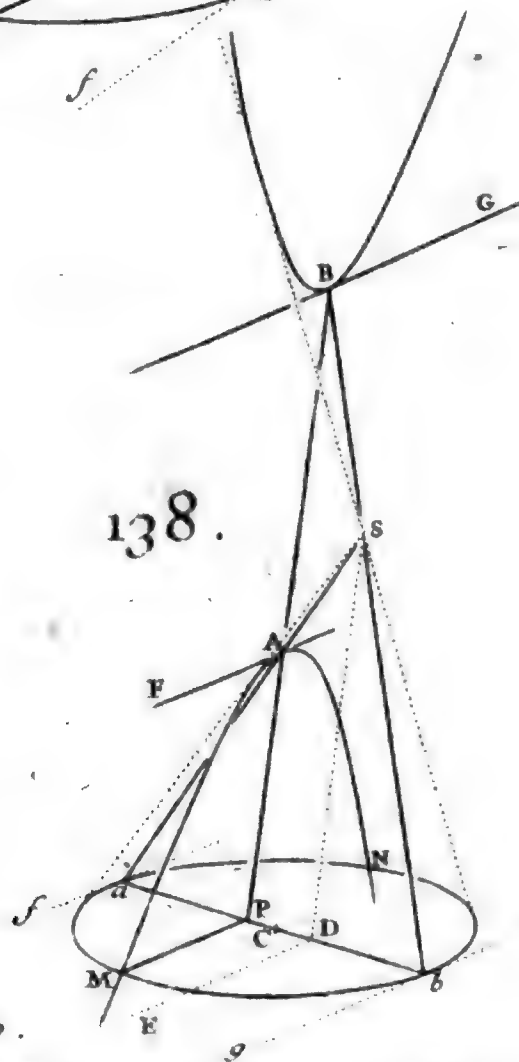
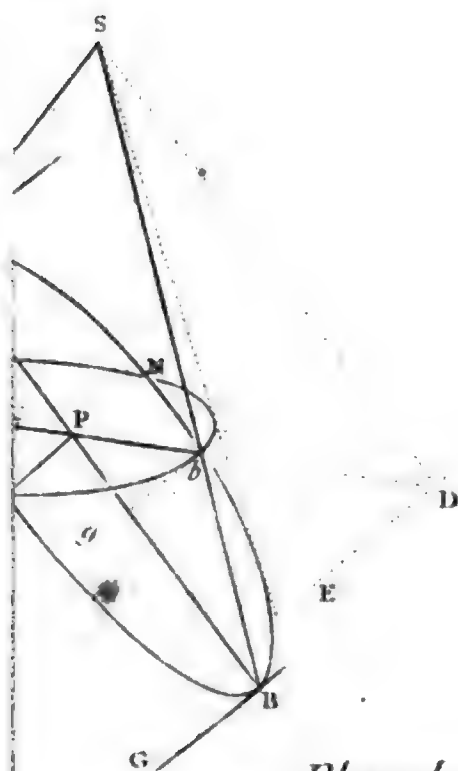
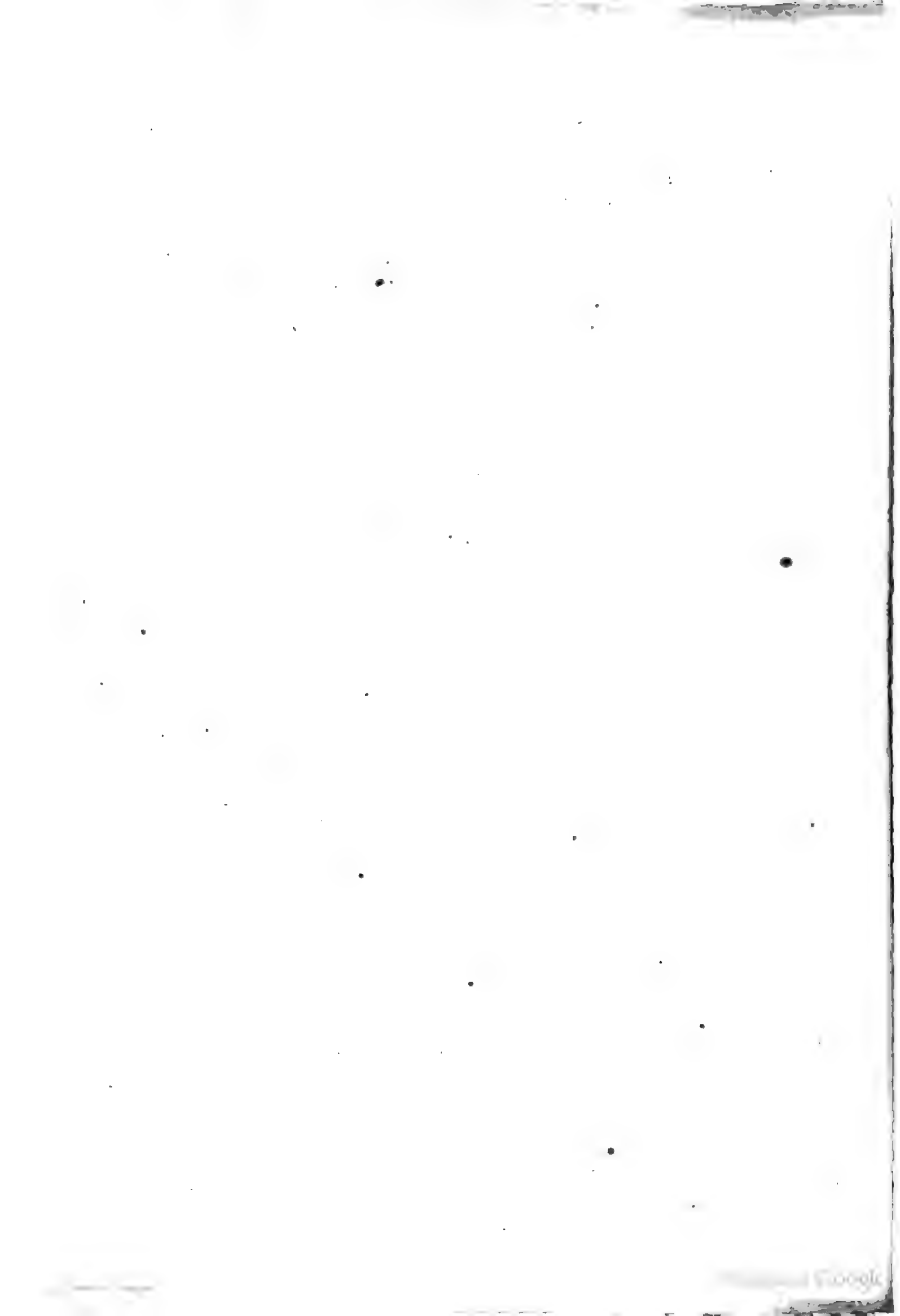


Planche 15. pag. 180.



qu'elle rencontrera l'une des Hyperboles opposées en un seul point A, & qu'étant prolongée indéfiniment, elle tombera toute entiere au dedans.

Puisque les deux lignes BA , SD , sont paralleles à la même ligne CH , elles le seront entr'elles; & ainsi elles se trouveront dans un même plan, lequel entrera au dedans des deux surfaces Coniques opposées, puisqu'il passe par l'un de leurs côtés SD , & qu'il fait un angle avec le plan SDH qui la touche dans ce côté. Le plan des paralleles BA , SD , formera donc dans les deux surfaces Coniques, deux côtés, dont l'un est le côté SD , & l'autre le côté SA , qui coupera nécessairement la ligne BA en quelque point A , puisqu'il est situé dans le plan qui passe par les paralleles SD , AB , & qu'il coupe SD en S . Donc puisque le point A se trouve en même temps dans l'une des surfaces Coniques & dans le plan des Hyperboles, il appartiendra à l'une de ces Hyperboles. De plus puisque la ligne BA étant prolongée indéfiniment du côté du point A , tombe toute entiere dans le plan DSA renfermé entre les côtez DS , SA , lorsque le point A appartient à l'Hyperbole FAG , & dans son opposé au Sommet ASd lorsqu'il appartient à l'Hyperbole opposée; il est visible qu'elle tombera toute entiere au dedans de l'une des deux surfaces Coniques, & par conséquent aussi au dedans de l'Hyperbole qui en est la Section. *Ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE.

272. DE LA on voit qu'entre une Hyperbole FAG & son Asymptote CH , on ne sçauroit faire passer aucune ligne parallele à cette Asymptote. Or comme la ligne BA separe l'Hyperbole qu'elle rencontre en deux portions indefinies, dont l'une tombe nécessairement toute entiere dans l'espace compris entre les paralleles BA , CH ; il s'ensuit que plus CB deviendra petite, plus le point A avancera dans cette portion, & cela toujours de plus en plus jusqu'à ce que CB devienne

plus petite qu'aucune grandeur donnée. C'est à dire, qu'une Hyperbole & son Asymptote étant l'une & l'autre continuée indéfiniment, elles s'approcheront toujours de plus en plus, en sorte que leur distance deviendra enfin moindre qu'aucune donnée, sans pouvoir néanmoins

* Art. 270. jamais le rencontrer.

PROPOSITION VIII.

Problème.

FIG. 140. 273. **L**ES Asymptotes CH , CK , d'une Hyperbole FAG étant données avec un de ses points quelconques F , décrire l'Hyperbole.

Ayant mené par le point donné F , une ligne droite quelconque HK terminée par les asymptotes, on fera passer par cette ligne un plan quelconque autre que le plan HCK , dans lequel on tirera par le point de milieu P de HK une perpendiculaire indéfinie MN à cette ligne; & on décrira d'un de ses points quelconques O comme centre, & du rayon OF , un cercle FMN . On menera des points H , K , deux Tangentes HD , KE , à ce cercle; & par les points d'attouchemens D , E , deux parallèles DS , ES , aux Asymptotes CH , CK , lesquelles se rencontreront en un point S ; duquel comme Sommet, on décrira une surface Conique qui ait pour base le cercle FMN . Je dis que cette surface Conique formera par sa rencontre avec le plan HCK , l'Hyperbole requise FAG .

* Hyp. Il est clair par la propriété du cercle FMN ; 1°. Que la corde FG est divisée par le milieu au point P , par le diamètre MN qui lui est perpendiculaire; & partant, puisque par la construction $PH = PK$, il s'ensuit que $FH = GK$, $GH = PK$; & par conséquent $GH \times HF = FK \times KG$. 2°. Que $GH \times HF = HD^2$, & $FK \times KG = KE^2$, & qu'ainsi $HD = KE$. 3°. Que si l'on prolonge les Tangentes HD , KE , jusqu'à ce qu'elles se ren-

contrent en un point Q , les parties DQ , EQ , seront égales entr'elles. Ce qui donne $DQ.EQ::DH.EK$. D'où l'on voit que la ligne DE qui joint les points d'attachemens des deux Tangentes HD , KE , sera parallèle à la ligne HK , & le plan SDE au plan CHK : c'est pourquoi la ligne DE sera * la Directrice ; & comme elle coupe la base en deux points, la Section Conique FAG * sera une Hyperbole. De plus il est évident * Def. 10. que cette Hyperbole passera par le point donné F , puisque ce point est commun tant à la surface Conique, qu'au plan CHK qui est celui de l'Hyperbole ; & qu'elle aura pour asymptotes les lignes CH , CK , puisqu'elles sont * les communes Sections des plans touchans SDH , * Def. 15. SEK , & du plan de l'Hyperbole.

S'il arrivoit que les Tangentes DH , EK , fussent parallèles entr'elles, on verroit alors tout d'un coup que les lignes DE , HK , seroient parallèles entr'elles, puisque ces Tangentes sont égales ; & le reste se démontreroit de la même manière que ci-dessus.

PROPOSITION IX.

Theorème.

274. S'il y a deux lignes droites MN , AB , terminées par une Section Conique ou par les Sections opposées, lesquelles se rencontrent en un point P ; & qui soient parallèles à deux autres lignes, SE , SD , données de position : je dis que le rectangle $MP \times PN$ est au rectangle $AP \times PB$, en raison donnée ; c'est à dire que la raison de ces deux rectangles demeure toujours la même, en quelque endroit que puissent tomber les deux lignes MN , AB . FIG. 141. 142.

Ayant mené par les parallèles SE , MN , & SD , AB , deux plans, ils formeront dans le plan de la base, deux lignes droites Enm , $Db a$, & dans la surface Conique les côtés SMm , SNn , SAa , SBb ; & leur commune intersection sera la ligne SPp , qui rencontre le plan de

la base au point p , où les deux droites Em , Da , s'entrecoupent ; par lequel je mene dans le plan SMN la droite HK parallele à MN , & dans le plan SAB la droite FG parallele à AB . Cela posé.

Les triangles semblables SPM , SpH ; SPN , SpK ; SPA , SpF ; SPB , SpG , donnent $MP \times PN = Hp \times pK$:: $\overline{SP} \cdot \overline{Sp}$:: $AP \times PB = Fp \times pG$. Et partant on aura $MP \times PN = AP \times PB$:: $Hp \times pK = Fp \times pG$. Or la raison de $Hp \times pK$ à $Fp \times pG$, est composée des deux raisons de $Hp \times pK$ à $mp \times pn$, & de $mp \times pn$ ou par la propriété du cercle $ap \times pb$ à $Fp \times pG$. Mais à cause des triangles semblables Hpm , SEm , & Kpn , SEn , il vient $Hp \cdot mp$:: $SE \cdot mE$. Et $pK \cdot pn$:: $SE \cdot En$. Et en multipliant les Antecedens & les Conséquens de ces deux raisons, $Hp \times pK \cdot mp \times pn$:: $\overline{SE} \cdot mE \times En$: on prouvera de même à cause des triangles semblables Fpa , SDa , & Gpb , SDb , que $ap \times pb \cdot Fp \times pG$:: $aD \times Db \cdot \overline{SD}$. Il est donc évident que la raison de $MP \times PN$ à $AP \times PB$, est composée des deux raisons de \overline{SE} à $mE \times En$, & de $aD \times Db$ à \overline{SD} , lesquelles par la propriété du cercle qui est la base du cone, demeurent toujours les mêmes en quelque endroit que tombent les droites MN , AB , parce que les points E , D , ne changent point. Donc le rectangle $MP \times PN$ est au rectangle $AP \times PB$ en raison donnée. *Ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE.

FIG. 143. 275. DE LA on voit que si dans une Section Coni-
144. que, où entre les Sections opposées, il y a deux lignes droites MN , OR , paralleles entr'elles & qui rencontrent aux points P , Q , une troisième ligne droite AB aussi terminée par la Section ; on aura $MP \times PN = OQ \times QR$:: $AP \times PB = AQ \times QB$.

PROP.

PROPOSITION X.

Theorème.

276. Si par un point quelconque A d'une Parabole ou d'une Hyperbole MAN, l'on tire une ligne droite AB parallèle au côté du cône SD, menée dans la Parabole par le point D où la Directrice touche la base, & dans l'Hyperbole par l'un des deux points où elle la rencontre; & que par un point quelconque P de cette ligne, l'on tire une ligne MN parallèle à une ligne SE donnée de position, & terminée par la Section ou par les Sections opposées, avec une autre ligne FG parallèle à la ligne Da commune Section du plan SAB avec celui de la base, & terminée par les côtés Sa, SD: je dis que la raison du rectangle MP × PN au rectangle FP × PG est donnée, c'est à dire qu'elle demeure toujours la même, en quelque endroit de la ligne AB que tombe le point P.

Ayant mené par les parallèles, SE, MN, un plan: il formera dans celui de la base une ligne droite Enm; dans la surface Conique les côtés SMm, SNn; & dans le plan SDa la ligne SPp qui rencontre la base au point p, où les lignes Em, Da, s'entrecoupent, par lequel je mene dans le plan SMN la ligne HK parallèle à MN. Cela posé, les triangles semblables SPm, SpH; SPN, SpK; SPe, Spa.; SPG, SpD donneront $MP \times PN. Hp \times pK :: \overline{SP} . \overline{Sp} :: FP \times PG. ap \times pD$, ou par la propriété du cercle $mp \times pn$. Et partant on aura $MP \times PN. FP \times PG :: Hp \times pK. mp \times pn$. Mais la raison de $Hp \times pK$ à $mp \times pn$, est composée de deux raisons de Hp à pm, & de pK à pn, c'est à dire, à cause des triangles semblables Hpm, SEM, & Kpn, SEN, des deux raisons de SE à Em, & de SE à En; & par conséquent $Hp \times pK. mp \times pn$, ou $MP \times PN. FP \times PG :: \overline{SE} . mE \times En$. Donc puisque le point E ne change point en quelque endroit que l'on prenne le point P; & que tous les rectangles Em × En sont égaux.

Aa.

par la propriété du cercle ; il s'ensuit que $MP \times PN$ est à $FP \times PG$ en raison donnée. *Ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE.

FIG. 146. 277. **D**E-LA il est évident que si par un point quelconque A d'une Parabole ou d'une Hyperbole MAN , l'on mène dans la Parabole un diamètre AB , & dans l'Hyperbole une parallèle AB à l'une de ses Asymptotes ; & que par deux points quelconques P, Q , de la ligne AB , l'on tire deux parallèles MN, OR , terminées par la Section ou par les Sections opposées, on aura $MP \times PN. OQ \times QR :: AP. AQ$.

Car menant le plan SAB qui forme par sa rencontre avec la surface Conique les côtés SD, Sa , entre lesquels le côté SD passera par le point où la Directrice touche la base lorsque la Section est une Parabole, & par l'un des deux points où la Directrice la rencontre lorsque c'est une Hyperbole ; & tirant dans le plan SDa par les points P, Q , les droites FG, TV , parallèles à Da : il est clair par la Proposition précédente que $MP \times PN. FP \times PG :: OQ \times QR. TQ \times QV$. Et qu'ainsi $MP \times PN. OQ \times QR :: FP \times PG. TQ \times QV$. Or les parties PG, QV , des lignes FG, TV , sont égales entr'elles ; puisque les lignes AB, SD , sont parallèles. Et partant $MP \times PN. OQ \times QR :: FP. TQ :: AP. AQ$ à cause des triangles semblables APF, AQT . Donc &c.

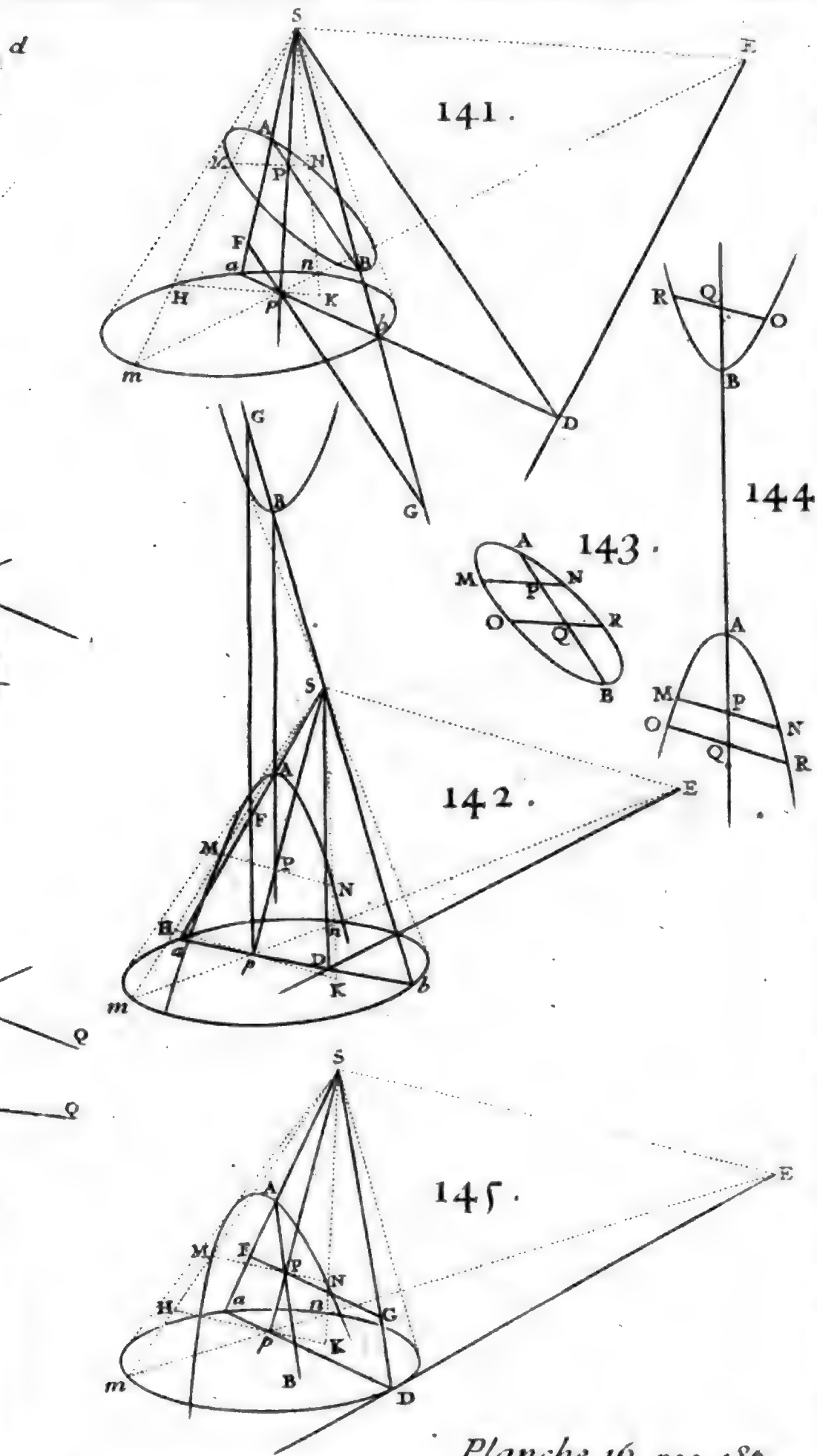
CHAPITRE II.

De l'Ellipse en particulier.

DEFINITIONS.

17.

FIG. 147. Si une ligne droite indéfinie SZ qui est hors le plan d'un cercle VXY , se meut par un de ses points X autour de la circonférence de ce cercle toujours parallèle-



DES TROIS SECTIONS CONIQUES EN GENERAL. 187

lement à elle-même, jusqu'à ce qu'elle soit revenue au même point d'où elle étoit partie : la surface convexe décrite par cette ligne SZ dans ce mouvement, est appelée *Surface cylindrique*.

18.

Cette ligne SZ en chaque différente position, en est toujours appelée le *Côté*.

19.

Le cercle VXY , la *Base*.

20.

La droite indéfinie CO menée du centre C de la base parallèlement aux côtés, en est l'*Axe*.

21.

Le solide indéfini compris par la base VXY & par la Surface cylindrique, est appelé *Cylindre*.

22.

Si l'on coupe un Cylindre par un plan qui ne soit point parallèle à ses côtés, ni au plan de sa base ; la ligne courbe $AMBN$ formée par la rencontre de ce plan avec la Surface cylindrique, est appelé *Section cylindrique*.

PROPOSITION XL

Problème.

278. **S**i l'on coupe un cylindre par un plan uxy parallèle FIG. 147. au plan de la base VXY ; la Section vxy sera un cercle qui aura pour centre le point c où ce plan rencontre l'axe, & pour rayon une ligne cx égale au rayon CX de la base.

Car menant par un point quelconque x de la Section vxy un côté xX de la Surface cylindrique, il sera parallèle * à l'axe Cc : c'est pourquoi on pourra faire pas- * Def. 20. ser un plan par ces deux lignes, qui formera par la rencontre avec les deux plans parallèles $CVXY$, $cvxy$, deux droites CX , cx , parallèles entr'elles ; & qui seront de plus égales, puisqu'elles sont renfermées entre

A a ij.

les paralleles Cc , Xx . Or comme cela arrive toujours en quelque endroit de la Section vxy qu'on prenne le point x , il s'ensuit que toutes les lignes cx menées du point c , aux points x de la Section vxy , sont égales aux rayons CX de la base : c'est à dire que la Section vxy sera la circonference d'un cercle, qui aura pour centre le point c , où le plan vxy rencontre l'axe du cylindre, & pour rayon une ligne cx égale au rayon CX de la base. *Ce qu'il falloit demontrer.*

PROPOSITION XII.

Theorème.

FIG. 148. 279. **T**OUTE Ellipse peut être regardée comme une Section cylindrique.

Ayant mené dans la base du cone où est produite une Ellipse quelconque, le diametre ab qui rencontre à angles droits au point D , la Directrice DE , soient tirés sur la surface Conique les côtés sa , sb , qui rencontrent le plan de l'Ellipse aux points A , B ; & dans les plans paralleles AMB , SDE , les droites AB , SD . Ayant pris DF moyenne proportionnelle entre aD , Db , & mené à SF les paralleles AG , BH , soit décrit sur le plan de la base du cone, un cercle qui ait pour diametre la ligne GH , & une surface cylindrique qui ait pour base ce cercle, & pour côtés les droites AG , BH . Cela posé.

Je dis que si par un point quelconque P de la ligne AB , l'on tire à la Directrice DE , une parallele qui rencontre la surface Conique en M , & la Cylindrique en O ; les points M , O , se confondront l'un avec l'autre & n'en feront qu'un seul.

* Art. 259. Car ayant fait passer par cette parallele un plan parallele au plan des deux bases tant du cone que du cylindre, il formera sur la surface Conique * un cercle KML dont le centre sera la commune Section de ce

plan avec l'axe du cone, & sur la surface Cylindrique * *Art. 278.*
 un autre cercle QMR dont le centre sera la commune
 Section de ce même plan avec l'axe du cylindre. Or le
 plan Sab passe * par l'axe du cone, & le plan $AGHB$ * *Def. 9.*
 (qui ne fait qu'un seul plan avec celui du triangle Sab)
 par l'axe * du cylindre ; & par conséquent les lignes * *Def. 20.*
 KL , QR , communes Sections de ces deux plans, avec le
 plan parallèle (à la base) qui passe par la ligne POM , se-
 ront les diametres de ces deux cercles ; & cette ligne
 POM sera perpendiculaire à ces diametres, puisqu'elle est * *Hyp.*
 parallèle à DE qui est * perpendiculaire à ab & à GH qui * *Hyp.*
 ne font * qu'une même ligne, à laquelle les diametres KL * *Hyp.*
 & QR qui ne font aussi qu'une même ligne, sont paral-
 leles. De plus les lignes AB , SD , étant formées par
 les rencontres du même plan Sba avec deux plans pa-
 ralleles entr'eux ; sçavoir, le plan SDE & celui de l'El-
 lipse, seront aussi paralleles entr'elles. Ceci bien en-
 tendu.

1°. Dans le cone, à cause du cercle KML , on aura
 $\overline{PM} = KP \times PL$; & à cause des triangles semblables
 APK , SDa , & PBL , SDb , il vient $AP. KP ::$
 $SD. aD$. Et $PB. PL :: SD. Db$. D'où il suit que
 $AP \times PB. KP \times PL$ ou $\overline{PM} :: \overline{SD}. aD \times Db$.

2°. Dans le cylindre, à cause du cercle QOR , on aura
 $\overline{PO} = QP \times PR$; & à cause des triangles semblables
 APQ , SDF , & PBR , SDF , on formera ces deux
 proportions $AP. QP :: SD. DF$. Et $PB. PR :: SD.$
 DF . D'où il suit que $AP \times PB. QP \times PR$ ou $\overline{PO} ::$
 $\overline{SD}. DF$ ou $aD \times Db$. Donc $\overline{PM} = \overline{PO}$, &
 $PM = PO$. Donc les points M , O , se confondent l'un
 avec l'autre, & n'en font qu'un seul. Donc, puisque cela
 arrive toujours en quelque endroit de la ligne AB que
 l'on prenne le point P , il s'ensuit que le plan de l'Ellipse
 rencontre les surfaces Coniques & Cylindriques dans
 les mêmes points, & qu'ainsi toute Ellipse peut toujours
 être regardée comme une Section cylindrique.

AVERTISSEMENT.

Comme un Cylindre est moins composé qu'un cone, en ce que tous ses côtés sont parallèles entr'eux ; au lieu que dans le cone ils aboutissent tous au même point qui en est le sommet ; on a pris le parti de regarder dans ce Chapitre, l'Ellipse comme la Section d'un cylindre. Ce qui fait qu'on peut démontrer tout à la fois les propriétés de tous ses diamètres ; & que se servant ensuite dans le cone (comme l'on verra dans le Chapitre suivant) de plans Elliptiques au lieu de circulaires, on prouvera les mêmes chose dans la Parabole & Hyperbole avec une extrême facilité.

PROPOSITION XIII.

Theorème.

FIG. 149. 280. **T**ous les diamètres d'une Ellipse passent par un seul & unique point, qui est celui où le plan de l'Ellipse rencontre l'axe du cylindre ; & y sont coupés en deux parties égales.

Et réciproquement toutes les lignes qui passent par ce point, & qui sont terminées de part & d'autre par l'Ellipse ; y sont coupées en deux également, & en sont des diamètres.

On nomme ce point le Centre de l'Ellipse.

1^o. Soit AB un diamètre quelconque, & C le point où le plan de l'Ellipse rencontre l'axe du cylindre. Si l'on mene les lignes Aa , Bb , parallèles à l'axe Cc , il est clair * qu'elles seront des côtés de la surface cylindrique, & que les deux plans FAa , GBb , qui passent par ces deux lignes, & par les deux tangentes AF , BG , qui selon la définition des diamètres, doivent être parallèles entr'elles, seront parallèles entr'eux, & toucheront la surface cylindrique dans les côtés Aa , Bb ; d'où il suit que ces deux plans formeront dans le plan de la base deux lignes af , bg , parallèles entr'elles, &

* Def. 20.

qui toucheront la base aux points a, b , où les côtés Aa, Bb , la rencontrent. Or il est démontré dans les Elements de Geometrie, que la ligne ab qui joint les points d'attouchement de deux tangentes paralleles af, bg , d'un cercle, passe par son centre c . Partant le plan $AabB$ passera par l'axe Cc du cylindre; & la ligne AB , qui est la rencontre de ce plan avec celui de l'Ellipse, passera par le point C où cet axe rencontre le plan de l'Ellipse. De plus à cause des paralleles Aa, Bb, Cc ; il est évident que le diametre AB de l'Ellipse, est divisé en deux également au point C ; puisque le diametre ab du cercle l'est au point c qui en est le centre. *Ce qu'il falloit démontrer en premier lieu.*

2°. Si l'on mene par les extremités A, B , d'une ligne quelconque AB , qui passe par le point C où le plan de l'Ellipse rencontre l'axe Cc du cylindre, les lignes Aa, Bb , paralleles à cet axe, il est clair selon la définition 17. de la surface cylindrique, qu'elles en seront des côtés, & que le plan $AabB$ passera par l'axe Cc du cylindre. D'où l'on voit que la ligne ab commune Section de ce plan & de celui de la base, passe par le centre c de la base; & qu'ainsi, puisqu'elle y est coupée en deux également, la ligne AB la sera aussi au point C . De plus les tangentes af, bg , qui passent par les extremités du diametre ab étant paralleles entr'elles; les plans touchans faA, gbB , seront paralleles entr'eux, & formeront dans le plan de l'Ellipse deux lignes paralleles AF, BG , qui la toucheront aux extremités A, B , de la ligne AB , qui en sera par conséquent un diametre. *C'est ce qu'il falloit démontrer en second lieu.*

COROLLAIRE.

281. D E-L A il est évident que par un point donné sur le plan d'une Ellipse autre que le centre, on ne peut faire passer qu'un seul diametre.

PROPOSITION XIV.

Theorème.

FIG. 149. 282. **T**OUTE ordonnée MPN de part & d'autre à un diamètre AB , est coupée en deux également par ce diamètre en un point P .

Et réciproquement si une ligne quelconque MPN terminée par une Ellipse & qui ne passe point par le centre C , est coupée en deux également en P , par un diamètre AB , elle sera ordonnée de part & d'autre à ce diamètre.

Ayant mené par les points A, B, M, N , les côtés Aa, Bb, Mm, Nn , parallèles à l'axe Cc du cylindre, & qui rencontrent le plan de la base aux points a, b, m, n ; la ligne Pp commune Section des deux plans $AabB, MmnN$, sera parallèle aux côtés du cylindre, puisque tous les côtés sont parallèles entr'eux. De plus le plan $AabB$ passera par l'axe Cc du cylindre, puisque le diamètre AB passe par le point C où cet axe rencontre le plan de l'Ellipse; & il formera par conséquent dans le plan de la base une ligne ab qui passera par le centre c , c'est à dire, un diamètre. Cela posé.

Puisque par la supposition la ligne MPN est ordonnée de part & d'autre au diamètre AB , elle sera parallèle aux tangentes AF, BG , qui passent par les extrémités de ce diamètre; & par conséquent les plans touchans FAa, GBb , seront parallèles au plan $MmnN$. Les lignes que ces trois plans forment dans le plan de la base; sçavoir les deux tangentes af, bg , & la ligne mn , seront donc parallèles entr'elles; & ainsi la ligne mn sera perpendiculaire au diamètre ab , qui la divisera par conséquent en deux parties égales au point p . D'où il suit à cause des parallèles Mm, Pp, Nn , que la ligne MN sera aussi divisée en deux parties égales au point P .

Maintenant pour prouver la converse, on menera
dans

dans le plan de l'Ellipse deux tangentes AF , BG , & pa- * *Art. 267.*
 ralleles à MN ; & ayant tiré par leurs points d'attou-
 chemens le diametre AB , il est clair selon les définitions
 13. & 14. que cette ligne MN sera ordonnée de part
 & d'autre à ce diametre., & par conséquent (selon ce
 qu'on vient de démontrer) coupée en deux également
 en P par ce même diametre. Or comme l'on ne peut
 mener par le point P * qu'un seul diametre, il s'ensuit * *Art. 281.*
 que si une ligne MN terminée par une Ellipse, & qui
 ne passe point par le centre C , est coupée en deux éga-
 lement en P par un diametre AB , elle lui sera ordonnée
 de part & d'autre.

PROPOSITION XV.

Theorème.

283. S'il y a dans une Ellipse deux diametres AB , DE ; *Fig. 149.*
 dont l'un d'eux DE soit parallele aux Tangentes AF , BG ,
 qui passent par les extremités de l'autre AB : je dis récipro-
 quement que le diametre AB sera parallele aux Tangentes qui
 passent par les extremités du diametre DE .

Les deux diametres AB , DE , sont appelés Conju-
 gués l'un à l'autre.

Ayant mené par les points A , B , D , E , les côtés
 Aa , Bb , Dd , Ee , du cylindre, lesquels rencontrent le plan
 de la base aux points a , b , d , e ; les plans $AabB$,
 $DdeE$, passeront par l'axe Cc du cylindre, puisque les
 lignes AB , DE , sont des diametres de l'Ellipse; &
 formeront par conséquent dans le plan de la base, deux
 diametres ab , de . Or le plan touchant FAa étant pa-
 rallele au plan $DdeE$, formera dans le plan de la base
 une Tangente af parallele au diametre de , lequel dia-
 metre sera par conséquent perpendiculaire sur le dia-
 metre ab . Si donc l'on mene par l'une des extremités d
 du diametre de une Tangente dh au cercle, elle sera
 parallele au diametre ab , & le plan bdD parallele au
 Bb

plan $AabB$: c'est pourquoi les communes Sections de ces deux plans avec le plan de l'Ellipse, sçavoir la Tangente DH & le diametre AB , sont paralleles entr'elles. On prouvera la même chose à l'égard de la Tangente qui passe par l'autre extremité E du diametre DE . Donc &c.

COROLLAIRE I.

284. **D**E-LA il est évident que s'il y a deux diametres conjugués AB , DE , dans une Ellipse ; les deux plans qui passent par ces diametres & par l'axe Cc du cylindre, formeront dans le plan de la base deux diametres ab , de , qui seront perpendiculaires entr'eux : ce qui est réciproque.

COROLLAIRE II.

285. **I**L suit encore de cette Proposition que si par un point quelconque P d'un diametre AB , on mene une ordonnée MPN de part & d'autre, elle sera parallele au diametre DE qui lui est conjugué ; & qu'ainsi on aura * $MP \times PN$ ou \overline{PM} . $DC \times CE$ ou \overline{DC} :: $AP \times PB$. $AC \times CB$ ou \overline{AC} . Ce qui donne \overline{PM} . $AP \times PB$:: \overline{DC} . \overline{AC} :: $4\overline{DC}$ ou \overline{DE} . $4\overline{AC}$ ou \overline{AB} . C'est à dire que le quarré d'une ordonnée quelconque MP à un diametre AB , est au rectangle $AP \times PB$ fait des parties de ce diametre, comme le quarré du diametre DE qui lui est conjugué, est au quarré du diametre AB .

PROPOSITION XVI.

Theorème.

FIG. 150. 286. **S**i par un point quelconque M d'une Ellipse AMB , l'on mene une Tangente FMG qui rencontre aux points F, G , deux autres Tangentes AF, BG , paralleles entr'elles : je dis que $FM. MG$:: $AF. BG$.

Ayant mené par les points d'attouchemens A, B, M , les côtés Aa, Bb, Mm , du cylindre, & fait passer par ces côtés & par les Tangentes AF, BG, FG , les trois plans FAa, GBb, FMm , ou GMm ; il est clair que les communes Sections Ff, Gg , des deux premiers plans avec le troisième, seront paralleles tant entr'elles, qu'avec les côtés du cylindre; car les deux plans FMm, FAa , passant par les côtés Mm, Aa , qui sont paralleles entr'eux, leur commune Section Ff sera parallele à ces côtés; & par la même raison Gg commune Section des deux plans GBb, GMm , sera parallele aux côtés Bb, Mm . De plus les lignes af, bg , que forment les plans touchans paralleles FAa, GBb , dans le plan de la base, en seront des Tangentes paralleles; les parties fm, mg , de la troisième Tangente formée dans le plan de la base par le troisième plan touchant FMm , ou GMm , seront égales (par la propriété du cercle) aux Tangentes af, bg ; sçavoir, fm à fa , & mg à gb . Cela pose.

A cause des lignes Aa, Ff, Mm, Gg, Bb ; & AF, BG ; & af, bg , qui sont paralleles entr'elles, on aura $FM. MG :: fm$ ou $fa. mg$ ou $gb :: FA. GB$. Ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE I.

287. Si l'on mene par les points d'attouchement A, B , des deux Tangentes paralleles entr'elles AF, BG , un diametre AB qui rencontre en T la Tangente FMG , & qu'on tire l'ordonnée MP à ce diametre: il est évident que $AP. PB :: FM. MG :: AF. BG :: AT. BT$. Et qu'ainsi $PB - AP. PB :: BT - AT$ ou $AB. BT$.

COROLLAIRE II.

288. D E-L A on tire la manière suivante de mener d'un point donné M sur une Ellipse la Tangente MT , un diametre AB étant donné avec la position de ses ordonnées.

De l'une des extrémités B du diamètre AB , soit tirée au point donné M la droite BM . Puis ayant mené l'ordonnée MP au diamètre AB , & pris sur ce diamètre du côté de B la partie PH égale à PA , soit tirée HK parallèle à PM , rencontrant la ligne BM en K , par où & par l'autre extrémité A soit menée AK . Soit enfin tirée MT parallèle à AK , elle sera la Tangente qu'on cherche.

Car à cause des parallèles MP , HK , & AK , MT , l'on aura BP . PH . ou $PA :: PM$. $MK :: BT$. TA .

COROLLAIRE III.

289. S'IL y a dans une Ellipse deux Tangentes MT , NT , qui se rencontrent en un point T ; je dis que le diamètre AB qui passe par le point P milieu de la ligne MN qui joint les deux points d'attouchement, passera aussi par le point T . Car PN est ordonnée au diamètre AB de même que PM ; & par conséquent * les Tangentes MT , NT , iront chacune rencontrer ce diamètre en un point T , tel que $PB = AP$. $PB :: AB$. BT ; c'est à dire dans le même point.

COROLLAIRE IV.

290. SI l'on joint dans une Ellipse les points d'attouchemens M , N , de deux Tangentes MF , NL , par une ligne droite MN ; & qu'il y ait une troisième Tangente FAL parallèle à MN : je dis que les parties FA , AL de cette dernier Tangente, prises entre son point d'attouchement A & les deux premières, seront égales entr'elles. Car ayant mené par le point d'attouchement A le diamètre AB , il est clair que la ligne MN est ordonnée de part & d'autre à ce diamètre, puisqu'elle est parallèle à la Tangente FL qui passe par son extrémité A ; & qu'ainsi il la coupe par le milieu en

* Art. 289. P , & passe * par conséquent par le point de rencontre

des deux Tangentes MF , NL ; ou bien il leur sera parallele , si la ligne MN est un diametre. Or il est visible en l'un & l'autre cas , que FZ sera divisé en deux parties égales au point A par le diametre AB ; puisque MN l'est en P par ce même diametre. * *Art. 183.*

CHAPITRE III.

De la Parabole & de l'Hyperbole en particulier.

PROPOSITION XVII.

Theorème.

291. **D**ANS une Parabole toute ordonnée MPN de *Fig. 151.* part & d'autre à un diametre AB , est coupée en deux également par ce diametre au point P : ce qui est reciproque.

Ayant fait passer par la ligne MN un plan Elliptique , il formera dans le plan touchant SDE parallele au plan Parabolique , une Tangente DE parallele à MN . De plus le plan SAF mené par le Sommet S du cone , & par la Tangente AF qui passe par l'origine A du diametre AB , formera dans le plan Elliptique une Tangente af ; & la ligne Da qui joint les points d'attouchement des deux Tangentes DE , af , passera par le point P ; puisque le diametre AB est parallele au côté touchant SD . Cela posé.

Puisque par la supposition * les deux lignes AF , MN , * *Def. 14.* sont paralleles entr'elles ; il s'ensuit que la Tangente af , qui est la commune Section de deux plans qui passent par ces deux lignes , sera parallele à MN ; & par conséquent à DE . D'où l'on voit * que la ligne Da , qui joint les points * *Def. 13.* d'attouchement des deux Tangentes paralleles DE , af , est un diametre de l'Ellipse ; & qu'ainsi la ligne MN qui est parallele à ces Tangentes & terminée par l'Ellipse , sera * divisée en deux également au point P . * *Art. 182.*

Maintenant pour prouver la converse , on menera

- * *Art.* 267. dans le plan de la Parabole * une Tangente AF parallèle à la ligne MN ; & ayant tiré par le point d'atrouchement A un diamètre AB , il aura pour ordonnée de part & d'autre * la ligne MN , qu'il divisera par conséquent en deux parties égales au point P selon ce qu'on vient de démontrer. Or comme il n'y a qu'un seul diamètre * qui puisse passer par le point de milieu P de la ligne MN , il s'ensuit &c.

COROLLAIRE.

292. **D**E-LA il est évident que si l'on mène par deux points quelconques P, Q , d'un diamètre AB deux ordonnées de part & d'autre MPN, OQR , on aura * *Art.* 277. toujours * $MP \times PN$ ou \overline{PM}^2 : $OQ \times QR$ ou \overline{QO}^2 :: AP . AQ . C'est à dire que les quarrés des deux ordonnées quelconques PM, QO , à un diamètre AB , seront toujours entr'eux, comme les parties AP, AQ , de ce diamètre prises depuis son origine A jusqu'à ces mêmes ordonnées.

PROPOSITION XVIII.

Theorème.

- Fig.* 151. 293. **S**i par un point quelconque M d'une Parabole, l'on mène une ordonnée MP à tel de ses diamètres AB qu'on voudra, & une Tangente MT qui rencontre en T ce diamètre prolongé au delà de son origine A ; je dis que ses parties AP, AT , sont égales.

- La même préparation étant faite que dans la Proposition précédente, soit de plus mené par le Sommet S du cone & par la Tangente MT , le plan touchant STM qui formera dans le plan Elliptique la Tangente MH , laquelle rencontrera le diamètre Da de l'Ellipse en un point H par où passera la ligne ST ; & soit enfin tirée la droite TG parallèle à SA . Ceci bien entendu, on aura * *Art.* 287. DH, Ha :: DP, Pa , & (*alternando*)

$DH. DP :: Ha. Pa$. Mais à cause des paralleles AB , SD , & SA , TG ; il est clair que $DH. DP :: SH. ST :: Ha. Ga$. Donc $Ha. Pa :: Ha. Ga$. Donc aussi $Pa = Ga$; & par conséquent $AP = AT$. Ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION XIX.

Theorème.

294. **D**ANS les Hyperboles opposées tout diametre AB FIG. 152. passe par le point d'intersection C des deux asymptotes, & y est coupé en deux également : ce qui est reciproque.

On nommera ce point, Centre.

Soit HSh une des deux communes Sections du plan parallele au plan Hyperbolique, & des deux surfaces Coniques opposées; & soit l'Asymptote FG formée par la rencontre du plan Hyperbolique avec celui qui touche ces deux surfaces en cette ligne HSh . Soient menées par les Tangentes paralleles AF, BG , qui passent par les extrémités du diametre AB , & qui rencontrent l'Asymptote FG aux points F, G , deux plans Elliptiques paralleles; ils formeront dans le plan touchant qui passe par le côté HSh , les Tangentes paralleles FH, Ghf , & dans le plan touchant SAF les Tangentes paralleles AF, af .

Cela posé, les lignes paralleles FH, Gh , étant renfermées entre les deux autres paralleles FG, Hh , seront égales entr'elles; & les triangles semblables SHF, Shf , & SFA, Sfa , donneront cette proportion, $HF. hf :: SF. sf :: FA. fa$. Et partant $HF. FA :: hf. fa ::$ * $hG. GB$. Donc puisque $HF = hG$, il s'en- * Art. 286. suit que $AF = BG$; & à cause des triangles semblables ACF, BCG , que $AC = CB$: c'est à dire que l'Asymptote FG passe par le point de milieu C du diametre AB . On prouvera de même que l'autre Asymptote passera encore par le point de milieu C du diametre AB ; d'où l'on voit que le diametre AB passe par le

point d'intersection C des deux Asymptotes, & y est coupée en deux parties égales.

- * *Art.* 167. Soit à présent une ligne AB qui passant par le point d'intersection C des deux Asymptotes, rencontre les Hyperboles opposées aux points A, B . Si l'on mène par le point A la Tangente AF , & à l'Hyperbole opposée une Tangente DG * parallèle à AF ; il est clair par ce qu'on vient de prouver que la ligne AD qui joint les points d'attouchemens de ces deux Tangentes étant un diamètre, passera par le point d'intersection C des Asymptotes. Elle se confondra donc avec la ligne AB qui passe aussi * par les deux mêmes points A, C : c'est à dire que le point D tombera sur le point B . C'est pourquoi cette ligne AB sera un diamètre, & partant coupée en deux parties égales au point C .
- * *Hyp.*

COROLLAIRE.

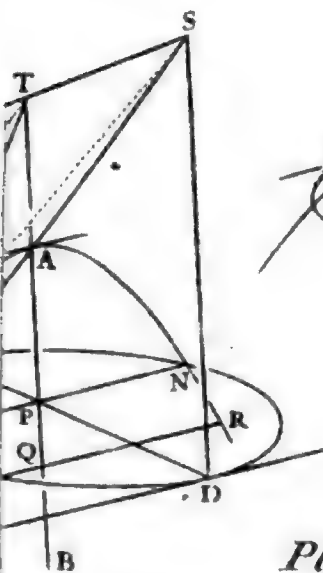
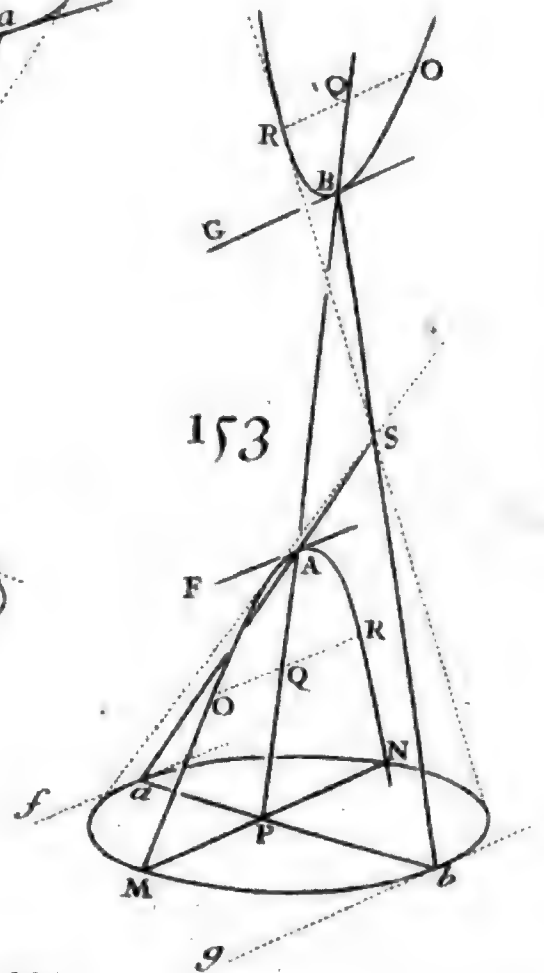
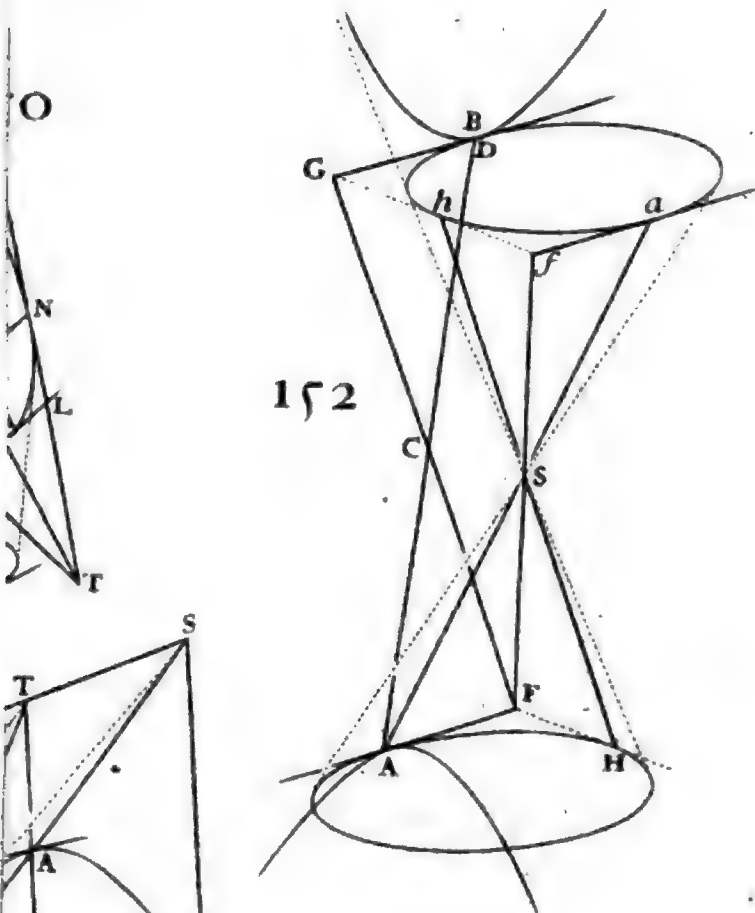
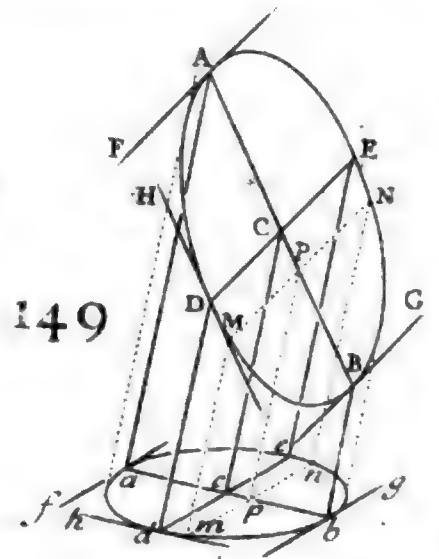
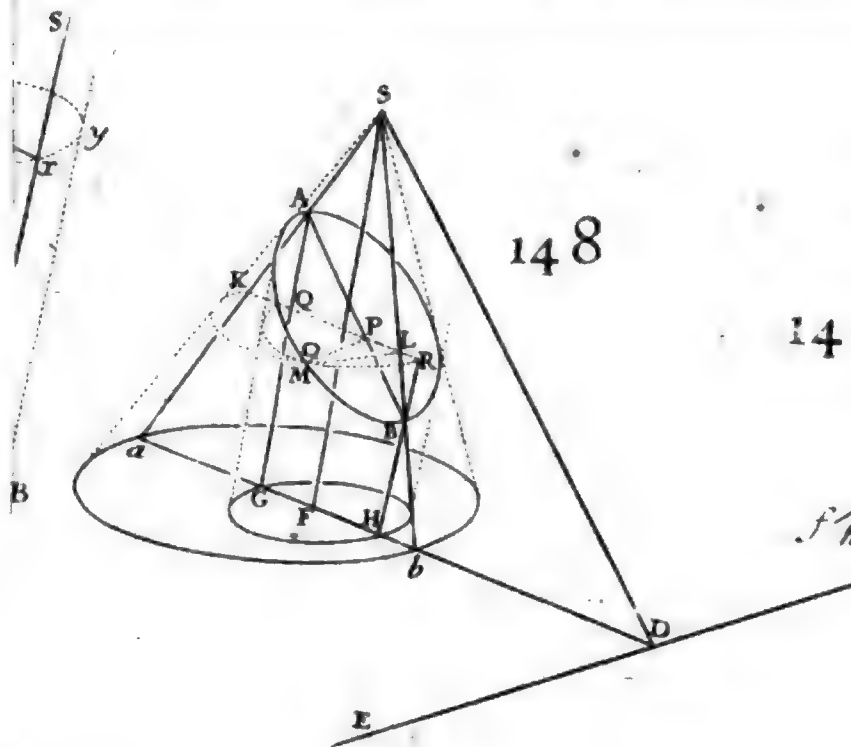
295. D'ELA on voit que d'un point donné au dedans d'une Hyperbole, on ne peut mener qu'un seul diamètre; puisqu'il n'y a qu'une seule ligne qui puisse passer par ce point, & par le centre.

PROPOSITION XX.

Théorème.

- FIG. 153. 296. D'ANS les Hyperboles opposées toute ordonnée MPN de part & d'autre à un diamètre AB , est coupée en deux également par ce diamètre au point P : ce qui est réciproque.

Ayant fait passer par la ligne MN un plan Elliptique, il formera dans les deux plans touchans SAB , SBG , deux Tangentes af, bg ; & la ligne ab qui joint les points d'attouchemens de ces deux Tangentes, étant la commune Section du plan Elliptique & du plan SAB , passera par le point P . Or puisque par la supposition les



les deux lignes AF , MN , sont paralleles, il s'ensuit que la ligne af qui est la commune Section de deux plans, qui passent par ces deux lignes, sera parallele à MN . Par la même raison la Tangente bg commune Section du plan Elliptique & du plan touchant SBG , lesquels passent par les deux paralleles MN , BG , sera parallele à MN . Les deux Tangentes af , bg , seront donc paralleles entr'elles : d'où il suit que la ligne ab * est un diametre * *Def. 13.* de l'Ellipse ; & qu'ainsi la ligne MN * est divisée en deux * *Art. 282.* parties égales au point P .

Maintenant pour prouver la converse, on menera dans le plan des Hyperboles * deux Tangentes AF , BG , paralleles à la ligne MN terminée par l'Hyperbole ; & ayant tiré par leurs points d'attouchemens le diametre AB , il est clair selon la Définition quatorzième, que ce diametre aura pour ordonnée de part & d'autre la ligne MN ; & qu'ainsi il la coupera selon ce qu'on le vient de démontrer, en deux parties égales au point P . Or comme il n'y a qu'un seul diametre * qui puisse passer par ce point, il s'ensuit que * *Art. 295.* si une ligne MN terminée par une Hyperbole, est coupée en deux également en P par un diametre AB , elle sera ordonnée de part & d'autre à ce diametre.

COROLLAIRE.

297. DE LA il est évident que si l'on mene deux ordonnées de part & d'autre MPN , OQR , à un diametre AB , on aura toujours * $MP \times PN$. ou \overline{PM} * *Art. 275.* $OQ \times QR$ ou \overline{OQ} :: $AP \times PB$. $AQ \times QB$. C'est à dire &c.

PROPOSITION XXI.

Theorème.

298. SI par un point quelconque M d'une Hyperbole l'on FIG. 154
mene une Tangente MFG qui rencontre deux autres Tangentes paralleles AF , BG , aux point F , G : je dis que $MF \cdot MG :: AF \cdot BG$.

Cc

Ayant mené deux plans Elliptiques paralleles qui passent par les Tangentes AF , BG ; ils formeront dans le plan touchant SMG deux Tangentes HF , hG , paralleles entr'elles; & le plan Elliptique qui passe par BG , formera dans le plan touchant SAF , une Tangente af qui rencontrera la Tangente hG au point f ; où la ligne FS rencontre ce plan Elliptique. Cela posé, les Tangentes af , BG , seront paralleles entr'elles; puisqu'elles le sont chacune à la Tangente AF : & partant * on aura $BG. Gh :: af.fh$ (à cause des triangles semblables Shf , SHF , & Saf , SAF ,) :: $AF.FH$. Donc $BG.AF :: Gh.FH$ (à cause des triangles semblables $M Gh$, MFH ,) :: $MG.MF$. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Il est visible qu'on peut tirer de cette Proposition les mêmes Corollaires, que dans l'Ellipse art. 287. 288. 289. & 290. c'est pourquoi je ne m'amuserai point à les repeter.

PROPOSITION XXII.

Theorème.

FIG. 155. 299. *Si une ligne droite FG terminée par les Asymptotes d'une Hyperbole, la touche en un point A; je dis que cette ligne droite y sera coupée en deux parties égales.*

Soient menés par le Sommet S du cone, & par les deux Asymptotes CF , CG , deux plans, lesquels toucheront * la surface Conique dans les côtes SM , SN , où le plan MSN parallele au plan Hyperbolique la rencontre. Soit mené un plan Elliptique qui passe par la droite FG : il formera dans les deux plans touchans deux Tangentes MF , NG , & dans le plan MSN une ligne droite MN parallele à FG , & qui joint les points d'atouchemens de ces deux Tangentes. Cela posé, il est visible que la ligne FG * est coupée en deux parties égales au point A , puisqu'elle touche dans ce point l'Ellipse, aussi-bien que l'Hyperbole.

COROLLAIRE I.

300. COMME il ne peut y avoir qu'une seule ligne FG qui passant par un point donné A au dedans d'un angle FCG , & étant terminée par ses côtés, soit coupée en deux également par ce point A ; il s'ensuit que si une ligne droite FG terminée par les Asymptotes d'une Hyperbole, la rencontre en un point A qui divise cette droite FG en deux parties égales, elle touchera l'Hyperbole en ce point.

COROLLAIRE II.

301. DE-LA on voit que pour mener d'un point donné A sur une Hyperbole dont les Asymptotes CF , CG , sont données, une Tangente FAG ; il n'y a qu'à tirer la ligne AD parallèle à l'une des Asymptotes CG , & terminée par l'autre, & ayant pris la partie DF égale à CD , tirer la ligne FAG : elle sera la Tangente cherchée. Car à cause des triangles semblables FCG , FDA , la ligne FG sera coupée par le milieu en A ; puisque CF l'est en D . * *Hyp.*

COROLLAIRE III.

302. SI l'on joint deux points quelconques M , N , d'une Hyperbole MAN par une ligne droite qui rencontre les Asymptotes aux points H , K ; les deux parties MH , NK , de cette droite renfermées entre l'Hyperbole & les Asymptotes, seront égales entr'elles. Car ayant mené par le point P milieu de MN , le diamètre CP ; & par le point A où ce diamètre rencontre l'Hyperbole, la ligne FG parallèle à MN , & terminée par les Asymptotes: il est clair * que cette ligne FG sera Tangente en A ; & par conséquent * divisée en deux parties égales en ce point. D'où il est clair, à cause des triangles semblables CAF , CPH , & CAG , CPK , que $PH = PK$; & par conséquent $MH = NK$. * *Art. 196.*
* *Art. 199.*

COROLLAIRE IV.

FIG. 157. 303. Si d'un point donné A sur une Hyperbole, l'on tire deux droites AF , AG , terminées par les Asymptotes; & que d'un autre point quelconque M de la même Hyperbole, ou de son opposée, on tire deux autres droites MH , MK , terminées aussi par les Asymptotes, & parallèles aux deux premières AF , AG : je dis que $FA \times AG = HM \times MK$.

Car 1°. Lorsque les deux points A , M , tombent sur la même Hyperbole; ayant joint ces deux points A , M , par une ligne droite qui rencontre les Asymptotes en P & Q , les triangles semblables PAF , PMH , & QMK , QAG , donneront ces deux proportions, $AF.MH ::$

* Art. 302. $AP.MP :: MQ.AQ :: MK.AG$. ce qui donne, en multipliant les extrêmes & les moyens, $FA \times AG = HM \times MK$.

2°. Lorsque les points A , M , tombent sur les deux Hyperboles opposées; ayant mené par le point donné A & par le centre C , le diamètre AB , & tiré les droites BD , BE , parallèles à AF , AG , & terminées par les mêmes Asymptotes; il est clair que les triangles CAF , CBD , & CAG , CBE , seront semblables & de plus égaux entr'eux, puisque * $CA = CB$. C'est pourquoi $BD = AF$, & $BE = AG$; & partant $DB \times BE = FA \times AG$. Or selon le cas précédent $KM \times MH = DB \times BE$. Donc aussi $FA \times AG = KM \times MH$.

AVERTISSEMENT.

Je laisse les autres propriétés des Asymptotes, & des Diamètres conjugués, parce qu'elles se tirent de celles-ci sur le plan, comme l'on a fait dans le troisième Livre; mon dessein n'étant ici que de faire voir de quelle utilité peut être la considération du Solide, pour démontrer tout à la fois & sans aucun calcul, les pro-

DES TROIS SECTIONS CONIQ. EN GENERAL. 205
prietés de tous les Diametres , des Tangentes , & des
Asymptotes ; d'où dependent toutes les autres. C'est ce
que je crois avoir executé d'une manière fort aisée , &
entièrement nouvelle ; puisque je ne me suis point servi
de lignes coupées harmoniquement , comme ont fait les
Geometres Modernes après *M^{rs}. Paschal & Descartes* ; ce
qui les a obligés d'avoir recours à un grand nombre de
Lemmes , dont les démonstrations seules me paroissent
aussi longues que celles de tout ce Livre.



LIVRE SEPTIÈME.

Des Lieux Geometriques.

DÉFINITION I.

FIG. 158. 159. **S**OIENT deux droites inconnues & indéterminées AP , PM , qui fassent entr'elles un angle APM donné ou pris à volonté ; & dont l'une AP que j'appellerai toujours x , ait un commencement fixe au point A , & s'étende indéfiniment le long d'une ligne droite donnée de position ; & l'autre PM que je nommerai y , en change continuellement, & soit toujours parallèle à elle-même : c'est à dire que toutes les droites PM doivent être parallèles entr'elles. Soit de plus une équation qui ne renferme que ces deux inconnues x & y mêlées avec des connues, & qui exprime la relation de chaque indéterminée $AP(x)$ à sa correspondante $PM(y)$. La ligne droite ou courbe qui passe par les extrémités de toutes les valeurs de y , c'est à dire, par tous les points M , est appelée en général un *Lieu Geometrique*, & en particulier le *Lieu* de cette équation.

FIG. 158. Supposons, par exemple, que l'équation $y = \frac{bx}{a}$ doive exprimer toujours la relation de $AP(x)$ à $PM(y)$ qui font entr'elles un angle donné ou pris à volonté APM . Ayant pris sur la ligne AP la partie $AB = a$, & de B mené $BE = b$ parallèle à PM & du même côté ; la droite indéfinie AE sera nommée en général un *Lieu Geometrique*, & en particulier le *Lieu* de cette équation. Car ayant mené d'un de ses points quelconques M la droite MP parallèle à BE , les triangles semblables ABE , APM , donneront toujours cette proportion, $AB(a). BE(b) :: AP(x). PM(y) = \frac{bx}{a}$. Et partant la droite AE est le lieu de tous les points M .

De même si $yy = aa - xx$ exprime la relation de *Fig. 159.*
 AP à PM , & que l'angle APM soit droit ; la cir-
 conference d'un cercle qui a pour rayon la droite AB
 $= a$ prise sur la ligne AP , sera appelée en général un
Lieu Geometrique, & en particulier le *Lieu* de cette équation.
 Car ayant mené d'un de ses points quelconques
 M , la perpendiculaire MP (y), on aura toujours par
 la propriété du cercle, $PM^2 (yy) = DP * PB (aa - xx)$
 en prenant BD pour le diamètre de ce cercle. D'où l'on
 voit que la circonference est le lieu de tous les points M .

REMARQUE.

304. Si après avoir supposé que les PM tendent *Fig. 158.*
 vers un certain côté de la ligne AB , comme vers Q , *159.*
 on suppose ensuite qu'elles tendent vers le côté oppo-
 sé, comme vers G ; il faut remarquer que leurs valeurs
 deviennent négatives de positives qu'elles étoient, &
 qu'ainsi on a pour lors $PM = -y$. De même si après
 avoir supposé que les points P tombent d'un certain
 côté par rapport au point A , comme du côté de B , on
 suppose ensuite qu'ils tombent du côté opposé, comme
 vers D ; les AP deviendront négatives de positives
 qu'elles étoient, & on aura par conséquent $AP = -x$.
 Les positives de ces valeurs s'appellent aussi Valeurs
vraies ; & les négatives, Valeurs *fausses*. Or un lieu Geo-
 metrique doit passer par les extrémités de toutes les va-
 leurs tant vraies que fausses de l'inconnue y , qui répon-
 dent aux valeurs tant vraies que fausses de l'autre incon-
 nue x . Si donc l'on mène la droite QAG parallèle à
 PM , un lieu Geometrique pourra se trouver dans les
 quatre angles BAQ , BAG , GAD , DAQ , comme dans
 le second exemple (*fig. 159.*), ou seulement dans quel-
 ques uns de ces angles comme dans le premier (*fig. 158.*).
 Car supposé dans le second exemple, qu'on fasse d'a-
 bord $AP = x$, & $PM = y$, en prenant le point M sur
 le quart QB de la circonference ; si ensuite le point M

est pris sur le quart GB , on aura $AP = x$, & $PM = -y$; s'il est pris sur DG , on aura $AP = -x$, & $PM = -y$; & enfin s'il est pris sur DQ , on aura $AP = -x$, & $PM = y$; & il viendra toujours dans tous ces cas par la propriété du cercle, la même équation $yy = aa - xx$; parce que les quarrés de $\pm y$ & de $\pm x$ sont les mêmes dans tous ces cas, savoir yy & xx . De même dans le premier exemple, si en prenant d'abord le point M du côté de E sur AE , dans l'angle QAP , on fait $AP = x$, & $PM = y$; Ce point M pris ensuite sur EA prolongée du côté de A dans l'angle GAD , donnera $AP = -x$, & $PM = -y$; & à cause des triangles semblables ABE , APM , on formera cette proportion $AB(a). BE(b) :: AP(-x). PM(-y) = -\frac{bx}{a}$; & partant $y = \frac{bx}{a}$, qui est la même équation que l'on trouve en supposant que le point M tombe dans l'angle $B A Q$.

A V E R T I S S E M E N T.

Lorsqu'il s'agira dans la suite de construire le lieu d'une équation donnée, on supposera toujours que $AP(x)$ & $PM(y)$ soient positives, c'est à dire que tous les points M tombent dans le même angle $B A Q$. Et on prendra pour le lieu de l'équation donnée la portion du lieu qui sera renfermée dans cet angle.

D É F I N I T I O N. II.

Les anciens Geometres ont appelé *Lieux plans*, ceux qui sont des lignes droites, ou des cercles; *Solides*, ceux qui sont des Paraboles, des Ellipses, ou des Hyperboles. Mais les Modernes distribuent les lieux Geometriques en differens degres: ils comprennent sous le premier tous ceux où les inconnues x & y n'ont qu'une dimension dans leurs équations; sous le second, tous ceux où elles n'en ont que deux; sous le troisieme, tous ceux où elles n'en ont que trois; & ainsi de suite. Où l'on doit

doit observer que les inconnuës x & y ne se doivent point multiplier l'une l'autre dans le premier degré ; qu'elles ne doivent faire au plus ensemble qu'un produit de deux dimensions xy dans le second, un de trois xyy ou xyx dans le troisième, &c.

DÉFINITION III.

Les termes de l'équation d'un lieu, sont regardés comme differens entr'eux lorsque l'une ou l'autre des inconnuës x & y , ou toutes les deux jointes ensemble s'y trouvent avec différentes dimensions. Ainsi dans le premier degré si l'on propose l'équation $y - \frac{bx}{a} + c = 0$, les termes y , $-\frac{bx}{a}$, c , seront differens ; & de même dans le second, si l'on proposoit $yy + \frac{2bxy}{a} - 2cy - \frac{fxx}{a} + gx + hx - hh + ll = 0$, les termes yy , $\frac{2bxy}{a}$, $-2cy$, $-\frac{fxx}{a}$, $gx + hx$, $-hh + ll$, seroient chacun differens.

seront
+ gx

AVERTISSEMENT.

Je n'expliquerai ici en détail que les lieux du premier & du second degré ; ce que j'en dirai donnera beaucoup d'ouverture pour construire des lieux plus composés dans les cas particuliers qui se peuvent rencontrer : on en trouvera même quelques exemples dans la suite. Mon dessein est donc de donner dans ce Livre une méthode générale pour construire les lieux du premier & du second degré, leurs équations étant données ; & de faire voir que le premier ne renferme que la ligne droite ; & que le second ne renferme de même que la Parabole, l'Ellipse & le Cercle, l'Hyperbole & les Hyperboles opposées.

(voyez les lieux du
2^e degré, les lieux
dans le livre 2)

DEMANDE.

c. 305. ON demande qu'on puisse réduire sous une fraction simple & abrégée, toute quantité litterale donnée, si composée qu'elle puisse être.

On demande par exemple, 1°. Qu'on puisse prendre une fraction simple $\frac{b}{a} = \frac{cc+ff}{af+fc} + \frac{aa}{gg}$, où les lettres a, c, f, g , marquent des lignes données. 2°. Qu'on puisse trouver une seule ligne droite $s = \frac{agc-bce}{bb+af}$, où les lignes droites a, b, c, e, f, g , sont données. 3°. Qu'on puisse trouver un quarré $tt = ss - \frac{ccce-eehh}{bb+af}$, où les lignes a, b, c, e, f, h, s , sont données; de sorte qu'on ait son côté $t = \sqrt{ss - \frac{ccce-eehh}{bb+af}}$. On enseignera au commencement du huitième Livre comment cela se fait.

neuvième

PROPOSITION I.

Problème.

c. 306. CONSTRUIRE tout lieu du premier degré, son équation étant donnée.

Lorsque les inconnuës x & y n'ont qu'une dimension dans l'équation proposée, & que leur produit xy ne s'y rencontre point; le lieu de cette équation sera toujours une ligne droite, & on la réduira à l'une des quatre formules suivantes.

$$1^{\circ}. y = \frac{bx}{a}, 2^{\circ}. y = \frac{bx}{a} + c, 3^{\circ}. y = \frac{bx}{a} - c, 4^{\circ}. y = c - \frac{bx}{a},$$

dans lesquelles on suppose que l'inconnuë y soit délivrée de fractions, & que la fraction qui multiplie l'autre in-

* Art. 305. connuë x soit réduite * sous cette expression $\frac{b}{a}$, & tous les termes connus sous cette autre c .

Les mêmes choses étant posées que dans la définition première, on construira les lieux des trois dernie-

res formules de la maniere qui suit , car pour le lieu de la premiere , on l'a déjà construit dans cette definition.

Pour construire le lieu de la seconde formule $y = \frac{bx}{a} + c$. FIG. 160.

$\frac{bx}{a} + c$, on prendra sur la ligne AP la partie $AB = a$; & ayant mené les droites $BE = b$, $AD = c$, paralleles à PM & du même côté, on tirera la ligne AE indéfinie du côté de E , & la droite indéfinie DM parallele à AE . Je dis que cette ligne DM renfermée dans l'angle PAQ fait par la ligne AP & par la droite AQ menée parallelement à PM & du même côté, sera la ligne de cette équation ou formule. Car ayant mené d'un de ses points quelconques M la ligne MP parallele à AQ & qui rencontre AE en F ; les triangles semblables ABE , APF , donneront $AB (a). BE (b) :: AP (x). PF = \frac{bx}{a}$. Et partant $PM (y) = PF (\frac{bx}{a}) + FM (c)$.

Le lieu de la troisième formule $y = \frac{bx}{a} - c$ se constr. FIG. 161. truit en cette sorte. Ayant pris $AB = a$, & mené les droites $BE = b$, $AD = c$, paralleles à PM ; sçavoir, BE du même côté que AQ , & AD du côté opposé; on tirera par les points A, E , la droite AE indéfinie du côté de E , & par le point D la ligne DM parallele à AE , & qui rencontre AP en G . Je dis que la droite indéfinie GM renfermée dans l'angle PAQ sera le lieu qu'on cherche. Car on aura toujours $PM (y) = PE (\frac{bx}{a}) - FM (c)$.

Enfin pour avoir le lieu de la quatrième formule FIG. 162. $y = c - \frac{bx}{a}$. Ayant pris sur AP la partie $AB = a$, & mené les droites $BE = b$, $AD = c$, paralleles à PM ; sçavoir BE du côté opposé, & AD du même côté que AQ ; on tirera par les points A, E , la ligne AE indéfinie du côté de E , & par le point D la ligne DM parallele à AE , & qui rencontre en G la ligne AP . Je dis que la droite DG renfermée dans l'angle PAQ , sera le lieu cherché. Car ayant mené d'un de ses points quelconques M la ligne

D d ij

MP parallèle à AQ , & qui rencontre AE en F , on aura toujours $PM(y) = FM(c) - PF\left(\frac{bx}{a}\right)$.

Si l'inconnue x n'est multipliée par aucune fraction, les quatre formules précédentes se changeront en celles ci.

1°. $y = x$, 2°. $y = x + c$, 3°. $y = x - c$, 4°. $y = c - x$, lesquelles se construisent de la même manière, en observant de prendre la droite BE égale à AB que l'on prend de telle grandeur qu'on veut.

REMARQUE.

c. 307. IL peut arriver que l'équation soit un lieu à la ligne droite, quoiqu'elle ne renferme qu'une des inconnues x ou y ; ce qui donne encore ces deux nouvelles formules, $y = c$, & $x = c$.

FIG. 163.

Pour construire la première formule $y = c$. Les mêmes choses étant toujours posées que dans la définition première; on mènera par le point fixe A , la droite $AD = c$ parallèle à PM & du même côté, on tirera ensuite la droite indéfinie DM parallèle à AP : je dis que cette ligne DM sera le lieu de l'équation proposée. Car ayant mené d'un de ses points quelconques M la droite MP parallèle à AD , il est clair qu'on aura toujours $PM(y) = AD(c)$.

FIG. 164.

Pour construire la seconde formule $x = c$. Ayant pris $AP = c$, on tirera la droite indéfinie PM qui fasse avec AP l'angle APM donné ou pris à volonté: je dis qu'elle sera le lieu de tous les points M . Car ayant mené d'un de ses points quelconques M , la droite MQ parallèle à AP , & qui rencontre au point Q l'indéfinie AQ parallèle à PM ; il est clair qu'on aura toujours MQ ou $AP(x) = c$, de quelque grandeur que l'on puisse prendre $PM(y)$.

AVERTISSEMENT.

Je crois qu'il est à propos pour éclairer l'esprit des Lecteurs, de leur donner une idée de la méthode dont

je vais me servir pour la construction des lieux du second degré. Elle consiste à construire d'abord une Parabole en sorte que l'équation qui en exprime la nature soit la plus composée qu'il se puisse, de faire ensuite la même chose dans l'Ellipse, & dans l'Hyperbole rapportée à ses diamètres & considérée entre les asymptotes; ce qui fournit des équations ou formules générales. J'examine ce qu'elles ont chacune de particulier, afin qu'une équation étant proposée, je puisse connoître à laquelle de ces formules elle doit être rapportée; & comparant ensuite tous ses termes avec ceux de la formule, j'en tire la construction du lieu de cette équation, en observant certaines remarques qui servent pour toutes les formules. Tout ceci s'éclaircira parfaitement dans les Lemmes & Propositions qui suivent.

LEMME FONDAMENTAL.

Pour la construction des lieux à la Parabole.

c. 308. SOIENT comme dans la première définition FIG. 165. deux lignes droites inconnues & indéterminées $AP(x)$, & 166. $PM(y)$; & soient de plus des lignes droites données e, m, n, p, r, s . Cela posé.

1°. On prendra sur la ligne AP , la partie $AB = m$; FIG. 165, ayant mené les droites $BE = n$, $AD = r$, parallèles à PM & du même côté, on tirera par le point A la droite AE que j'appelle e , & par le point D la droite indéfinie DG parallèle à AE ; sur laquelle DG ayant pris la partie $DC = s$ du côté de PM , on décrira* du diamètre CG qui ait pour paramètre $CH = p$, & pour ordonnées des droites parallèles à PM ; une Parabole CM qui s'étende du même côté que AP . Je dis que la portion renfermée dans l'angle PAD , fait par la ligne AP , & par une ligne AD menée par le point fixe A parallèlement à PM & du même côté, est le lieu de l'équation ou formule suivante.

D d ij

$$yy - \frac{2n}{m}xy + \frac{n^2}{mm}xx - 2ry + \frac{2nr}{m}x + rr = 0.$$

$$- \frac{ep}{m}x + ps.$$

Car ayant mené d'un des points quelconques M de cette portion de Parabole, la ligne MP qui fasse avec AP l'angle donné ou pris à volonté APM , & qui rencontre les parallèles AE , DG , aux points F , G ; les triangles semblables ABE , APF , donneront ces deux proportions, AB (m). AE (e) :: AP (x). AF ou $DG = \frac{ex}{m}$. Et AB (m).

BE (n) :: AP (x). $PF = \frac{nx}{m}$. Et par conséquent GM ou $PM - PF - FG = y - \frac{nx}{m} - r$, & CG ou $DG - DC$

* *Art. 19.* $= \frac{ex}{m} - s$. Or la Parabole donne * $\overline{GM} = CG \times CH$, laquelle équation se change en la précédente en mettant pour ces lignes leurs valeurs analytiques. Donc &c.

FIG. 166. 2°. On menera par le point fixe A , une ligne droite indéfinie AQ parallèle à PM & du même côté; & ayant pris sur cette ligne la partie $AB = m$, on tirera $BE = n$ parallèle à AP & du même côté que PM , & par les points déterminés A , E , la ligne AE que j'appelle e ; & ayant pris sur AP la partie $AD = r$ du même côté que PM , on tirera la droite indéfinie DG parallèle à AE , sur laquelle on prendra la partie $DC = s$ aussi du même côté de PM . On décrira ensuite du diamètre CG qui ait pour paramètre $CH = p$, & pour ordonnées des droites parallèles à AP , une Parabole CM qui s'étende du même côté que AQ . Je dis que la portion renfermée dans l'angle BAP , sera le lieu de cette seconde équation ou formule.

* *Art. 161.*

$$xx - \frac{2n}{m}yx + \frac{n^2}{mm}yy - 2rx + \frac{2nr}{m}y + rr = 0.$$

$$- \frac{ep}{m}y + ps.$$

Car ayant mené d'un de ses points quelconques M , la ligne MQ parallèle à AP , & qui rencontre les paral-

les AE , DG , aux points F , G ; les triangles semblables ABE , AQF , donneront ces deux proportions, $AB(m). AE(e) :: AQ$ ou $PM(y). AF$ ou $DG = \frac{ey}{m}$. Et $AB(m). BE(n) :: AQ(y). QF = \frac{ny}{m}$. Et par conséquent GM ou $QM - QF - FG = x - \frac{ny}{m} - r$, & CG ou $DG - DC = \frac{ey}{m} - s$. Et la Parabole donne $\overline{GM} = CG \times CH$, laquelle équation se change en la précédente en mettant pour ces lignes leurs valeurs analytiques. Donc &c.

COROLLAIRE.

c. 309. Il est clair 1°. Que dans la première de ces équations ou formules, le carré yy se trouve sans fraction, & que dans la seconde c'est le carré xx . 2°. Que dans ces deux formules les deux carrés yy & xx s'y trouvent avec les mêmes lignes, en sorte que le carré $\frac{yy}{mm}$ de la moitié de la fraction $\frac{ny}{m}$ qui multiplie le plan xy , multiplie l'un des carrés xx ou yy ; d'où il suit que si le plan xy ne se rencontroit point dans l'une ou l'autre de ces deux formules, le carré $\frac{nnxx}{mm}$ ou $\frac{nnyy}{mm}$ ne s'y rencontreroit point non plus, puisqu'alors la fraction donnée $\frac{ny}{m}$ seroit nulle.

PROPOSITION II.

Problème.

c. 310. CONSTRUIRE le lieu d'une équation donnée, dans laquelle le plan xy ne se rencontrant point, il n'y a qu'un des deux carrés xx & yy ; ou bien le plan xy s'y rencontrant, les deux carrés xx & yy s'y rencontrent aussi avec les mêmes signes, en sorte que le carré de la moitié de la

fraction qui multiplie xy , soit égal à celle qui multiplie le carré de l'une des inconnues. On suppose toujours qu'il y ait un des carrés xx ou yy qui soit délivré de fractions.

On comparera chaque terme de l'équation donnée, avec celui qui lui répond dans la première formule du Lemme précédent, si le carré yy s'y rencontre sans fraction ; ou avec celui qui lui répond dans la seconde formule, lorsque c'est le carré xx . On tirera ensuite de la comparaison de ces termes, des valeurs des quantités e, m, n, p, r, s , par le moyen desquelles on décrira comme l'on a enseigné dans le Lemme (en se servant des deux Remarques suivantes) une Parabole qui sera le lieu cherché.

REMARQUE I.

c. 311. 1°. ON prendra pour $AB (m)$ telle grandeur positive que l'on voudra. 2°. Les lignes $AB (m)$, $BE (n)$ étant données, la ligne $AE (e)$ l'est aussi puisque l'angle ABE est donné. 3°. Lorsque $n=0$, la ligne AE tombe sur AB , c'est à dire, sur AP dans la construction de la première formule, & sur AQ dans celle de la seconde : alors on aura $AB (m) = AE (e)$, puisque les points B, E , se confondront alors ensemble. 4°. Lorsque la valeur de l'une des quantités n, r, s , est négative, il faut prendre ou mener la ligne qu'elle exprime du côté opposé à celui de PM ; au lieu qu'il la faut mener du même côté, comme l'on a fait dans le Lemme, lorsqu'elle est positive.

REMARQUE II.

c. 312. S'IL arrive que la valeur du paramètre $CH (p)$ soit négative, il faudra que la Parabole s'étende du côté opposé à celui du Lemme : c'est à dire, du côté opposé à celui vers lequel s'étend l'indéterminée AP dans la construction de la première formule, & l'indéterminée

terminée AQ dans celle de la seconde. Tout ceci s'éclaircira parfaitement par les Exemples qui suivent.

E X E M P L E I.

313. Soit $yy - 2ay - bx + cc = 0$ l'équation donnée, dont il faut construire le lieu.

Comme le carré yy se trouve ici sans fraction, je choisis la première formule* du Lemme, de laquelle comparant * Art. 308. chaque terme avec celui qui lui répond dans la proposée, n. 1.

j'ai 1°. $\frac{2a}{m} = 0$, parce que le plan xy ne se rencontrant point dans la proposée, on doit regarder ce plan comme étant multiplié par zero; d'où je tire $n = 0$, & par conséquent* * Art. 311. $m = c$: c'est pourquoi effaçant dans la formule tous les

termes où $\frac{n}{m}$ se rencontre, & mettant au lieu de c sa valeur m , je trouve $yy - 2ry - px + rr + ps = 0$.

2°. La comparaison des termes correspondans $-2ry$ & $-2ay$ donne $r = a$. 3°. Celle de $-px$ & $-bx$ fournit $p = b$. 4°. Celle des termes où les inconnues x & y ne se trouvent point, donne enfin $rr + ps = cc$, d'où en mettant pour r & p leurs valeurs a & b , je tire $s = \frac{cc - aa}{b}$

qui est une valeur négative lorsque a surpasse c , comme on le suppose ici. Je n'ai point comparé les premiers termes yy & yy entr'eux; parce qu'étant précisément les mêmes, cela ne feroit rien connoître. Or les valeurs de n, r, p, s , étant ainsi déterminées, je construis le lieu en me servant de la construction* de la formule, & observant ce qu'il y a dans la première* Remarque en * Art. 308. n. 11. * Art. 311. cette sorte.

Puisque $BE(n) = 0$, les points B, E , se confondent, & la ligne AE tombe* sur AP ; c'est pourquoi je me * Art. 311. ne d'abord par le point fixe A la ligne $AD(r) = a$ FIG. 167. parallèle à PM , & du même côté, parce que sa valeur est positive. Je tire ensuite DG parallèle à AP , sur laquelle je prends $DC = \frac{aa - cc}{b} = -s$ du côté opposé à

Ee

PM ; parce que $s = \frac{c-a^2}{b}$, qui est une valeur négative

* *Art.* 161. Je décris enfin * du diamètre CG (qui ait pour paramètre la ligne CH (p) $= b$, & pour ordonnées des droites parallèles à PM) une Parabole; & je dis que les deux portions OMM , RMS , renfermées dans l'angle PAO fait par AP & par la ligne AO menée parallèlement à PM & du même côté, sera le lieu de l'équation donnée.

Car menant d'un de leurs points quelconques M , la ligne MP qui fasse avec AP l'angle donné ou pris à volonté APM , & qui rencontre DG au point G ; on aura $GM = y - a$, ou $GM = a - y$, selon que le point M tombera au-dessus ou au-dessous du diamètre CG ; & CG ou

* *Art.* 19. $DG + CD = x + \frac{a^2 - c}{b}$; & partant * par la propriété de la Parabole, $\overline{GM}^2 (yy - 2ay + aa) = CG * CH (bx + aa - cc)$, c'est à dire $yy - 2ay - bx + cc = 0$, qui est l'équation donnée. Donc &c.

REMARQUE.

314. Si l'on prolonge AO de l'autre côté de A vers X , il faut remarquer,

1°. Que la portion indéfinie SM de la Parabole, renfermée dans l'angle SAX , sera le lieu de toutes les valeurs fausses & de l'inconnue y , qui répondent aux valeurs vraies de l'autre inconnue x dans l'équation donnée. En effet si l'on prend AP plus grande que AS , & qu'on mène PM parallèle à AX , & du même côté, laquelle rencontre la portion SM en M ; l'on aura * $PM = -y$, & partant la droite GM ou $GP + PM = a - y$, & on retrouvera par la propriété de la Parabole, comme ci-dessus, l'équation donnée.

2°. Que la portion RCO de cette Parabole, qui tombe dans l'angle TAO opposé au sommet à l'angle SAX , sera le lieu de toutes les valeurs vraies de l'inconnue y

dans l'équation donnée, qui répondent aux valeurs fausses de l'autre inconnuë x ; car faisant * $AP = -x$, on * *Art. 304.* retrouvera encore l'équation donnée.

3°. Que s'il tomboit une portion de cette Parabole dans l'angle TAX opposé au sommet à l'angle PAO elle seroit le lieu des valeurs fausses de l'inconnuë y , qui répondroient aux valeurs fausses de l'autre inconnuë x . De sorte que cette Parabole est le lieu complet de toutes les valeurs tant vraies que fausses de l'inconnuë y , qui répondent à toutes les valeurs tant vraies que fausses de l'autre inconnuë x dans l'équation donnée $yy - 2ay - bx + cc = 0$.

D'où l'on voit que dans cet Exemple il y a deux valeurs vraies PM , PM , de l'inconnuë y , qui répondent à la même valeur vraie AP de l'autre inconnuë x , lorsque cette ligne AP est moindre que AS ; qu'il y a une valeur vraie PM , & une fausse $-PM$, lorsque AP surpasse AS ; qu'il n'y a qu'une valeur vraie SV de y ; l'autre étant nulle ou zero, lorsque $AP = AS$; qu'il y a deux valeurs vraies PM , PM , de l'inconnuë y , qui répondent à la même valeur fausse $-AP$ de l'inconnuë x , lorsque AP est moindre que AT ; que ces deux valeurs deviennent égales chacune à la Tangente TC , lorsque $AP = AT$; & qu'enfin si l'on prenoit AP ($-x$) plus grande que AT , comme l'appliquée PM ne rencontreroit alors la Parabole en aucun point, il s'ensuivroit qu'il n'y auroit aucune valeur vraie ou fausse de l'inconnuë y , qui pût répondre à cette valeur fausse $-AP$ de l'autre inconnuë x : c'est à dire que les valeurs de l'inconnuë y deviendroient en ce cas imaginaires.

Tout ceci se doit entendre de la même manière dans tous les autres exemples qui suivent, tant dans la Parabole que dans les autres Sections Coniques: de sorte que la Section Conique qu'on trouvera, sera non-seulement le lieu de toutes les valeurs vraies de l'inconnuë y par rapport aux valeurs vraies de l'autre inconnuë x ;

Ee ij,

mais aussi celui de toutes les valeurs tant vraies que fausses de l'inconnue y par rapport aux valeurs tant vraies que fausses de l'autre inconnue x .

EXEMPLE II.

315. Soit l'équation donnée $yy + \frac{2b}{a}xy + \frac{bb}{aa}xx + 2cy - bx + cc = 0$, dont il faille construire le lieu.

Comme le quarre yy est ici sans fraction, je choisis de même que dans l'Exemple précédent, la première formule * du Lemme; & j'ai par la comparaison de ses termes avec ceux qui leur répondent dans la proposée,

* Art. 308. n. 1. 1°. $\frac{2n}{m} = -\frac{2b}{a}$; d'où en faisant * $m = a$, je tire $n = -b$.

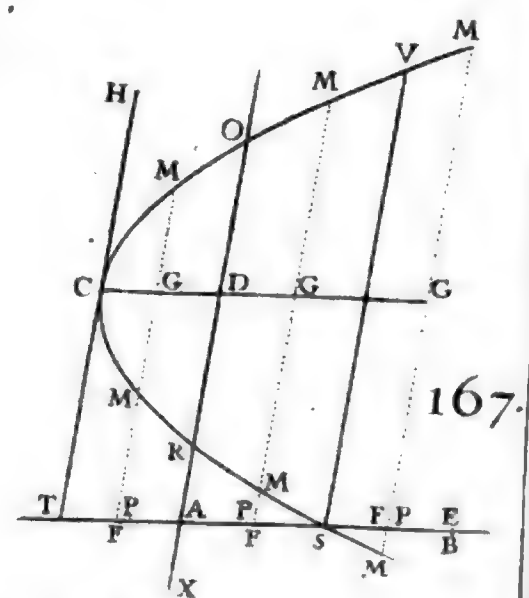
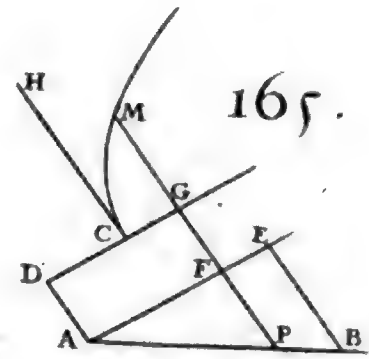
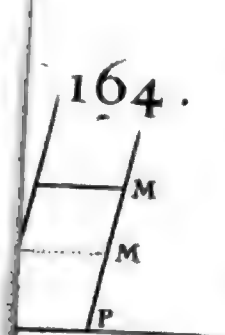
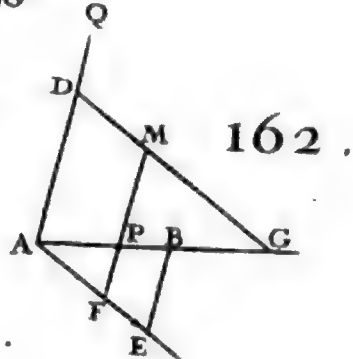
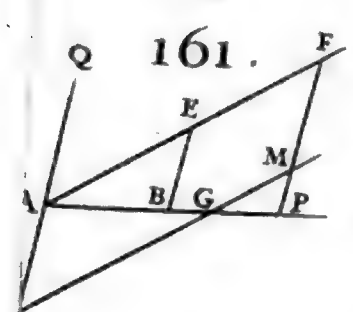
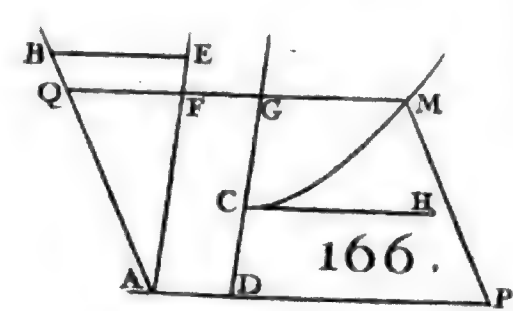
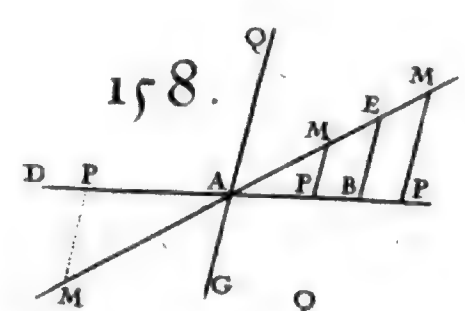
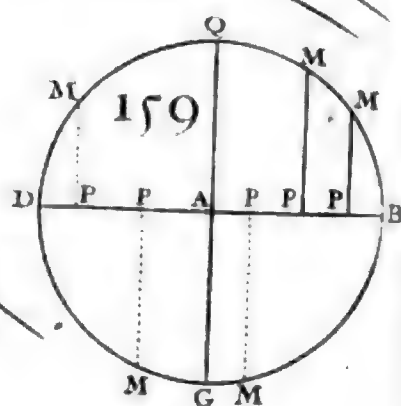
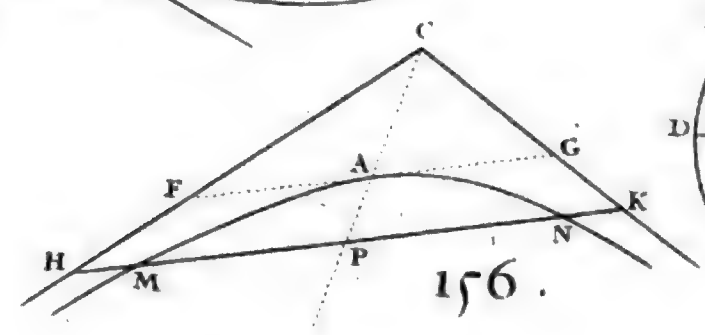
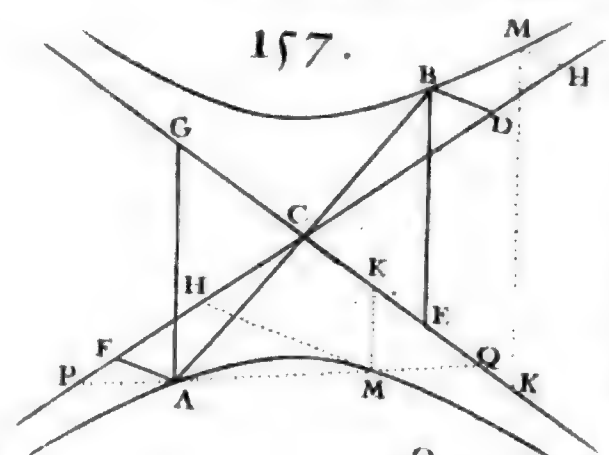
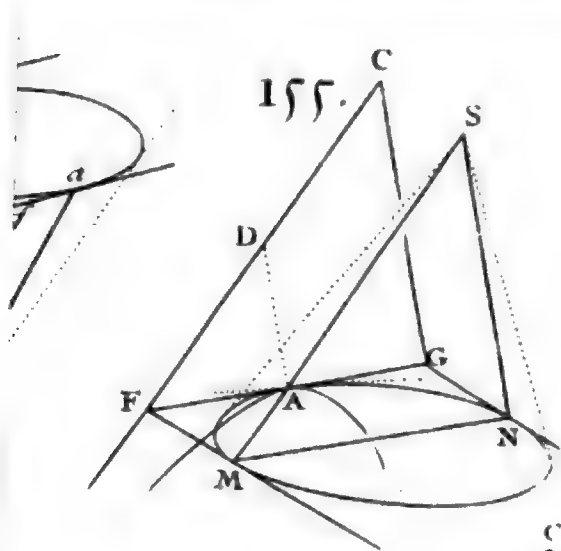
2°. $\frac{nn}{mm} = \frac{bb}{aa}$; d'où il vient, comme ci-dessus, $n = -b$.

3°. $r = -c$. 4°. $\frac{2nr - rp}{m} = -b$; & partant $p = \frac{ab + 2bc}{c}$, en mettant pour m, n, r , leurs valeurs $a, -b, -c$.

5°. $rr + ps = cc$, ce qui donne $s = 0$, en mettant pour rr la valeur cc . Or ces valeurs de m, n, r, p, s , étant ainsi déterminées, je construis le lieu de cette équation

* Art. 308. n. 1. en me servant de la construction * de la première formule en cette sorte.

FIG. 168. Ayant pris sur la ligne AP la partie $AB (m) = a$, je mene les droites $BE = b = -n$, $AD = c = -r$ parallèles à PM , & du côté opposé, parce que $n = -b$ & $r = -c$ qui sont des valeurs négatives. Je tire ensuite par les points déterminées A, E , la ligne $AE (c)$ qui est donnée, & par le point D la ligne DG parallèle à AE . Cela fait comme $DC (s)$ est nulle ou zéro, le point C tombe sur D ; c'est pourquoi je décris * du diamètre DG (qui ait pour paramètre $DH (p) = \frac{ab + 2bc}{c}$, & pour ordonnées des droites parallèles à PM) une Parabole; & je dis que la portion OM renfermée dans l'angle PAH , où l'on suppose que doivent tomber tous les points M , sera le lieu de l'équation donnée.



Car ayant mené d'un de ses points quelconques M , la ligne MP qui fasse avec AP l'angle donné ou pris à volonté APM , & qui rencontre les parallèles AE , DG , aux points F , G ; les triangles semblables ABE , APF , donneront ces deux proportions, $AB(a) : AE(e) :: AP(x) : AF$ ou $DG = \frac{ex}{a}$. Et $AB(a) : BE(b) :: AP(x) : PF = \frac{bx}{a}$. Et par conséquent GM ou $PM + PF + FG = y + \frac{bx}{a} + c$. Or par la propriété * de la Parabole, $\overline{GM}^2 = GD * DH$, c'est à dire, * *Art. 19*, en mettant les valeurs analytiques, $yy + \frac{2b}{a}xy + \frac{bb}{aa}xx + 2cy - bx + cc = 0$. Donc &c.

REMARQUE I.

316. SI la ligne AP ne coupoit point la Parabole, FIG. 168. mais qu'elle la touchât ou qu'elle tombât toute entière au dehors, il s'ensuivroit qu'aucun des points cherchés M ne pourroit tomber dans l'angle PAH , comme l'on avoit supposé en faisant la construction; & qu'ainsi il n'y auroit aucune valeur vraie de l'inconnue y qui répondit à une valeur vraie de l'autre inconnue x , de quelque grandeur qu'elle pût être.

Cette Remarque est générale pour tous les Exemples pareils à celui-ci, non-seulement dans la Parabole, mais aussi dans les autres Sections.

REMARQUE II.

317. IL est à propos de remarquer que si l'on avoit pris pour $AB(m)$ une autre grandeur que a , telle qu'elle pût être, les valeurs de $BE(n)$ & de $AE(e)$ changeroient à la vérité; mais les rapports $\frac{n}{m}$, $\frac{e}{m}$, demeureroient toujours les mêmes; parce que dans le triangle ABE l'angle ABE est donné, comme aussi la raison

E e üj

du côté AB au côté BE , sçavoir dans cet Exemple $\frac{n}{m} = \frac{b}{a}$. Or comme il n'y a que ces raisons de $\frac{n}{m}$, $\frac{c}{m}$, qui se puissent trouver dans les valeurs de p , r , s ; il s'ensuit que ces valeurs demeurent toujours les mêmes, telle grandeur positive que l'on puisse prendre pour la ligne AB (m): de sorte qu'on n'a pris $m = a$ que pour rendre la construction plus simple. Ce que l'on doit toujours observer dans la suite.

EXEMPLE III.

318. ON demande le lieu de l'équation donnée $xx + \frac{2b}{a}x + \frac{bb}{aa}yy - 2cx + by - \frac{2bc}{a}y = 0$.

* Art. 308. Comme c'est ici le quarré xx qui est délivré de frac-
n. 1. tions, je choisis la seconde formule* du Lemme; & j'ai par la comparaison des termes correspondans,

1°. $\frac{2n}{m} = -\frac{2b}{a}$; d'où en faisant $m = a$, je tire $n = -b$.

2°. $\frac{nn}{mm} = \frac{bb}{aa}$; & partant, puisque $m = a$, on trouve com-

meci-dessus $n = -b$. 3°. $r = c$. 4°. $\frac{2nr - cp}{m} = b - \frac{2bc}{a}$; ce

qui donne $p = -\frac{ab}{c}$, en mettant à la place de m , n , r ,

leurs valeurs a , $-b$, c . 5°. $rr + ps = 0$; parce que dans l'équation donnée il ne se trouve point de termes entierement connus, que l'on puisse comparer au terme $rr + ps$ de la formule; ce qui donne $s = -\frac{rr}{p} = \frac{cc}{ab}$,

en mettant pour r & p leurs valeurs c & $-\frac{ab}{c}$. Or ces

valeurs étant ainsi déterminées, je construis le lieu requis en me servant de la construction de la seconde for-

* Art. 308. mule* du Lemme, & observant exactement les articles 311.
n. 2. & 312. de la maniere qui suit.

Fig. 169. Ayant mené par le point fixe A , une ligne indéfinie AQ parallele à PM , je prens sur cette ligne la partie AB (m) $= a$; & du point B je tire $BE = b = -n$ parallele à AP , & du côté opposé à PM , parce que la

valeur de n est négative ; & par les points déterminés A, E , la ligne AE (e) qui est donnée. Ayant pris sur AP la partie AD (r) $= c$ du côté de PM , je tire la droite indéfinie DG parallèle à AE , sur laquelle je prends la partie DC (s) $= \frac{e^2 c}{ab}$ du côté de PM . Je décris ensuite * du diamètre CC (qui ait pour ordonnées * *Art. 161.* des droites parallèles à AP , & pour paramètre la ligne $CH = \frac{a^2 b}{c} = -p$) une Parabole qui s'étende * du côté * *Art. 312.* opposé à celui où s'étend AQ , parce que $p = -\frac{a^2 b}{c}$ qui est une valeur négative. Je dis que la portion OMR de cette Parabole, renfermée dans l'angle PAB , sera le lieu qu'on cherche.

Car ayant mené d'un de ses points quelconques M , la ligne MQ parallèle à AP , & qui rencontre les parallèles AE, DG , aux points F, G ; les triangles semblables ABE, AQF , donneront ces deux proportions, AB (a). AE (e) :: AQ ou PM (y). AF ou $DG = \frac{ey}{a}$. Et AB (a). BE (b) :: AQ (y). $QF = \frac{by}{a}$. Et par conséquent GM ($QM + FQ - FG$) $= x + \frac{by}{a} - c$, ou GM ($FG - FQ - QM$) $= c - \frac{by}{a} - x$, selon que le point M tombe de part ou d'autre du diamètre CD ; & la coupée CG ou $CD - DG = \frac{e^2 c}{ab} - \frac{ey}{a}$. Or * par la propriété de la * *Art. 19.*

Parabole, $\overline{GM}^2 = CG \cdot CH$: c'est à dire, en mettant à la place de ces lignes leurs valeurs analytiques $xx + \frac{2b}{a}yx + \frac{b^2}{a^2}yy - 2cx + by - \frac{2bc}{a}y = 0$, qui est l'équation donnée. Donc &c.

REMARQUE.

319. S'IL arrivoit qu'en comparant les termes de l'équation donnée avec ceux de la formule, on trouvât que $p = 0$; il est visible que la construction de la Parabole qui en devroit être le lieu, seroit impossible. Mais il faut bien remarquer que l'équation donnée se

peut toujours alors abaisser en sorte que son lieu devienne
 * Art. 308. une ligne droite ; ce qui se voit par les formules * du
 Lemme. Car effaçant , par exemple , dans la première
 les termes où p se rencontre, il vient $yy - \frac{2n}{m}xy + \frac{nn}{mm}xx$
 $- 2ry + \frac{2nr}{m}x + rr = 0$, de laquelle extrayant la ra-
 cine carrée, on trouve $y - \frac{nx}{m} - r = 0$, ou $y = \frac{nx}{m} + r$,
 dont le lieu est une ligne droite que l'on construira selon
 l'article 306. La même chose arrivera de la seconde for-
 mule de l'article 308.

EXEMPLE IV.

320. SOIT proposée l'équation $xx - ay = 0$, de
 laquelle il faut trouver le lieu.

Comme c'est ici le carré xx qui se trouve délivré de
 * Art. 308. fractions, je choisis la seconde formule * du Lemme ; &
 n. 1. j'ai par la comparaison des termes qui se répondent,
 1°. $\frac{2n}{m} = 0$, parce que xy ne se trouve point dans la
 * Art. 311. proposée ; d'où je tire $n = 0$, & par conséquent * $m = e$.
 2°. $\frac{nn}{mm} = 0$, parce que le carré yy ne s'y trouve pas non
 plus ; d'où je tire encore $n = 0$. 3°. $r = 0$, parce que l'incon-
 nuë x ne se trouve point au premier degré dans la pro-
 posée : c'est pourquoi effaçant dans la formule tous les
 termes où $\frac{n}{m}$ & r se rencontrent, & mettant pour e la
 valeur m , il vient $xx - py + ps = 0$, dont il reste à
 comparer les termes avec ceux qui leur répondent
 dans la proposée. 4°. La comparaison des termes $-py$
 & $-ay$ donnent $p = a$. 5°. Puisque dans la proposée il
 ne se trouve aucun terme entièrement connu que l'on
 puisse comparer au terme ps , il s'ensuit que $ps = 0$, &
 qu'ainsi $s = 0$. Or ces valeurs de n , r , p , s , ainsi déter-
 minées me servent à construire le lieu qu'on demande,
 ayant égard à la construction de la seconde formule de
 * Art. 311. l'article 308. & à l'article 311. en cette sorte.

FIG. 170. Puisque $BE (n) = 0$, la ligne AE tombe * sur AQ
 menée parallèlement à PM & du même côté ; comme
 aussi

aussi DG , parce que $AD(r) = 0$. Or puisque $CD(s) = 0$, le point C tombe sur le point D lequel tombe en A comme l'on vient de voir. Je décris donc * une Pa. * Art. 161. rabole du diamètre AQ qui ait pour parametre $AH(p) = a$, & pour ordonnées des droites MQ parallèles à AP : je dis que la portion indéfinie AM renfermée dans l'angle PAQ , est le lieu cherché.

Car ayant mené d'un de ses points quelconques M les droites MP , MQ , parallèles à AQ & à AP , on aura par la propriété * de la Parabole $QM^2(x x)$ * Art. 19. $= AQ \cdot AH(ay)$, & partant $x x - ay = 0$, qui étoit l'équation proposée. *Ce qu'il falloit démontrer.*

DÉMONSTRATION DU PROBLÈME.

321. SI l'on met dans la formule générale * à la place * Art. 308. de m, n, r, s, p , les valeurs que l'on aura trouvées par la comparaison de ces termes avec ceux de l'équation proposée, telle qu'elle puisse être, pourvu qu'elle ait les conditions marquées dans le Problème, il est clair que cette formule générale se changera en la proposée : & partant que si l'on prend aussi ces valeurs dans la construction * du Lemme, * Art. 308. le lieu de la formule générale se changera en celui de l'équation proposée. Or c'est ce qu'on a enseigné dans le Problème accompagné de ses deux Remarques, comme les Exemples précédens le font assez voir. Donc &c.

LEMME FONDAMENTAL.

Pour la construction des lieux à l'Ellipse ou au Cercle.

c. 322. SOIENT encore comme dans la définition pre- FIG. 171. miere deux lignes droites inconnues & indéterminées $AP(x)$, $PM(y)$; & soient de plus des lignes droites données m, n, p, r, s, t . Cela posé,

On prendra sur la ligne AP , la partie $AB \equiv m$; & ayant mené les droites $BE \equiv n$, $AD \equiv r$, parallèles à PM , & du même côté, on tirera par le point A la droite AE qui est donnée, & que j'appelle e ; & par le point D , la droite indéfinie DG parallèle à AE , sur laquelle on prendra la partie $DC \equiv s$ du côté de PM ; & de part & d'autre du point C , les parties CK , CL , égales chacune à t . On décrira ensuite une Ellipse * du diamètre LK ($2t$), qui ait pour parametre $KH \equiv p$, & pour ordonnées des droites parallèles à PM . Je dis que la portion OMR renfermée dans l'angle PAD fait par la ligne AP & par une ligne AD menée par le point fixe A parallèlement à PM & du même côté, sera le lieu de l'équation ou formule générale que voici.

$$yy - \frac{2n}{m}xy + \frac{nn}{mm}xx - 2ry + \frac{2nr}{m}x + rr \equiv 0.$$

$$+ \frac{eep}{2mmt} \quad - \frac{2ep s}{2mt} - \frac{pss}{2t}$$

$$+ \frac{pss}{2t}$$

Car ayant mené d'un des points quelconques M , de cette portion d'Ellipse, la ligne MP qui fasse avec AP l'angle donné ou pris à volonté APM , & qui rencontre les parallèles AE , DG , aux points F , G ; les triangles semblables ABE , APF , donneront AF ou $DG = \frac{ex}{m}$, & $PF = \frac{nx}{m}$. On

aura donc $GM = y - \frac{nx}{m} - r$, & $CG = \frac{ex}{m} - s$. Or par
 * Art. 55. & 41. la propriété de l'Ellipse * KL ($2t$). KH (p) :: $LG \times GK$ ou
 $\frac{CG}{CK} = \frac{CG}{CG} (tt - ss + \frac{2esx}{m} - \frac{eexx}{mm}) \cdot \overline{GM} (yy - \frac{2n}{m}xy - 2ry + \frac{nn}{mm}xx + \frac{2nr}{m}x + rr) = \frac{pss - pss}{2t} + \frac{2epsx}{2mt} - \frac{eepxx}{2mmt}$
 Donc &c.

S'il arrive que le diamètre KL ($2t$) & son parametre KH (p) soient égaux entr'eux, on aura toujours $\overline{GM} = LG \times GK$; d'où il est évident selon les Elemens de Geometrie, que si l'angle CGM est droit, l'Ellipse se changera alors en un cercle qui aura pour diamètre la ligne KL .

COROLLAIRE.

c. 323. IL est clair que les deux quarrés yy & xx se trouvent toujours avec les mêmes signes dans cette formule ; & que lorsque le plan xy s'y rencontre , le quarré $\frac{nn}{mm}$ de la moitié de la fraction $\frac{1}{m}$ qui multiplie ce plan , doit être moindre que la fraction $\frac{nn}{mm} + \frac{pp}{2mm}$ qui multiplie le quarré xx .

PROPOSITION III.

Problème.

324. CONSTRUIRE le lieu d'une équation donnée , dans laquelle les deux quarrés yy & xx se rencontrent avec les mêmes signes sans le plan xy , ou avec ce plan , en sorte que le quarré de la moitié de la fraction qui le multiplie , soit moindre que la fraction qui multiplie le quarré xx . On suppose toujours ici que le quarré yy soit délivré de fractions.

On comparera les termes de l'équation donnée , avec ceux qui leur répondent dans la formule générale * du * Art. 322. Lemme précédent ; & on tirera de la comparaison de ces termes , des valeurs des quantités m, n, p, r, s, t , par le moyen desquelles valeurs on décrira comme l'on a enseigné dans ce Lemme (en observant exactement l'art. 311.) une Ellipse qui sera le lieu cherché.

EXEMPLE I.

325. SOIT proposé de trouver le lieu de cette équation $yy + xy + \frac{1}{2}xx - 2ay + bx + cc = 0$, dans laquelle le quarré de $\frac{1}{2}$ moitié de la fraction $\frac{1}{2}$ ou 1 qui multiplie xy , est moindre que la fraction $\frac{1}{2}$ qui multiplie xx .

La comparaison de chaque terme de la formule générale

F f ij

* *Art. 321.* du Lemme* avec celui qui lui répond dans cette équation ; donne 1^o. $\frac{2^n}{m} = -1$; car n'y ayant ici aucune fraction litterale qui multiplie le plan xy , on le doit considerer comme etant multiplié par l'unité numerique 1 : & partant si l'on fait $m=a$, l'on aura $n=-\frac{1}{2}a$. 2^o. $\frac{nn}{mm} + \frac{ee p}{2mm} = \frac{1}{2}$; d'où l'on tire $\frac{p}{r} = \frac{mm - 2nn}{ee} = \frac{aa}{2ee}$ en mettant pour m, n , leurs valeurs $a, -\frac{1}{2}a$: & par conséquent $p = \frac{aa}{2ee}$. 3^o. $r = a$. 4^o. $\frac{2nr}{m} - \frac{2eps}{2ms} = b$; d'où en mettant pour $m, n, r, \frac{p}{r}$, leurs valeurs $a, -\frac{1}{2}a, a, \frac{aa}{2ee}$, il vient $s = \frac{-2ae - 2eb}{a}$. 5^o. $rr - \frac{pss}{2t} + \frac{pss}{2t} = cc$: & partant $tt = ss + \frac{2ttr}{p} - \frac{2tss}{p} = ss + 4ee - \frac{4eee}{aa}$, en mettant pour $\frac{p}{r}, r$, les valeurs $\frac{aa}{2ee}, a$, qu'on leur vient de trouver. Or les valeurs de m, n, r, s, t, p , étant ainsi déterminées, je décris l'Ellipse cherchée en me servant de la construction du Lem-

* *Art. 321.* me* & de l'article 311. en cette sorte.

FIG. 172. Je prens sur la ligne AP la partie $AB (m)=a$; & ayant mené parallelement à PM & du même côté la ligne $AD (r) = a$, & du côté opposé la droite $BE = \frac{1}{2}a = -n$, parce que $n = -\frac{1}{2}a$ qui est une valeur négative, je tire par le point A la droite $AE (e)$ qui est donnée ; & par le point D , la droite DG parallele à AE , sur laquelle je prends la partie $DC = \frac{2ae + 2be}{a} = -s$ du côté opposé à PM ; & de part & d'autre du point C , les parties CK, CL , égales

* *Art. 161.* chacune à $t = \sqrt{ss + 4ee - \frac{4eee}{aa}}$. Je décris ensuite* une Ellipse du diametre LK , qui ait pour ordonnées des droites paralleles à PM , & pour parametre la ligne $KH (p) = \frac{aa}{2ee}$. Je dis que la portion OMR renfermée dans l'angle PAD , est le lieu de l'équation donnée.

Car ayant mené d'un de ses points quelconques M ,

la ligne MP qui fasse avec AP l'angle donné ou pris à volonté APM , & qui rencontre les paralleles AE , DG , aux points F , G ; les triangles semblables ABE , APF donneront $AB(a)$. $AE(e) :: AP(x)$. AF ou $DG = \frac{ex}{a}$. Et $AB(a)$. $BE(\frac{1}{2}a) :: AP(x)$. $PF = \frac{1}{2}x$.

On aura donc $GM = y + \frac{1}{2}x - a$; & CG ou $DG + DC = \frac{ex}{a} - s$, puisque $DC = -s$. Or par la propriété * de * Art. 55. 6.

l'Ellipse KL (21). $KH(\frac{a^2t}{2st}) :: LG * GK$ ou $\overline{CA} - \overline{CG}$. 41.

$(st - ss + \frac{2est}{a} - \frac{eexx}{aa}) . \overline{GM}^2 (yy + xy - 2ay + \frac{1}{2}xx - ax + aa)$. D'où en mettant à la place de $st - ss$

& de s , leurs valeurs $4ee - \frac{4eee}{aa}$ & $-\frac{2ae - 2be}{a}$, multipliant ensuite les extrêmes & les moyens, & divisant de part & d'autre par $2t$, l'on retrouve l'équation même proposée. Donc &c.

REMARQUE.

326. S'IL arrive que $ss + 4ee$ soit égale ou moindre que $\frac{4eee}{aa}$, il est évident que la valeur de t deviendra nulle ou imaginaire; & qu'ainsi il sera pour lors impossible de construire l'Ellipse qui devrait être le lieu de l'équation donnée. Et comme cette équation renfermeroit nécessairement des contradictions, il s'ensuit qu'il ne pourroit y avoir aucune ligne qui en pût être le lieu; c'est à dire que toutes les valeurs de l'inconnue y qui devroient répondre à toutes les valeurs tant vraies que fausses de l'autre inconnue x , seroient toutes imaginaires.

Ceci se voit clairement dans la formule générale * du * Art. 322.

Lemme qui, en transposant quelques termes, devient

$$yy - \frac{2n}{m}xy - 2ry + \frac{n^2}{mm}xx + \frac{2nr}{m}x + rr = \frac{p^2t - pss}{2t} + \frac{2pex}{2mt} - \frac{eexx}{2mmt},$$

dans laquelle équation le premier membre est le quarré de $y - \frac{n}{m}x - r$; & le second, le quarré de t

moins le quarré de $s - \frac{cx}{m}$, multiplié par la fraction $\frac{p}{2}$. Or il est visible que si la valeur du quarré tt est nulle ou négative, la valeur de ce second membre sera négative; & qu'ainsi l'on aura dans ces deux cas un quarré, savoir le premier membre, égal à une valeur négative; ce qui est une contradiction manifeste.

EXEMPLE II.

327. ON demande le lieu de l'équation $yy + \frac{b}{a}xy + xx + cy + fx - ag = 0$, dans laquelle on suppose suivant l'art. 323. que $\frac{bb}{4aa}$ est moindre que la fraction $\frac{1}{2}$ ou 1 qui multiplie le quarré xx ; c'est à dire que b est moindre que $2a$.

* Art. 321. La comparaison des termes de la formule* générale avec ceux qui leur répondent dans l'équation proposée, donne
 1°. $\frac{2n}{m} = -\frac{b}{a}$; d'où en faisant $m = a$, on tire $n = -\frac{1}{2}b$
 2°. $\frac{mn}{mm} + \frac{cep}{2mm} = 1$; d'où en mettant pour m, n , leurs valeurs $a, -\frac{1}{2}b$, l'on tire $\frac{p}{2} = \frac{4aa - bb}{2cc}$: & partant $p = \frac{4aa - bb}{cc}$. 3°. $r = -\frac{1}{2}c$. 4°. $s = \frac{bcc - 2afe}{4aa - bb}$.
 5°. $t = \sqrt{ss + \frac{ccce + 4agce}{4aa - bb}}$. Ce qui fournit cette construction.

FIG. 173. Ayant pris sur la ligne droite indéfinie AP la partie $AB(m) = a$, & mené parallèlement à PM & du côté opposé les droites $BE = \frac{1}{2}b = -n$, $AD = \frac{1}{2}c = -r$, on tirera par le point A la droite $AE(e)$ qui est donnée, & par le point D la droite DG parallèle à AE , sur laquelle on prendra la partie $DC(s) = \frac{bcc - 2afe}{4aa - bb}$ du côté de PM , si bc surpasse $2af$, comme on le suppose ici; & du côté opposé, s'il est moindre; ensuite on prendra de part & d'autre du point C , les parties CK & CL égales cha-

* Art. 161. cune à $t = \sqrt{ss + \frac{ccce + 4agce}{4aa - bb}}$. Cela fait, on décrira* une

Ellipse du diametre LK ($2t$) qui ait pour ordonnées des droites paralleles à PM , & pour parametre une ligne KH (p) $= \frac{4aat - bbs}{2ss}$. Je dis que la portion OR sera le lieu de l'équation proposée.

Car ayant mené d'un de ses points quelconques M , la droite MP qui fasse avec AP l'angle donne ou pris à volonté APM , & qui rencontre les paralleles AE , LK ; aux points F , G ; on aura $PF = \frac{bx}{2a}$, & AF ou $DG = \frac{cx}{a}$; ce qui donnera MG ou $MP + PF + FG = y + \frac{bx}{2a} + \frac{1}{2}c$, & $CG = \frac{cx}{a} - s$ ou $s - \frac{cx}{a}$. Or par la propriété * de l'Ellip. * Art. 55. & se LK ($2t$). KH ($\frac{4aat - bbs}{2ss}$) :: LG * GK ($tt - ss + \frac{2csx}{a} - \frac{ccxx}{aa}$). \overline{GM} ($yy + \frac{b}{a}xy + cy + \frac{bbxx}{4aa} + \frac{2a}{bc}x + \frac{1}{2}cc$). Ce qui (en mettant pour $tt - ss$ & pour s leurs valeurs $\frac{ccss + 4ages}{4aa - bb}$ & $\frac{bcs - 2af}{4aa - bb}$, multipliant ensuite les extrêmes & les moyens, & divisant par $2t$) donne l'équation même proposée.

Il est à propos de remarquer que si l'angle AEB étoit droit, l'angle CGM le seroit aussi; & le diametre LK ($2t$) seroit égal au parametre KH ($\frac{4aat - bbs}{2ss}$), puisque $cc = aa - \frac{1}{2}bb$ à cause du triangle rectangle AEB . D'où l'on voit que l'Ellipse deviendrait alors un cercle qui auroit pour rayon la droite CK ou CL (t) $= \sqrt{ss + \frac{1}{4}cc + ag}$, & que DC (s) $= \frac{bc - 2af}{4a}$; ce qui rend la construction beaucoup plus simple.

EXEMPLE III.

328. SOIT proposé de trouver le lieu de l'équation $yy + xx - ax = 0$.

Je compare les termes de la formule * générale, avec * Art. 322; ceux qui leur répondent dans l'équation donnée; & j'ai
1°. $\frac{2n}{m} = 0$, parce que le terme xy manquant, on le doit

considérer comme étant multiplié par zero ; d'où je tire $n = 0$: & partant $m = e$. 2°. $\frac{n^n}{m m} + \frac{e e p}{2 m m s} = 1$; c'est à dire, $\frac{p}{2s} = 1$ en mettant pour n & m leurs valeurs 0 & e : & partant $p = 2s$. 3°. $r = 0$; parce que l'inconnue y ne le trouvant point au premier degré dans l'équation donnée, on la doit aussi considérer comme étant multipliée par zero : c'est pourquoi effaçant dans la formule

* Art. 322. générale * tous les termes où $\frac{n}{m}$ & r se rencontrent, & mettant pour e & $\frac{p}{2s}$ leurs valeurs m & 1 , elle se changera en celle-ci $yy + xx - 2sx - tt + ss = 0$, dont il reste à comparer les termes avec ceux de la proposée. 4°. $2s = a$; & partant $s = \frac{1}{2}a$. 5°. $ss - tt = 0$; puisqu'il n'y a point de termes entièrement connus dans l'équation donnée : & partant $tt = ss = \frac{1}{4}aa$; & en extrayant de part & d'autre la racine quarrée, $t = \frac{1}{2}a$. Or ces valeurs étant ainsi déterminées, je construis le lieu en cette sorte.

FIG. 174. Puisque $BE (n) = 0$, il s'ensuit que AE tombe sur AP , laquelle tombe aussi sur DG , puisqu'on a encore $AD (r) = 0$; de sorte que le point D tombe en A . C'est pourquoi prenant sur AP , la partie $AC (s) = \frac{1}{2}a$ du côté de PM ; & de part & d'autre du point C , les parties CK , CL ; égales chacune à $t = \frac{1}{2}a$ (le point L tombe ici sur le point A) ; on décrira * du diametre AK qui ait pour ordonnées des droites paralleles à PM , & pour parametre la ligne $KH (p) = 2t = a$, une Ellipse qui sera le lieu cherché.

* Art. 161. Car ayant mené d'un de ses points quelconques M la droite MP qui fasse avec AP l'angle donné ou pris à volonté APM , on aura * $AK (a). KH (a) :: Ai * PK (ax - xx). PM^2 (yy)$. Ce qui donne $yy + xx - ax = 0$.

41.

Il est évident que si l'angle APM est droit, l'Ellipse devient alors un cercle qui a pour diametre la ligne $AK = a$.

REMARQUE.

REMARQUE.

329. IL peut arriver deux differens cas , où le lieu de l'équation donnée est un cercle.

Premier cas. Lorsque les quarrés yy & xx se trouvent tous deux avec les mêmes signes & sans fraction dans une équation , où le plan xy se trouve aussi ; & que de plus l'angle AEB est droit (ce qui arrive lorsqu'ayant mené AF perpendiculaire sur PM la raison de PF à AP , qui est la même que celle de BE à AB est exprimée par la moitié de la fraction qui multiplie le plan xy) le lieu de cette équation sera toujours un cercle comme l'on a déjà vû dans l'article 324 , & la raison en est évidente par la formule generale. Car l'on aura pour la comparaison des termes correspondans où se trouve le quarré xx , cette égalité $\frac{nn}{mm} + \frac{ee}{2mm} = 1$;

d'où l'on tire $\frac{p}{2} = \frac{mm - nn}{ee} = 1$, puisque à cause du triangle rectangle AEB le quarré $mm = nn + ee$. Or l'angle AEB étant droit , l'angle CGM que fait le diametre LK avec ses ordonnées sera aussi droit ; & par conséquent puisque le diametre LK est égal à son parametre KH , il s'ensuit que l'Ellipse devient alors un cercle.

Second cas. Lorsque les quarrés yy & xx se trouvent tous deux avec les mêmes signes & sans fraction dans une équation , où le plan xy ne se rencontre pas , & que de plus l'angle APM est droit : son lieu sera toujours un cercle , comme l'on vient de voir dans l'article 328 ; & cela se prouve par le moyen de la formule generale. Car puisque le plan xy ne se trouve point dans l'équation donnée , la fraction $\frac{2n}{m}$ de la formule sera nulle ou zero ; & partant $BE (n) = 0$, & $m = e$. D'où l'on voit. 1°. Que le diametre LK est parallele à la ligne AP , & qu'ainsi l'angle CGM qu'il fait avec ses ordonnées étant égal à l'angle APM sera :

G g

droit. 2°. Que la fraction $\frac{nn}{mm} + \frac{ep}{2mm}$ qui multiplie le quarré xx dans la formule devient $\frac{p}{2t}$, & qu'ainsi on aura $\frac{p}{2t} = 1$: c'est à dire que le diametre LK sera égal à son parametre KH . L'Ellipse qui est le lieu de l'équation donnée sera donc alors un cercle. Or comme alors la formule generale se change en celle-ci

$$yy + xx - 2ry - 2sx + rr = 0,$$

$$\quad \quad \quad -tt$$

$$\quad \quad \quad +ss$$

on pourra, si l'on veut abreger le calcul, en se servant d'abord de cette formule, pour trouver par la comparaison de ses termes avec ceux de la proposée, les valeurs de r , s , t , qui servent à décrire le cercle qui en est le lieu.

LEMME FONDAMENTAL.

Pour la construction des lieux à l'Hyperbole par rapport à ses diametres.

FIG. 175.
176.

* Art. 161.

c. 330. LES mêmes choses étant posées que dans le Lemme précédent pour l'Ellipse⁺, on décrira * du diametre LK ($2t$) qui ait pour parametre KH (p), & pour ordonnées des droites paralleles à PM , une Hyperbole ou deux Hyperboles opposées. Je dis que la portion OM , ou leurs portions renfermées dans l'angle PAD fait par la ligne AP & par une ligne AD menée par le point fixe A parallelement à PM & du même côté, sera le lieu de cette équation ou formule.

$$yy - \frac{2n}{m}xy + \frac{nn}{mm}xx - 2ry + \frac{2nt}{m}x + rr = 0.$$

$$\quad \quad \quad - \frac{ep}{2mm} \quad \quad \quad + \frac{2eps}{2ms}x - \frac{pss}{2t}$$

dans laquelle on doit observer qu'il y a $+\frac{pss}{2t}$ lorsque

le diametre LK est un premier diametre, & — $\frac{p^2}{2t}$ lorsqu'il est un second.

Car ayant mené d'un de ses points quelconques M la ligne MP , qui fasse avec AP l'angle donné ou pris à volonté APM , & qui rencontre les paralleles AE , DG , aux points F , G , on aura par la propriété de l'Hyperbole* KL (2t). $KH(p) :: \overline{CG}^2 \pm \overline{CK}^2 \left(\frac{eexx}{mm} - \frac{2eex}{m} \right) + Art. 81. \& 118.$
 $\pm ss \pm tt$). $\overline{GM}^2 = \frac{peex}{2mm} - \frac{2eex}{2mt} + \frac{p^2}{2t} \pm \frac{p^2}{2t} = yy -$
 $\frac{2n}{m}xy - 2ry + \frac{nn}{mm}xx + \frac{2nr}{m}x + rr$. Donc &c.

S'il arrive que le diametre KL (2t) & son parametre $KH(p)$ soient égaux entr'eux ; l'Hyperbole sera équilater.

COROLLAIRE.

331. IL est clair, 1°. Que les deux quarrés yy & xx se trouvent toujours avec differens signes dans cette formule, lorsque le plan xy ne s'y rencontre point ; ou bien lorsqu'il s'y trouve, & que $\frac{ee p}{2mm} surpasse \frac{nn}{mm}$. 2°. Qu'ils s'y peuvent trouver avec les mêmes signes, mais avec ces conditions que le plan xy s'y rencontre, & que le quarré $\frac{nn}{mm}$ de la moitié de la fraction qui le multiplie, soit plus grand que la fraction $\frac{nn}{mm} - \frac{ee p}{2mm}$ qui multiplie le quarré xx .

PROPOSITION IV.

Problème.

332. CONSTRUIRE le lieu d'une équation donnée, dans laquelle, ou les deux quarrés yy & xx se rencontrent avec differens signes, ou bien avec les mêmes signes, mais avec ces deux conditions que le plan xy s'y trouve, & que le quarré de la moitié de la fraction qui le multiplie soit plus grand

Gg ij

que la fraction qui multiplie le quarré xx . On suppose encore ici que le quarré yy soit délivré de fractions.

On construit l'Hyperbole qui en est le lieu, comme l'on vient de faire l'Ellipse dans le Problème précédent. Les Exemples qui suivent le feront voir.

EXEMPLE I.

333. Soit $yy + \frac{2b}{a}xy + \frac{f}{a}xx + 2cy - 2gx - hh = 0$, l'équation dont il faut construire le lieu, & dans laquelle on suppose que le quarré $\frac{bb}{aa}$ surpasse $\frac{f}{a}$.

Je compare les termes de cette équation avec ceux qui leur répondent dans la formule du Lemme, & j'ai
 1°. $\frac{2n}{m} = -\frac{2b}{a}$, & partant si l'on fait $m = a$, on aura
 $n = -b$. 2°. $\frac{cep}{2mms} - \frac{nn}{mm} = -\frac{f}{a}$, donc $\frac{p}{2s} = \frac{bb - af}{ee}$, &
 $p = \frac{2bbt - 2afr}{ee}$. 3°. $r = -c$. 4°. $\frac{2nr}{m} + \frac{2eps}{2ms} = -2g$, d'où
 en mettant pour $m, n, r, \frac{p}{2s}$ les valeurs que l'on vient de trouver, on tire $s = \frac{-bce - age}{bb - af}$. 5°. $+tt = ss - \frac{2rrt - 2hhz}{p}$
 $= ss - \frac{eecc - eebb}{bb - af}$, sçavoir $+tt$ lorsque le quarré ss sur-
 passe $\frac{eecc + eebb}{bb - af}$, & $-tt$ lorsqu'il est moindre, parce que
 le quarré tt doit être positif; ce qui fait deux differens
 cas. Or les valeurs de m, n, r, s, t, p , étant ainsi deter-
 minées, je construis le lieu en me réglant sur la construc-
 tion du Lemme, de la maniere qui suit.

FIG. 177.
178.

Ayant pris sur AP , la partie $AB = a$, & mené pa-
 rallelement à PM & du côté opposé les droites $BE = b$
 $= -n$, $AD = c = -r$, je tire par les points A, E , la
 droite AE (e) qui est donnée, & par le point D la
 droite infinie DC parallele à AE sur laquelle je
 prends la partie $DC = \frac{eag + ebc}{bb - af} = -s$ du côté opposé
 à PM , & de part & d'autre du point C les parties

CL , CK , égales chacune à $t = \sqrt{ss - \frac{cccc - eebb}{bb - af}}$ ou $\sqrt{\frac{cccc + eebb}{bb - af} - ss}$, selon que ss est plus grand ou moindre que $\frac{cccc + eebb}{bb - af}$. Cela fait, du diametre LK (qui ait pour ordonnées des droites paralleles à PM , & pour parametre la ligne KH ($p = \frac{2bbt - 2aft}{e}$)) je décris une Hyperbole, en observant que LK (*fig. 177.*) doit être un premier diametre dans le premier cas, & un second (*fig. 178.*) dans le dernier. Je dis que la portion QM fera le lieu requis.

Car ayant mené d'un de ses points quelconques M une parallele MP à AD , laquelle rencontre les lignes AB , AE , DG , aux points P , F , G ; on aura $PF = \frac{bx}{a}$, & AF ou $DG = \frac{ex}{a}$. Et par conséquent $MG = y + \frac{bx}{a} + c$, CG ou $DG + CD = \frac{ex}{a} - s$, puisque $CD = -s$. Or par la propriété de l'Hyperbole, LK ($2t$). KH ($\frac{2bbt - 2aft}{e}$) :: $\overline{GM}^2 + \overline{CK}^2$ ($\frac{eexx}{aa} - \frac{2eex}{a} + ss + tt$). \overline{GM}^2 ($yy + \frac{2b}{a}xy + 2cy + \frac{bb}{aa}xx + \frac{2bc}{a}x + cc$); ce qui, en mettant pour $ss + tt$ & s leurs valeurs $\frac{cccc + eebb}{bb - af}$ & $-\frac{bce - age}{bb - af}$, multipliant les extrêmes & les moyens, & divisant par $2t$, donne l'équation proposée. Donc &c.

REMARQUE.

334. S'il arrive que $ss = \frac{cccc + eebb}{bb - af}$, il est clair que la valeur de tt devient nulle ou zero, & qu'ainsi la construction de l'Hyperbole devient impossible. Mais il faut bien remarquer alors que l'équation proposée s'abaisse toujours, en sorte que son lieu, qui devoit être une ou deux Hyperboles opposées, devient une ou deux lignes droites. En effet dans nôtre exemple on a réduit l'équation donnée à cette proportion $ee.bb - af ::$

G g ij

$\frac{c c x x}{a a} - \frac{2 c c x}{a} + s s - t t. y y + \frac{2 b}{a} x y + \frac{b b}{a a} x x + 2 c y$
 $+ \frac{2 b c}{a} x + c c$; d'où, en effaçant $t t$ qui est nul, multi-
 pliant les extrêmes & les moyens, & extrayant de part
 & d'autre la racine quarrée, l'on tire $c y + \frac{c b x}{a} + c c$
 $= \frac{c x}{a} - s \sqrt{b b - a f}$, c'est à dire en mettant pour $- s$
 la valeur $\frac{b c c + a g e}{b b - a f}$, & divisant de part & d'autre par c ,
 cette équation $y + \frac{b x}{a} + c = \frac{x \sqrt{b b - a f}}{a} + \frac{a x + b c}{\sqrt{b b - a f}}$ ou y
 $= \frac{-b + \sqrt{b b - a f}}{a} x + \frac{a g + b c}{\sqrt{b b - a f}} - c$, qui en faisant $\frac{n}{m} =$
 $= \frac{b - \sqrt{b b - a f}}{a}$, & $p = \frac{a g + b c}{\sqrt{b b - a f}} - c$, se change en cette au-
 tre $y = p - \frac{n}{m} x$ dont le lieu est une ligne droite que l'on
 construit selon l'article 306.

La raison de ceci est évidente par la formule gene-
 rale du Lemme; car effaçant dans cette formule le ter-
 me $-\frac{p t t}{2 t}$ qui renferme le quarré $t t$ que l'on suppose égal
 à zero ou nul, elle se change en transposant certains ter-
 mes, & extrayant les racines quarrées en cette autre
 $y - \frac{n}{m} x - r = \frac{c x}{m} - s \sqrt{\frac{p}{2 t}}$ ou $s - \frac{c x}{m} \sqrt{\frac{p}{2 t}}$ où les in-
 connus x & y ne sont plus qu'au premier degré, & dont
 le lieu par conséquent devient des lignes droites.

E X E M P L E I I.

335. **O**N demande le lieu de l'équation donnée
 $y y - x x + 2 a y + a x = 0$.

La comparaison des termes correspondans donne
 1°. $\frac{2 n}{m} = 0$, parce que le terme $x y$ ne se trouve point
 dans la proposée; d'où l'on tire $n = 0$, & par consé-
 quent $m = c$. 2°. $\frac{p}{2 t} = 1$, & partant $p = 2 t$. 3°. $r = -a$.

4°. $\frac{p^2}{11} = a$, d'où l'on tire $s = \frac{1}{2}a$. 5°. $rr + \frac{p^2}{11} = \frac{p^2}{11} = e$, & ainsi $rr = ss - \frac{2rr}{p} = -\frac{1}{4}aa$ en mettant pour $r, \frac{2r}{p}$, s leurs valeurs $-a, 1, \frac{1}{2}a$; d'où je connois qu'il faut prendre dans le dernier terme de la formule $-rr$ & non pas $+rr$, afin que la valeur de rr soit positive. Je construis ensuite le lieu en cette sorte.

Puisque $AD (r) = -a$, je mene par le point A FIG. 179. parallèlement à PM & du côté opposé la ligne $AD = a$; & puisque $BE (n) = 0$, je tire par le point D la droite DG parallèle à AP , sur laquelle je prends la partie $DC (s) = \frac{1}{2}a$ du côté de PM , & de part & d'autre du point C les parties CL, CK , égales chacune à $t = \sqrt{\frac{1}{4}aa}$. Ensuite du second diamètre LK (parce qu'on a pris $-rr$ dans le dernier terme de la formule) qui ait pour ordonnées des droites parallèles à PM , & pour parametre la droite $KH (p) = 2t = LK$, je décris une Hyperbole. Je dis que la portion OM sera le lieu qu'on cherche.

Car ayant mené d'un de ses points quelconques M une parallèle MP à AD , qui rencontre les droites AP, DG , aux points P, G ; on aura $MG = y + a$, CG ou $DG - DC = x - \frac{1}{2}a$, & par la propriété de l'Hyperbole $LK (2t)$. $KH (2t) :: CG + CK (x - ax + \frac{1}{4}aa + tt)$. $GM (yy + 2ay + aa)$; ce qui donne en mettant pour tt sa valeur $\frac{1}{4}aa$, l'équation même proposée $yy + 2ay - xx + ax = 0$.

Il est évident que l'Hyperbole est équilatere.

REMARQUE.

336. LORSQUE les deux quarrés yy & xx se trouvent avec differens signes & sans fraction dans une équation, où le plan xy ne se rencontre point; son lieu sera toujours une Hyperbole équilatere. Car la fraction $\frac{1}{m}$ de la formule sera nule ou zero; & partant

$BE(n) = 0$, & $m = e$. D'où il suit que la fraction $\frac{ee}{mm}$
 $-\frac{ee}{2mm}$ qui multiplie le carré xx dans la formule de-
vient $-\frac{p}{2r}$; & qu'ainsi on aura $-\frac{p}{2r} = 1$, c'est à dire,
que le diamètre LK sera égal à son paramètre KH ,
ou, ce qui est la même chose, que l'Hyperbole sera
équilatère. Or comme la formule générale se change
alors en celle-ci

$$yy - xx - 2ry + 2sx + rr = 0,$$

$$\begin{array}{c} + rr \\ - ss \end{array}$$

il s'ensuit qu'on peut s'en servir d'abord pour trouver
les valeurs de r, s, t , qui servent à construire l'Hyper-
bole équilatère qui est le lieu de l'équation donnée; ce
qui abrége le calcul.

LEMME FONDAMENTAL.

*Pour la construction des lieux à l'Hyperbole
entre ses Asymptotes.*

337. SOIENT comme dans la définition première,
deux lignes inconnues & indéterminées $AP(x)$, $PM(y)$
qui fassent entr'elles un angle donné ou pris à vo-
lonté APM ; & soient de plus des lignes droites don-
nées m, n, p, r, s . Cela posé.

FIG. 130. 1°. On prendra sur la ligne AP , la partie $AB = m$; &
ayant mené les droites $BE = n$, $AD = r$, parallèles à PM ,
& du même côté; on tirera par le point A la droite
 AE qui est donnée, & que j'appelle e , & par le point
 D la droite indéfinie DG parallèle à AE , sur laquel-
le ayant pris les parties $DC = s$, $CK = e$ du côté que
s'étend AP , on menera parallèlement à PM & du
même côté la droite indéfinie CL , & la ligne $KH = p$,
* Art. 130. On décrira ensuite * entre les Asymptotes CL , CK ,
131. une

une Hyperbole qui passe par le point H . Je dis qu'elle sera le lieu de l'équation ou formule.

$$xy - \frac{n}{m}xx - \frac{m}{e}y + \frac{n}{e}x + \frac{mrs}{e} = 0.$$

$$-rx - mp$$

Car $GM = y - \frac{nx}{m} - r$, $CG = \frac{ex}{m} - s$, & par la propriété de l'Hyperbole * $CG \times GM (\frac{exy}{m} - sy - \frac{enxx}{mm} + \frac{nxs}{m} - \frac{exx}{m} + rs) = CK \times KH (ep)$; ce qui donne en délivrant le terme xy de fractions, & mettant par ordre tous les termes, la même équation $xy - \frac{n}{m}xx - \frac{m}{e}y$ &c. que cy dessus.

2°. On menera par le point fixe A , une ligne indéfinie AQ parallèle à PM & du même côté; & ayant pris sur cette ligne la partie $AB = m$, on tirera $BE = n$ parallèle à AP & du même côté, & par les points déterminés A, E , la ligne AE que j'appelle e ; & ayant pris sur AP la partie $AD = r$ du côté de PM , on tirera la droite indéfinie DG parallèle à AE , sur laquelle on prendra les parties $DC = s$, $CK = e$ du côté que s'étend PM , & on menera parallèlement à AP & du même côté, la droite indéfinie CL & la ligne $KH = p$. On décrira ensuite * entre les asymptotes CL, CK , une Hyperbole * *Art. 130.* qui passe par le point H . Je dis qu'elle sera le lieu de cette seconde équation ou formule.

$$xy - \frac{n}{m}yy - \frac{m}{e}x + \frac{n}{e}y + \frac{mrs}{e} = 0.$$

$$-ry - mp$$

Car ayant mené d'un de ses points quelconques M , la ligne MQ parallèle à AP , & qui rencontre les parallèles AE, DG , aux points F, G ; les triangles semblables ABE, AQF , donneront $AB (m). AE (e) :: AQ$ ou $PM (y). AF$ ou $DG = \frac{ey}{m}$, & $AB (m). BE (n) :: AQ (y). QF = \frac{ny}{m}$. Et par conséquent $GM = x$.

Hh

— $\frac{ny}{m}$ — r , $CG \equiv \frac{r^2}{m}$ — s . Or par la propriété de l'Hyperbole $CG * GM \equiv CK * KH$, ce qui donne, en mettant pour ces lignes leurs valeurs analytiques, & délivrant le terme xy de fractions, la même seconde formule que cy-dessus. Donc &c.

COROLLAIRE.

338. IL est clair 1°. Que le terme xy se rencontre toujours dans ces deux formules, puisque n'étant multiplié par aucune fraction, on ne peut point la supposer nulle pour le faire évanouir. 2°. Qu'il ne s'y peut rencontrer que l'un des quarrés xx ou yy , lequel s'évanouit si la fraction $\frac{n}{m}$ qui le multiplie est nulle.

PROPOSITION V.

Problème.

339. TROUVER le lieu d'une équation donnée dans laquelle le plan xy se rencontre, sans aucun des quarrés xx & yy , ou seulement avec l'un des deux.

On délivrera le plan xy de fractions, & on comparera les termes de l'équation donnée avec ceux qui luy répondent dans la première formule lorsque le quarré xx s'y rencontre, & avec ceux de la seconde lorsque c'est le quarré yy , & enfin avec celle des deux qu'on voudra lorsque pas un des quarrés xx & yy ne s'y trouve. On tirera ensuite de la comparaison de ces termes, des valeurs des quantités m, n, p, r, s , par le moyen desquelles on décrira une Hyperbole entre ses asymptotes comme l'on a enseigné dans le Lemme précédent, en observant toujours de mener ou de prendre du côté opposé à AP & à PM les lignes dont les valeurs sont négatives. Les Exemples qui suivent éclairciront ces règles.

EXEMPLE I.

340. **O**N demande le lieu de $xy - \frac{b}{a}xx - cy = 0$.

Comme c'est le carré xx qui se rencontre dans l'équation donnée, je choisis la première formule, & j'ai par la comparaison de ses termes avec ceux de la proposée, 1°. $\frac{n}{m} = \frac{b}{a}$, d'où en faisant $m = a$, je tire $n = b$. 2°. $\frac{m's}{r} = c$, & partant $s = \frac{rc}{a}$. 3°. $\frac{n's}{r} - r = 0$, parce que l'inconnue x ne se trouve point au premier degré dans l'équation donnée, & partant $r = \frac{bc}{a}$. 4°. $\frac{m'rs}{r} - mp = 0$, parce qu'il ne se trouve point de termes entièrement connus; & partant $p = \frac{rs}{r} = \frac{bcc}{a^2}$. Or comme les valeurs de AP (m), BE (n), CD (s), AD (r), KH (p) sont toutes positives, je construis le lieu précisément comme dans le Lemme (*fig. 180.*) en observant de prendre pour les lignes les valeurs que l'on vient de trouver.

Car $GM = y - \frac{bx}{a} - \frac{bc}{a}$, CG ou $DG - DC = \frac{ax - bc}{a}$, **FIG. 180.**

& par la propriété de l'Hyperbole $CG * GM = CK * KH$ c'est à dire, en mettant les valeurs analytiques, l'équation même donnée. Donc &c.

EXEMPLE II.

341. **S**OIT $xy + \frac{b}{a}yy - cy - ff = 0$, l'équation dont il faut construire le lieu.

Comme c'est le carré yy qui se trouve dans l'équation donnée, je choisis la seconde formule, & j'ai par la comparaison de ses termes avec ceux de la proposée,

1°. $\frac{n}{m} = -\frac{b}{a}$, & si l'on fait $m = a$, on aura $n = -b$.

2°. $\frac{m's}{r} = 0$, & partant $s = 0$. 3°. $r = c$. 4°. $mp = ff$, &

H h ij

partant $p = \frac{ff}{a}$. Ce qui donne la construction suivante.

FIG. 182. Ayant mené par le point fixe A , une ligne indéfinie AQ parallèle à PM & du même côté, & ayant pris sur cette ligne, la partie $AB (m) = a$, je tire $BE = b = -n$ parallèle à AP & du côté opposé, & par les points déterminés A, E , la ligne $AE (e)$. Je prends sur AP , la partie $AD (r) = c$ du côté de PM , & je tire la droite indéfinie DG parallèle à AE , & comme les points D, C , tombent l'un sur l'autre, parce que $DC (s) = 0$, je prends sur cette ligne la partie $DK = c$ du côté que s'étend PM , & ayant mené parallèlement à AP & du même côté la ligne $KH (p) = \frac{ff}{a}$, & la droite indéfinie DL qui tombe ici sur AP , je décris entre les Asymptotes DL, DK , une Hyperbole qui passe par le point H . Je dis qu'elle sera le lieu requis.

Car ayant mené d'un de ses points quelconques M , la droite MQ parallèle à AP & qui rencontre les parallèles AE, DG , aux points F, G , on aura GM ou $MQ + QF - FG = x + \frac{by}{a} - c$, DG ou $AF = \frac{cy}{a}$, & partant $DG \times GM = \frac{cy}{a} + \frac{cby}{aa} - \frac{cy}{a} = cK \times KH (\frac{ff}{a})$. Ce qui donne, en délivrant le terme xy de fractions, l'équation proposée $xy + \frac{b}{a}yy - cy - ff = 0$.

REMARQUE.

342. SI l'on prend pour l'arbitraire $AB (m)$ une autre valeur que a , celles de $CK (e)$ & de $KH (p)$ changeront, mais les valeurs du rectangle $CK \times KH (ep)$, & des droites $AD (r)$, $CD (s)$ demeureront toujours les mêmes; car elles ne renferment dans leurs expressions que les rapports $\frac{n}{m}, \frac{n}{e}, \frac{m}{e}$, qui ne chan-

gent point, puisque dans le triangle ABE l'angle ABE est donné, & la raison $\frac{n}{m}$ (qui dans cet exemple est $\frac{b}{a}$) du côté AB (m) au côté BE (n). Or comme l'Hyperbole qui doit passer par le point H , sera toujours la même *, telle grandeur que l'on puisse donner à CK (e) * *Art. 101*; & à KH (p), pourvû que le rectangle $CK \times KH$ demeure le même; il s'ensuit que l'on construira toujours la même Hyperbole, telle grandeur que l'on puisse prendre pour l'arbitraire AB (m).

EXEMPLE III.

343. IL faut construire le lieu de l'équation donnée $xy - ay + bx + cc = 0$.

Comme pas un des quarrés xx & yy ne se trouve dans l'équation proposée, je puis prendre indifferemment l'une ou l'autre des deux formules, par exemple, la premiere, de laquelle comparant les termes avec ceux de la proposée, j'ai 1°. $\frac{n}{m} = 0$, & partant $n = 0$, & $m = e$; je fais $m = a$. 2°. $\frac{m}{e}$ ou $s = a$. 3°. $r = -b$, puisque $\frac{n}{e} = 0$. 4°. $rs - mp = cc$, & partant $p = -b - \frac{cc}{a}$. Or ces valeurs de m, n, r, s, p , étant ainsi déterminées, je construis le lieu de la maniere qui suit.

Puisque AD (r) $= -b$, je mene parallelement à *FIG. 182* PM & du côté opposé la ligne $AD = b$; & puisque BE (n) $= 0$, je tire la droite indéfinie DG parallele à AP sur laquelle ayant pris les parties DC (s) $= a$, CK (e) $= m = a$ du côté que s'étend AP , je tire la droite indéfinie CL , & la ligne $KH = b + \frac{cc}{a} = -p$ parallele à PM & du côté opposé. Je décris ensuite l'Hyperbole opposée à celle qui ayant pour Asymptotes les droites CL, CK , passe par le point H . Je dis

que la portion indéfinie OM renfermée dans l'angle PAS , faite par la droite indéfinie AP & par la ligne AS menée parallèlement à PM & du même côté, sera le lieu cherché.

Car GM ou $PG + PM = y + b$ & CG ou $CD - DG = a - x$; & par conséquent $CG \times GM = ay - xy + ab - bx = CH \times KH (ab + cc)$; ce qui, en effaçant de part & d'autre le rectangle ab , & transposant à l'ordinaire, donne $xy - ay + bx + cc = 0$ qui est l'équation proposée.

Il auroit été inutile dans cet Exemple de décrire l'Hyperbole qui passe par le point H ; car aucun de ses points ne pourroit tomber dans l'angle PAS , où l'on suppose que doivent tomber les points M .

REMARQUE.

344. S'IL arrive qu'en comparant les termes de la formule avec ceux de l'équation donnée, on trouvât que $p = 0$; on voit qu'il seroit alors impossible de décrire l'Hyperbole qui en devroit être le lieu, puisque la puissance qui est égale au rectangle pe seroit nulle. Mais alors l'équation se pourroit toujours abaisser, en sorte que son lieu deviendrait une ligne droite; car effaçant par exemple dans la première formule du Lemme le terme mp , elle devient $xy - \frac{n}{m}xx - \frac{m}{e}y + \frac{n}{e}x - rx + \frac{mrs}{e} = 0$, qui étant divisée par $\frac{x}{m} - s$ donne $y - \frac{nx}{m} - r = 0$, *Art. 306.* dont le lieu * est une ligne droite.

PROPOSITION VI.

Problème.

345. CONSTRUIRE tout lieu du second degré, son équation étant donnée.

Tous les termes de l'équation étant mis d'un même côté, en sorte que l'un des membres soit zero, je distingue deux differens cas.

Premier cas. Lorsque le plan xy ne se trouve point dans l'équation donnée. 1°. S'il n'y a que l'un des quarrés yy ou xx , le lieu sera une * Parabole. 2°. Si les deux quarrés yy & xx s'y trouvent avec les mêmes signes, le lieu sera une * Ellipse ou un cercle. 3°. Si ces deux quarrés s'y rencontrent avec differens signes, le lieu sera une * Hyperbole ou deux Hyperboles opposées rapportées à ses diametres. * Art. 310. * Art. 324. * Art. 332.

Second cas. Lorsque le plan xy se trouve dans l'équation donnée. 1°. Si pas un des quarrés yy & xx ne s'y rencontre ou seulement l'un des deux, le lieu sera * une Hyperbole entre ses Asymptotes. 2°. Si les deux quarrés yy & xx s'y trouvent avec differens signes, le lieu sera * une Hyperbole rapportée à ses diametres. 3°. Si ces deux quarrés s'y rencontrent avec les mêmes signes, on délivrera le quarré yy de fractions, & le lieu sera * une Parabole lorsque le quarré de la moitié de la fraction qui multiplie xy est égal à la fraction qui multiplie le quarré xx ; une * Ellipse ou un cercle lorsqu'il est moindre; & enfin une * Hyperbole ou deux Hyperboles opposées rapportées à ses diametres lorsqu'il est plus grand. * Art. 339. * Art. 332. * Art. 310. * Art. 324. * Art. 332.

On décrira le lieu selon l'article 310. s'il est une Parabole; selon l'article 314. s'il est une Ellipse ou un cercle; selon l'article 332. s'il est une Hyperbole ou deux Hyperboles opposées rapportées à ses diametres; & enfin selon l'article 339. si c'est une Hyperbole entre ses Asymptotes. Tout ceci n'est qu'une suite de ces quatre articles.

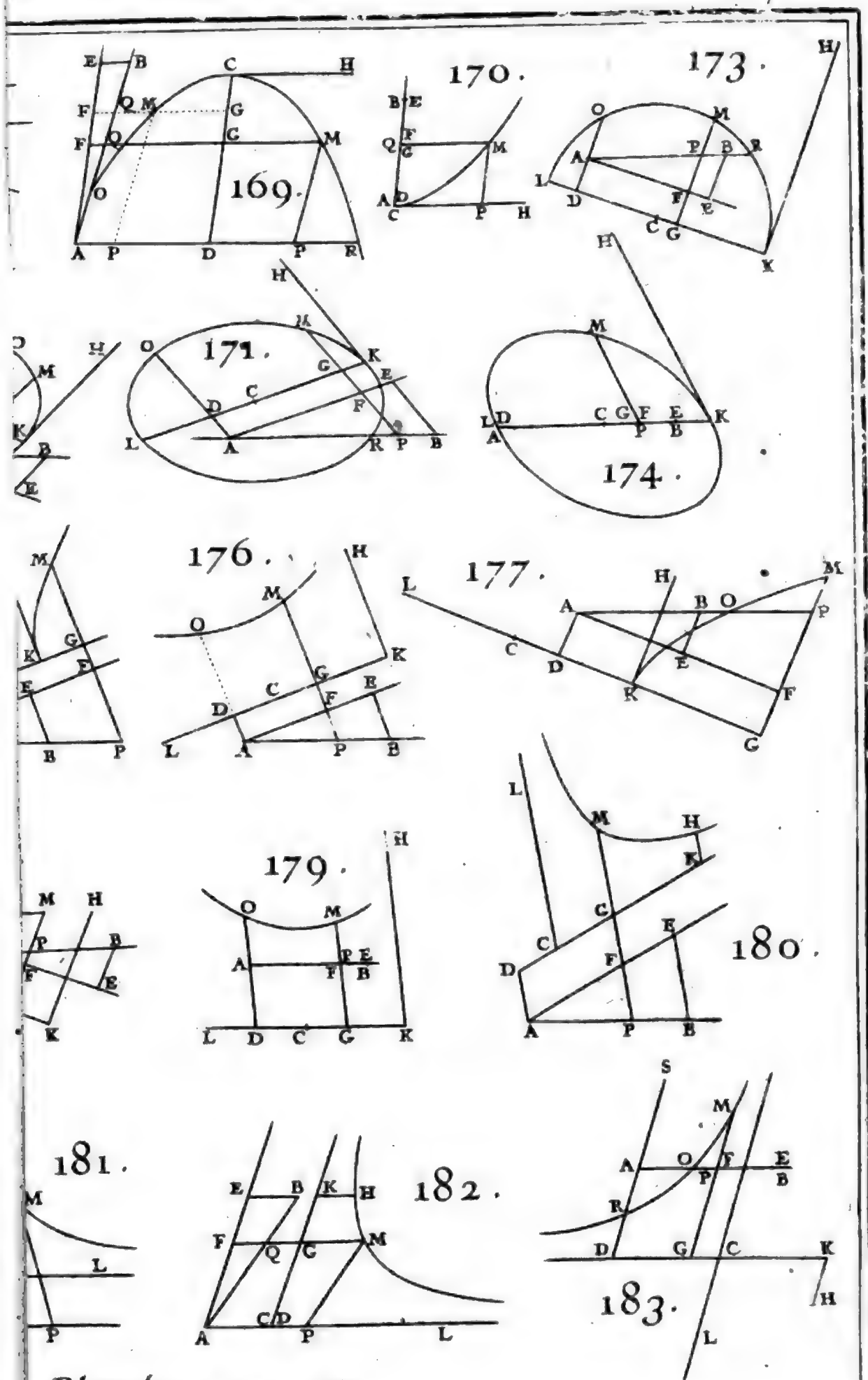
COROLLAIRE.

346. UNE équation du second degré étant donnée, comme la Section Conique que l'on trouve par

* *Art. 314.* les regles prescrites est le lieu * de toutes les valeurs tant vraies que fausses de l'inconnuë y , qui répondent aux valeurs tant vraies que fausses de l'autre inconnuë x ; il s'ensuit qu'il ne peut y avoir que cette seule section qui soit le lieu de l'équation donnée.



LIVRE HUIT.



LIVRE HUITIÈME.

Des Problèmes indéterminés.

PROPOSITION GÉNÉRALE.

347. **T**ROUVER le lieu d'une infinité de points qui FIG. 184.
 aient tous certaines conditions marquées ; lorsque ce lieu ne passe
 point le second degré.

1°. On supposera comme connues & déterminées deux lignes droites inconnues & indéterminées $AP (x)$, $PM (y)$, qui fassent entr'elles un angle APM donné ou pris à discrétion ; & dont l'une AP ait une origine fixe & invariable en un point A , & s'étende le long d'une ligne donnée de position ; l'autre PM qui détermine toujours par son extrémité M , l'un des points cherchés, change continuellement d'origine, & soit toujours parallèle à la même ligne. 2°. On tirera les autres lignes que l'on jugera utiles à la solution du Problème, & on les exprimera par des lettres ; sçavoir, les connues par les premières lettres de l'Alphabet, & les inconnues par les dernières. 3°. On regardera la question comme résolue, & après en avoir parcouru toutes les conditions, on arrivera enfin à une équation qui ne renfermera que les deux inconnues x & y mêlées avec des connues. 4°. Cette équation dans laquelle on suppose que les inconnues x & y aient au plus deux dimensions, étant formée, on en construira le lieu selon les règles prescrites dans le Livre précédent ; & le lieu ainsi construit résoudra la question. Tout ceci s'éclaircira par les Exemples qui suivent.

EXEMPLE I.

348. **T**ROUVER dans l'angle donné BAC le point FIG. 184.
 M , tel qu'ayant mené de ce point les deux droites MF ,
 MG , qui fassent sur les côtés AB , AC , toujours vers
 la même part, des angles donnés $MF B$, MGC ; la
 li.

droite MF soit toujours à la droite MG en la raison donnée de a à b . Et comme il y a une infinité de ces points, on demande la ligne qui les renferme tous, & qui en est par conséquent le lieu.

Par le point M , que l'on suppose être un des points cherchés, ayant mené la ligne MP parallèle à AC ; on considérera les deux droites inconnues & indéterminées $AP(x)$, $PM(y)$, comme connues & déterminées. On prendra sur le côté AB la partie $AB = a$, on tirera les droites BC , BD , parallèles à MF , MG , & qui rencontrent aux points C , D , l'autre côté AC prolongé, s'il est nécessaire; & on nommera les connues AC, c ; BC, f ; BD, g . Presentement menant MQ parallèle à AB , les triangles semblables ACB , PMF , & ABD , QMG , donneront ces deux proportions: $AC(c). CB(f) :: MP(y). MF = \frac{f}{c}$, & $AB(a). BD(g) :: MQ$ ou $AP(x). MG = \frac{g}{a}$; ce qui satisfait à la première condition du Problème, puisque les lignes MF , MG , sont toujours supposées parallèles aux deux mêmes droites BC , BD , qui font sur les côtés AB , AC , les angles donnés. Or par la seconde condition qui reste à accomplir, il faut que $MF(\frac{f}{c}). MG(\frac{g}{a}) :: a, b$; d'où

l'on tire l'équation $y = \frac{bx}{af}$ qui renferme toutes les conditions du Problème, & dont le lieu sera par conséquent

* *Art.* 306. celui que l'on cherche. Il se construit * ainsi.

Ayant pris sur la ligne AP , la partie $AH = b$, soit menée $HE = \frac{g}{f}$ parallèle à PM & du même côté, & soit tirée la droite indéfinie AE . Je dis qu'elle sera le lieu de tous les points cherchés M .

Car ayant mené par un de ses points quelconques M les droites MP , MQ , parallèles aux deux côtés AC , AB , & les droites MF , MG , parallèles à BC , BD , & qui font par conséquent sur les deux côtés AB , AC , les angles donnés; on aura à cause des triangles sembla-

bles AHE , APM , cette proportion ; $AH (b)$.
 $HE (\frac{ex}{f}) :: AP (x). PM (y) = \frac{ex}{bf}$, & à cause des
 triangles semblables ACB , PMF , & ABD , QMG ,
 ces deux autres : $AC (c). CB (f) :: MP (\frac{ex}{bf}). MF$
 $= \frac{ex}{b}$, & $AB (a). BD (g) :: MQ ou AP (x). MG$
 $= \frac{ex}{a}$. Et par conséquent $MF (\frac{ex}{b}). MG (\frac{ex}{a}) :: a. b$.
 Ce qui étoit proposé.

Je n'ai résolu cette question par le calcul, que pour FIG. 185.
 la rapporter à la Proposition générale, & commencer
 par des Exemples simples & aisés à en faire voir l'appli-
 cation ; car on peut résoudre ce Problème sans aucun
 calcul, & d'une manière plus facile en cette sorte.

Soient tirées les droites AK , AL , qui fassent sur AB ,
 AC , les angles donnés KAB , LAC , & qui soient
 entr'elles en la raison donnée de a à b . Soient menées
 les droites KM , LM , parallèles aux côtés AB , AC ,
 & qui se rencontrent au point M ; par où, & par le som-
 met A de l'angle donné BAC , soit tirée la ligne AM :
 Je dis qu'elle sera le lieu cherché.

Car ayant mené d'un de ses points quelconques E les
 droites ER , ES , parallèles à AK , AL ; on aura à cau-
 se des triangles semblables AER , MAK , & AES ,
 MAL , ces proportions $ER. AK :: AE. AM :: ES.$
 AL . Et partant $ER. ES :: AK. AL :: a. b$.

EXEMPLE II.

349. Les parallèles AB , CD , étant données de FIG. 186.
 position ; trouver le lieu de tous les points M tellement
 placés entre ces lignes, qu'ayant tiré les droites MP ,
 MG ; qui fassent avec elles toujours vers la même part
 des angles donnés MPB , MGD ; elles soient toujours
 entr'elles en la raison donnée de a à b .

Ayant pris pour l'origine fixe des indéterminées AP
 (x) , un point quelconque A de la ligne AB , & les deux

droites inconnues & indéterminées $AP (x)$, $PM (y)$ étant supposées connues & déterminées, on mènera les lignes AC , AE , parallèles aux deux droites, MP , MG ; & on nommera les connues AC , c ; AE , f ; Cela fait, on prolongera PM jusqu'à ce qu'elle rencontre CD en F ; & les triangles semblables CAE , FMG , donneront $AC (c)$. $AE (f) :: MF (c - y)$. $MG = \frac{cf - fy}{c}$. Or selon la condition du Problème qui reste à accomplir, il faut que $MP (y)$. $MG (\frac{cf - fy}{c}) :: a.b$; d'où l'on tire l'équation $y = \frac{acf}{bc + af}$ qui renferme toutes les conditions du Pro-

* Art. 307. blème, & dont le lieu qui est * une ligne droite indéfinie HM menée parallèlement à AB en sorte que $AH = \frac{acf}{bc + af}$, est par conséquent le lieu cherché.

EXEMPLE III.

FIG. 187.

350. DEUX points A , B , étant donnez, en trouver un troisième M , tel qu'ayant mené les droites MA , MB ; elles soient toujours entr'elles en raison donnée de a à b . Et comme il y a une infinité de ces points M , il est question de décrire le lieu qui les renferme tous.

Il peut arriver trois differens cas selon que a est moindre, plus grand, ou égal à b .

Premier cas. Par le point M , que je suppose être un de ceux qu'on cherche, ayant mené la ligne MP perpendiculaire sur AB (car n'y ayant point d'angle donné dans le Problème, on choisit l'angle droit comme le plus simple), & les deux droites inconnues & indéterminées $AP (x)$, $PM (y)$ étant supposées connues & déterminées; on nommera la donnée AB , c ; & à cause des triangles rectangles APM , BPM , on aura les quarrés $\overline{AM} = xx + yy$, $\overline{BM} = cc - 2cx + xx + yy$. Or par la condition du Problème, $\overline{AM} (xx + yy)$. $\overline{BM} (cc - 2cx + xx + yy) :: aa. bb$. D'où (en multipliant les extrêmes & les moyens & divisant ensuite

par $bb - aa$) on forme cette équation $yy + xx + \frac{2aacx}{bb - aa} - \frac{a^3cc}{bb - aa} = 0$, qui renferme la condition du Problème, & dont le lieu qui est par conséquent celui qu'on demande, se construit par le moyen de l'article 322. (Liv. précéd.) en cette sorte.

Soit prise sur la ligne AP , la partie $AC = \frac{aac}{bb - aa}$ du côté opposé à PM ; & soit décrite du centre C , & du rayon CD ou $CE = \frac{abc}{bb - aa}$ la circonférence d'un cercle. Je dis que la portion DMO renfermée dans l'angle PAO , fait par la ligne AP & par la droite AO menée parallèlement à PM & du même côté, sera le lieu de l'équation que l'on vient de trouver. FIG. 187.

Car ayant mené d'un de ses points quelconques M , la perpendiculaire MP sur AB , on aura par la propriété du cercle $\overline{CD}^2 = \overline{CP}^2$ ou $EP \times PD = PM^2$; c'est à dire en mettant pour ces quarrés leurs valeurs analytiques, l'équation précédente.

Si l'on suppose à présent que les points M tombent dans l'angle EAO opposé au sommet à l'angle BAO dans lequel on a supposé en faisant le calcul qu'ils étoient situés, on trouvera en faisant $AP = -x$, & $PM = -y$, * Art. 304. la même équation que ci-dessus, tant par la condition du Problème, que par la propriété de la portion RME de la même circonférence que l'on vient de décrire; d'où il suit que cette portion est le lieu de tous les points cherchés M , lorsqu'ils tombent dans l'angle RAE . Et si l'on suppose enfin que les points M tombent dans l'angle BAR & ensuite dans l'angle EAO , on trouvera de même (en observant de faire $PM = -y$, lorsqu'il tombe de l'autre côté de la ligne AB ; & $AP = -x$, lorsque le point P tombe de l'autre côté du point fixe A) que les portions DR , EO ; de la même circonférence seront les lieux de ces points; & qu'ainsi la circonférence

ce entiere qui a pour diametre la ligne DE , est le lieu complet de tous les points requis M .

Second cas. On trouvera par un raisonnement semblable à celui du premier cas, cette équation $yy + xx - \frac{2aacx}{aa-bb} + \frac{aac^2}{aa-bb} = 0$. dont le lieu se construit ainsi.

FIG. 188. Soit prise sur AP , la partie $AC = \frac{aac}{aa-bb}$ du côté de PM ; & soit décrite du centre C , & du rayon CD ou $CE = \frac{abc}{aa-bb}$ un cercle. Je dis que sa circonference sera le lieu de tous les points requis M . Cela se prouve de même que dans le premier cas.

Si l'on considere dans ces deux cas que la circonference qui a pour diametre DE , & qui est le lieu de tous les points cherchés M , doit couper la ligne AB en deux points D, E , tels que $AD \cdot DB :: a \cdot b$, & $AE \cdot EB :: a \cdot b$; puisque le point M tombant en D la droite AM devient AD ; & BM , BD ; & de même que le point M tombant en E , la droite AM devient AE , & BM , BE : on abregera de beaucoup les constructions precedentes. Car il est visible qu'ayant divisé la ligne AB prolongée du côté qu'il sera necessaire, en deux points D, E , tels que $AD \cdot DB :: a \cdot b$, & $AE \cdot EB :: a \cdot b$; la ligne DE sera en l'un & l'autre cas le diametre de la circonference qui est lieu cherché.

Troisième cas. Puisque dans ce cas $a=b$, l'équation
* Art. 307. precedente se change en celle-ci $x = \frac{1}{2}c$; d'où l'on voit*
FIG. 189. que si l'on prend AP égale à la moitié de AB & qu'on tire la droite PM perpendiculaire sur AB , cette ligne PM indéfiniment prolongée de part & d'autre, sera le lieu de tous les points requis M . Ce qui est d'ailleurs évident par les Elemens de Geometrie.

EXEMPLE IV.

FIG. 190. 351. DEUX lignes droites DE, DN , indéfiniment prolongées de part & d'autre du point D , étant données

de position sur un plan, avec un point C hors de ces lignes; soit imaginé un angle donné CEM se mouvoir par son sommet E le long de DE , en sorte que son côté EC qui rencontre DN en N , passe toujours par le même point C , & que son autre côté EM soit toujours troisième proportionnel à NC , CE . On demande le lieu de tous les points M dans ce mouvement.

Soient menées CA parallele à DN ; & CB qui fasse sur DE au point B un angle égal à l'angle donné CEM , du côté qu'il sera nécessaire, afin que CE tombant sur CB la droite EM tombe sur DE . Cela posé je distingue la question en trois differens cas: car ou le sommet E de l'angle donné CEM se meut sur la droite DE de l'autre côté du point B par rapport au point A ; ou entre les points B , A ; ou enfin de l'autre côté du point A par rapport au point B .

Premier cas. Lorsque le sommet E se meut sur la ligne DE de l'autre côté du point B par rapport au point A . Ayant mené du côté du point C la ligne AQ qui fasse sur DE au point A l'angle BAQ égal à l'angle ABC , on tirera par l'un des points cherchés M , que l'on regarde comme donné, la ligne MP parallele à AQ , & qui rencontre DE en P ; & on aura deux triangles semblables CBE , EPM ; car les deux angles CBE , EPM , sont égaux chacun à l'angle donné CEM , & de plus les angles BCE , PEM , sont aussi égaux entr'eux; puisque dans le triangle CBE l'angle externe CEP ou $CEM + PEM$ est égal aux deux internes opposés BCE & CBE ou CEM . Si donc l'on nomme les données AD , a ; AB , b ; BC , c ; & les inconnues & indéterminées AP , x ; PM , y ; AE , z ; on aura, tant à cause des paralleles DN , AC , que de la condition du Problème, ces proportions $AD(a).$ $AE(z) :: CN.CE :: CE.EM :: CB(c).EP(x-z) :: BE(z-b).PM(y)$; d'où l'on forme (en multipliant les extrêmes & les moyens) ces deux équations $ax - az = cz$ & $ay = z - bz$, qui, en prenant, pour abreger,

$f = a + c$, & faisant évanouir z , se réduisent à celle ci $xx - \frac{bf}{a}x - \frac{ff}{a}y = 0$ qui ne renferme plus que les inconnues x & y , & dont le lieu, qui est celui que l'on cherche, se construit * ainsi.

Soit prise sur la ligne AP , la droite $AF = \frac{bf}{2a}$ du côté de PM ; & ayant mené FL parallèle à PM , soit prise sur cette ligne du côté opposé à PM , la partie $FG = \frac{bb}{4a}$. Soit décrite du diamètre GL qui ait pour origine le point G , pour parametre $GH = \frac{ff}{a}$, & pour ordonnées des droites LM parallèles à AP , une Parabole qui s'étende du côté de PM . Je dis que la portion indéfinie OM renfermée dans l'angle PAQ , sera le lieu de tous les points cherchés M .

Car ayant mené d'un de ses points quelconques M , la ligne MQ parallèle à AP & qui rencontre le diamètre CL en L , on aura ML ou $PF = x - \frac{bf}{2a}$ & $GL = y + \frac{bb}{4a}$, & par la propriété de la Parabole, $\overline{ML}^2 (xx - \frac{bf}{a}x + \frac{bbff}{4aa}) = LG * GH (\frac{ff}{a}y + \frac{bbff}{4aa})$; ce qui en transposant à l'ordinaire donne l'équation $xx - \frac{bf}{a}x - \frac{ff}{a}y = 0$, qu'il falloit construire.

Second cas. Lorsque le sommet E parcourt la partie BA . Il est clair dans ce cas que les points M tomberont de l'autre côté de DE , puisque l'angle donné CEM sera toujours plus grand que l'angle CEP qui diminue continuellement. C'est pourquoi j'ai $PM = -y$, & comme je trouve par un raisonnement semblable au précédent, la même équation; il s'ensuit que la portion AGO de la Parabole que l'on vient de décrire, sera le lieu de tous les points M ; puisqu'elle donne aussi par sa propriété cette même équation.

Troisième cas. Lorsque le sommet se meut de l'autre côté

côté du point A par rapport au point B . Il est clair encore dans ce cas que tous les points cherchés M doivent tomber au dessous de la ligne DE ; & on trouvera comme dans le premier cas $AD. AE :: CN. CE :: CE. EM :: CB. EP$. Et partant $AD. CB :: AE. EP$. D'où l'on voit que EP est plus grande, moindre, ou égale à EA selon que CB est plus grande, moindre, ou égale à AD ; & qu'ainsi prolongeant AQ au dessous de DE vers K , tous les points cherchés M tombent dans l'angle BAK dans le premier de ces trois cas, dans son complément à deux droits DAK dans le second cas, & enfin sur la droite AK dans le troisième cas. Je suppose ici que CB soit plus grande que AD ; & comme faisant $PM = -y$, parce qu'il tombe de l'autre côté de AP , je ne trouve plus la même équation que dans le premier cas, je ne fais plus d'attention à la construction de ce cas. C'est pourquoi nommant à l'ordinaire AP, x ; PM, y ; j'arrive à cette équation $xx + \frac{bg}{a}x - \frac{eg}{a}y = 0$, dans laquelle $g = c - a$, dont le lieu qui est celui que l'on cherche est une portion indéfinie AM d'une autre Parabole que la précédente laquelle s'étend vers le côté opposé, & qui se construit * en cette sorte.

* *Art. 310.*

Soit prise sur AP de l'autre côté de PM la partie $AS = \frac{bg}{a}$; soit menée $ST = \frac{bb}{4a}$ parallèle à AQ , & du côté opposé à PM ; soit décrite du diamètre TS qui ait pour origine le point T , pour parametre une ligne $= \frac{eg}{a}$, & pour ordonnées des droites parallèles à AP , une Parabole qui s'étende du côté de $P-M$. Sa portion indéfinie AM renfermée dans l'angle PAK sera le lieu de tous les points cherchés M dans ce dernier cas, où l'on suppose que CB surpasse AD .

Il est donc évident que le lieu cherché de tous les points M est composé de deux portions indéfinies de différentes Paraboles, dont l'une $AGOM$ s'étend du côté de C ; & l'autre AM du côté opposé, & partent
K k

routes deux du point A ; car le côté CE de l'angle donné CEM tombant sur CA parallèle à DN , il est clair que CN devient infinie, & qu'ainsi EM est nulle ou zero, puisqu'on a toujours $NC. CE :: CE. EM$: c'est à dire que le point M se confond avec le point E qui tombe sur le point D . D'où l'on voit que AF est une ordonnée au diamètre FG , & AS au diamètre ST ; ce qui donne lieu à la construction suivante qui est generale.

Ayant pris sur la ligne indéfinie AP de part & d'autre du point B les parties BO, BR , égales chacune à la quatrième proportionnelle aux trois lignes DA, AB, BC ; on menera par les points de milieu F, S , l'un de AO , l'autre de AR , les droites FG, ST , parallèles à AQ , & égales chacune à la troisième proportionnelle à $4. AD$, & à AB ; sçavoir, FG du côté opposé au point C , & ST du même côté. Cela fait, on décrira deux différentes Paraboles dont l'une aura pour diamètre GF & pour ordonnée FA , & l'autre pour diamètre TS & pour ordonnée SA ; je dis que leurs portions indéfinies $MAGOM$ seront le lieu complet de tous les points cherchés M .

$$\text{Car } BO \text{ ou } BR = \frac{bc}{a}, \text{ \& partant } AF \text{ ou } \frac{1}{2} AO = \frac{1}{2} b + \frac{bc}{2a} = \frac{bf}{2a}; \text{ \& de même } AS \text{ ou } \frac{1}{2} AR = \frac{bc}{2a} - \frac{1}{2} b = \frac{bg}{2a}. \text{ Donc \&c.}$$

On peut remarquer en passant que si l'angle donné, qui se meut par son sommet le long de la ligne DE , étoit égal au complément à deux droits de l'angle CEM , sans rien changer au reste ; c'est à dire que les points M tombassent sur la ligne EM prolongée de l'autre côté du point E : le lieu de tous les points M seroit alors les portions restantes des deux Paraboles que l'on vient de décrire.

Si les points A, B, C , étoient situés différemment de ce qu'on les suppose dans cette figure, à laquelle on a accommodé le raisonnement ; on arriveroit toujours

comme l'on vient de faire à deux équations qui ne pourroient être différentes des précédentes que par quelques signes, & dont les lieux seroient par conséquent des portions de Paraboles que l'on décriroit avec la même facilité.

Le Comte *Roger de Vintimille* a proposé ce Problème avec quelques autres dans le Journal de Parme du mois d'avril de l'année 1693. ce qui a donné occasion au Pere *Saquerius* de faire imprimer un petit Livre à Milan, dans lequel il avouë qu'il n'a pû résoudre celui-ci, quoiqu'il fasse assez paroître par la solution des autres qu'il est fort versé dans la Geometrie.

EXEMPLE V.

352. **U**N E ligne droite indéfinie AP étant donnée FIG. 191. de position, avec deux points fixes A, C , l'un sur cette droite, & l'autre au dehors; soit décrite une Parabole AM qui ait pour parametre une ligne quelconque, & pour axe la ligne AP dont l'origine soit en A ; & soit menée du point donné C une perpendiculaire CM à cette Parabole. On demande le lieu de tous les points M , dont il est visible qu'il y a une infinité; puisque changeant continuellement de parametres, on peut décrire une infinité de Paraboles différentes, qui ayent toutes pour axes la même droite indéfinie AP , dont l'origine soit toujours en A .

Ayant mené par le point donné C la perpendiculaire CB sur AP , & par un des points cherchés M que l'on regarde comme donné, les droites MP, MK , parallèles à BC, AP , & la tangente MT ; on nommera les données AB, a ; BC, b ; & les inconnues & indéterminées AP, x ; PM, y ; ce qui donne $CK = b - y$, $MK = a + x$. Or par la condition du Problème, l'angle CMT est droit; & par conséquent les triangles rectangles TPM, CKM , seront semblables; car si l'on ôte des angles droits CMT, KMP , le même angle KMT ,

K k ij

- * Art. 22. les restes CMK, TMP , seront égaux. Donc $TP^*(2x)$.
 * 23. $PM(y) :: CK(b-y)$. $KM(a+x)$, d'où l'on forme en multipliant les extrêmes & les moyens cette équation $yy - by + 2xx + 2ax = 0$, dont le lieu qui est
 * Art. 322. celui qu'on demande est * une Ellipse que l'on construit *
 * Art. 324. en cette sorte.

Ayant mené $AD = \frac{1}{2}b$ perpendiculaire à AP & du côté de PM , & tiré la droite infinie DZ parallèle à AP , on prendra sur cette ligne la partie $DE = \frac{1}{2}a$ du côté opposé à PM , & de part & d'autre du point E les parties EF, EG égales chacune à $\sqrt{\frac{1}{4}aa + \frac{1}{8}bb}$. Ensuite de l'axe FG qui ait pour paramètre une ligne GH double de FG , on décrira une Ellipse. Je dis que la portion AMO renfermée dans l'angle PAD est le lieu de l'équation précédente; & par conséquent de tous les points cherchés M , lorsqu'ils tombent dans cet angle.

Car prolongeant PM , s'il est nécessaire, jusqu'à ce qu'elle rencontre l'axe FG en L , on aura l'ordonnée $ML = \frac{1}{2}b - y$, & $EL = \frac{1}{2}a + x$, & par la propriété de l'Ellipse, $FL * LG$ ou $EF - EL (\frac{1}{4}bb - ax - xx)$. $LM^2 (\frac{1}{4}bb - by + yy) :: FG.GH :: 1.2$; ce qui donne en multipliant les extrêmes & les moyens $\frac{1}{4}bb - 2ax - 2xx = \frac{1}{4}bb - by + yy$. Donc &c.

Si l'on suppose à présent que les points M tombent dans les angles BAD, BAR , on trouvera toujours la même équation que ci-dessus, tant par la condition du Problème que par la propriété de l'Ellipse; en observant de faire $AP = -x$, & $PM = -y$, lorsque le point P tombe de l'autre côté de l'origine A , & PM , de l'autre côté de la ligne AP . D'où il suit que les portions de l'Ellipse, que l'on vient de décrire, renfermées dans ces angles sont le lieu de ces points.

On doit remarquer qu'il est impossible qu'aucun des points cherchés M , tombe dans l'angle PAR , opposé au sommet à l'angle BAD dans lequel est situé le point donné C , d'où doivent partir toutes les perpendiculai-

res aux Paraboles. Car si d'un point quelconque pris dans cet angle PAR , on mene des droites comme MP , MT , perpendiculaires sur AP & CM , il est visible que les points P , T , tomberont du même côté du point A , & par conséquent que cette ligne MT ne pourra être tangente en M comme le demande la question.

Si l'on suppose que $AP(x)$ devienne nulle ou zero, l'équation précédente $yy - by + 2xx + ax = 0$ se changera en celle-ci $yy - by = 0$, dont les deux racines sont $y = 0$, & $y = b$; ce qui fait voir qu'en tirant AO parallèle & égale à BC , le lieu des points cherches M passera par les deux point A , O . On prouvera de même en supposant que le point P tombe de l'autre côté de l'origine A , & faisant $AP(-x) = AB(a)$, que ce même lieu passera par les points B , C ; de sorte que l'Ellipse doit être décrite autour du rectangle $ABCO$. Ceci donne lieu à une nouvelle construction que voici.

Soit formé le rectangle $ABCO$, & soit décrite * autour de ce rectangle une Ellipse, dont l'axe FG parallèle aux côtés AB , OC , soit à son parametre GH , comme 1 est à 2. Il est évident qu'elle sera le lieu cherché. * Art. 176.

REMARQUE I.

353. SI la nature des lignes courbes telles que AM étoit exprimée par l'équation generale $y^m = x^n a^m - x$ (les lettres m , n , marquent les exposans des puissances de y & x tels qu'ils puissent être) qui renferme * non seulement la Parabole ordinaire, mais encore celles de tous les degrés à l'infini, on auroit $TP^* \left(\frac{n}{m} x \right) : PM(y) ::$ * Art. 129.

$CK(b-y). KM(a+x) : ce qui donne $yy - by + \frac{n}{m} xx$$

$+ \frac{n}{m} ax = 0$, dont le lieu qui est celui qu'on cherche, est une Ellipse que l'on construira selon l'article 322. ou bien selon l'article 176. si l'on observe que cette Ellipse doit passer autour du rectangle donné $ABCO$, & que son axe FG parallèle aux côtés AB , OC , doit être

à son parametre GH en la raison donnée de m à n .

REMARQUE II.

FIG. 191. 354. Si le centre E de l'Ellipse qu'on vient de décrire tomboit sur l'origine A de l'axe commun AP de toutes les Paraboles AM ; & l'axe FG de l'Ellipse sur l'axe AP des Paraboles: cette Ellipse couperoit toutes ces différentes Paraboles à angles droits. On peut énoncer ce Théorème de la manière qui suit.

FIG. 192. Soient une infinité de Paraboles comme AM de tel degré qu'on voudra, qui ayent toutes pour axe commun la même ligne AP , dont l'origine est toujours au même point A ; & soit une Ellipse qui ait pour centre le point A , & dont l'axe FG situé sur AP soit à son parametre, comme le nombre m exposant de la puissance de AP (x) est au nombre n exposant de la puissance de PM (y), dans l'équation generale $y^n = x^m a^{n-m}$ qui exprime la nature des Paraboles AM . Je dis que cette Ellipse coupera toutes ces Paraboles à angles droits.

Par le point M , où elle coupe telle de ces Paraboles qu'on voudra, ayant mené la tangente MT à cette Parbole, & MS perpendiculaire à cette tangente; il est question de prouver que MS touche l'Ellipse au point M . Pour en venir à bout, on tirera la perpendiculaire MP sur l'axe, & ayant nommé les indéterminées AP , x ; PM , y ; & la donnée FG , $2t$; on aura par la propriété de l'Ellipse $FP * PG$ ($tt - xx$). PM^2 (yy) :: $m.n$, & partant $myy = ntt - nxx$. Or à cause des angles droits TPM ,

* Art. 237. TMS , il vient $TP * \left(\frac{n}{m} x\right) . PM(y) :: PM(y) . PS$
 $= \frac{m yy}{n x}$, & par conséquent AS ou $AP + PS = \frac{nxx + m yy}{n x}$
 $= \frac{tt}{x}$ en mettant pour myy la valeur que l'on vient de

trouver $ntt - nxx$. D'où l'on voit que $AP . AF :: AF . AS$,
 * Art. 57. & qu'ainsi * la ligne MS touche l'Ellipse au point M .
 Ce qu'il falloit &c.

EXEMPLE VI.

355. SOIENT imaginées une infinité d'Hyperboles FIG. 193. qui aient toutes pour Asymptotes communes les mêmes droites AP , AO , données de position, qui font entr'elles un angle droit PAO ; & soient conçues partir d'un point donné C une infinité de perpendiculaires comme CM à ces Hyperboles. On demande le lieu de tous les points M , où chacune des droites CM rencontre l'Hyperbole à laquelle elle est perpendiculaire.

Ayant tiré les mêmes lignes que dans l'exemple précédent, & les ayant nommées par les mêmes lettres, on arrivera de même à cette proportion $TP^*(x) \cdot PM(y) :: CK(b-y) \cdot KM(a-x)$; ce qui donne cette equation $yy - by - xx + ax = 0$, dont voici ^{* Art. 107.} le ^{* Art. 330.} lieu. ou 335.

Ayant pris sur l'Asymptote AO parallele à PM , la partie $AD = \frac{1}{2}b$, & mené DL parallele à AP ; on prendra sur cette ligne la partie $DE = \frac{1}{2}a$ du côté de PM , & de part & d'autre du point E , les parties EF , EG , égales chacune à $\sqrt{\frac{1}{4}aa - \frac{1}{4}bb}$ ou $\sqrt{\frac{1}{4}bb - \frac{1}{4}aa}$ selon que a est plus grand ou moindre que b . On décrira ensuite de la ligne FG , comme premier axe dans le premier cas, & comme second dans le deuxième, deux Hyperboles opposées équilateres. Je dis que leurs portions renfermées dans l'angle PAO , seront le lieu de cette équation, & par conséquent celui de tous les points cherches M .

Car prolongeant PM (s'il est nécessaire) jusqu'à ce qu'elle rencontre l'axe FG , en L , on aura l'ordonnée $ML = \frac{1}{2}b - y$, & la partie $EL = x - \frac{1}{2}a$; & ^{* Art. 127.} par la propriété des Hyperboles équilateres $\frac{EL}{EF} + \frac{EL}{EF} = \frac{LM}{EM}$, $(xx - ax + \frac{1}{4}bb) = LM(\frac{1}{4}bb - by + yy)$. Donc &c.

Si $a = b$, la construction précédente n'a plus de lieu, car la valeur du demi axe EF ou EG devient nulle. Et comme l'équation précédente devient celle ci $yy - ay - xx + ax = 0$, ou $yy - ay + \frac{1}{4}aa = xx - ax + \frac{1}{4}aa$

de laquelle extrayant de part & d'autre la racine quarrée, il vient $y - \frac{1}{2}a = x - \frac{1}{2}a$ ou $y = x$, & $\frac{1}{2}a - y = x - \frac{1}{2}a$ ou $y = a - x$; il s'ensuit que si l'on acheve le rectangle $ABCO$, & qu'on tire les deux diagonales AC , BO : elles seront le lieu de tous les points cherchés M . Car la diagonale AC est le lieu de la première équation $y = x$, & l'autre diagonale BO est le lieu de la deuxième $y = a - x$.

FIG. 194.

REMARQUE I.

FIG. 193. 356. Si la nature des lignes courbes qui ont pour Asymptotes les droites AB , AO , étoit exprimée par l'équation générale $x^m y^n = a^{n+m}$ qui renferme * les Hyperboles de tous les degrés à l'infini, on auroit TP^* ($\frac{n}{m}x$). $PM(y) :: CK(b - y)$. $KM(a - x)$; ce qui donne $yy - by - \frac{n}{m}xx + \frac{n}{m}ax = 0$, dont le lieu se construit * ainsi.

* Art. 330.

Ayant trouvé le point E comme dans l'exemple, on prendra sur DL de part & d'autre du point E , les parties EF , EG , égales chacune à $\sqrt{\frac{1}{4}aa - \frac{m}{4n}bb}$ ou $\sqrt{\frac{m}{4n}bb - \frac{1}{4}aa}$; selon que naa est plus grand ou moindre que $m bb$. Ensuite de la ligne FG comme premier axe dans le premier cas, & comme second dans le deuxième, qui soit à son parametre en la raison donnée de m à n , on décrira deux Hyperboles opposées: leurs portions renfermées dans l'angle OAB seront le lieu qu'on cherche.

Si $a.b :: \sqrt{m}.\sqrt{n}$, l'équation $yy - by - \frac{n}{m}xx + \frac{n}{m}ax = 0$

FIG. 194. se change en celle-ci $yy - ay\sqrt{\frac{n}{m}} - \frac{n}{m}xx + \frac{n}{m}ax = 0$, ou $yy - ay\sqrt{\frac{n}{m}} + \frac{naa}{4m} = \frac{n}{m}xx - \frac{n}{m}ax + \frac{naa}{4m}$ de laquelle extrayant de part & d'autre la racine quarrée, il vient.

vient $y - \frac{1}{2}a\sqrt[n]{m} = x\sqrt[n]{m} - \frac{1}{2}a\sqrt[n]{m}$, ou $y = x\sqrt[n]{m}$; & $\frac{1}{2}a\sqrt[n]{m} - y = x\sqrt[n]{m} - \frac{1}{2}a\sqrt[n]{m}$ ou $y = a\sqrt[n]{m} - x\sqrt[n]{m}$. D'où il suit que si l'on achevé le rectangle $ABCO$, & qu'on tire les diagonales BO , AC ; ces deux lignes droites seront le lieu de tous les points cherchés M : car la diagonale AC est le lieu de la premiere équation $y = x\sqrt[n]{m}$, & l'autre diagonale BO le lieu de la seconde $y = a\sqrt[n]{m} - x\sqrt[n]{m}$.

On prouvera de même que dans l'Ellipse, que les Hyperboles opposées qui sont le lieu cherché, doivent être décrites autour du rectangle donné $ABCO$; & comme l'axe FG , parallele aux côtés AB , OC , doit être à son parametre en la raison donnée de m à n , il s'ensuit qu'on peut décrire, si l'on veut, ces Hyperboles par le moyen de l'article 176. (Liv. 4.)

REMARQUE II.

357. Si le centre E de l'Hyperbole BFC tomboit sur le point A , & son axe FG sur la ligne AP ; je dis que cette Hyperbole couperoit à angles droits toutes celles qui ont pour Asymptotes les droites AP , AO ; ce qu'on peut énoncer ainsi.

Soient une infinité d'Hyperboles de tel degré qu'on voudra, qui ayent toutes pour Asymptotes communes les mêmes droites AP , AO , qui font entr'elles un angle droit; & soit une Hyperbole ordinaire FM qui ait pour centre le point A , & dont le premier axe FG situé sur AP , soit à son parametre comme le nombre m exposant de la puissance de AP (x) est au nombre n exposant de la puissance de PM (y) dans l'équation generale $x^m y^n = a^{m+n}$ qui exprime la nature des Hyperboles MAA . Je dis que l'Hyperbole FM coupe à angles droits toutes ces différentes Hyperboles.

LI

Ayant mené par le point M où elle coupe telle de ces Hyperboles qu'on voudra, une tangente MT à cette Hyperbole, & une perpendiculaire MS à cette tangente; il s'agit de prouver que l'angle TMS sera droit. pour le faire, on tirera MP perpendiculaire sur l'Asymptote AP ; & ayant nommé les indéterminés AP, x ; PM, y ; & la donnée $FG, 2t$; on aura par la propriété de l'Hyperbole FM cette proportion $FP \times PG (xx - tt) = PM^2 (yy) :: m.n$, & partant $m yy = nxx - ntt$. Or à

* *Art. 237.* cause des angles droits TPM, TMS , il vient $TP^2 (\frac{n}{m}x)$.

$PM (y) :: PM (y)$. $PS = \frac{m yy}{n x}$. Et par conséquent AS

ou $AP - PS = \frac{nxx - m yy}{n x} = \frac{tt}{x}$ en mettant pour $m yy$ la

valeur qu'on vient de trouver $nxx - ntt$. D'où l'on voit que AS est troisième proportionnelle à AP, AF ;

* *Art. 121.* & qu'ainsi * la ligne MS touche l'Hyperbole FM au point M . Ce qu'il falloit démontrer.

EXEMPLE VII.

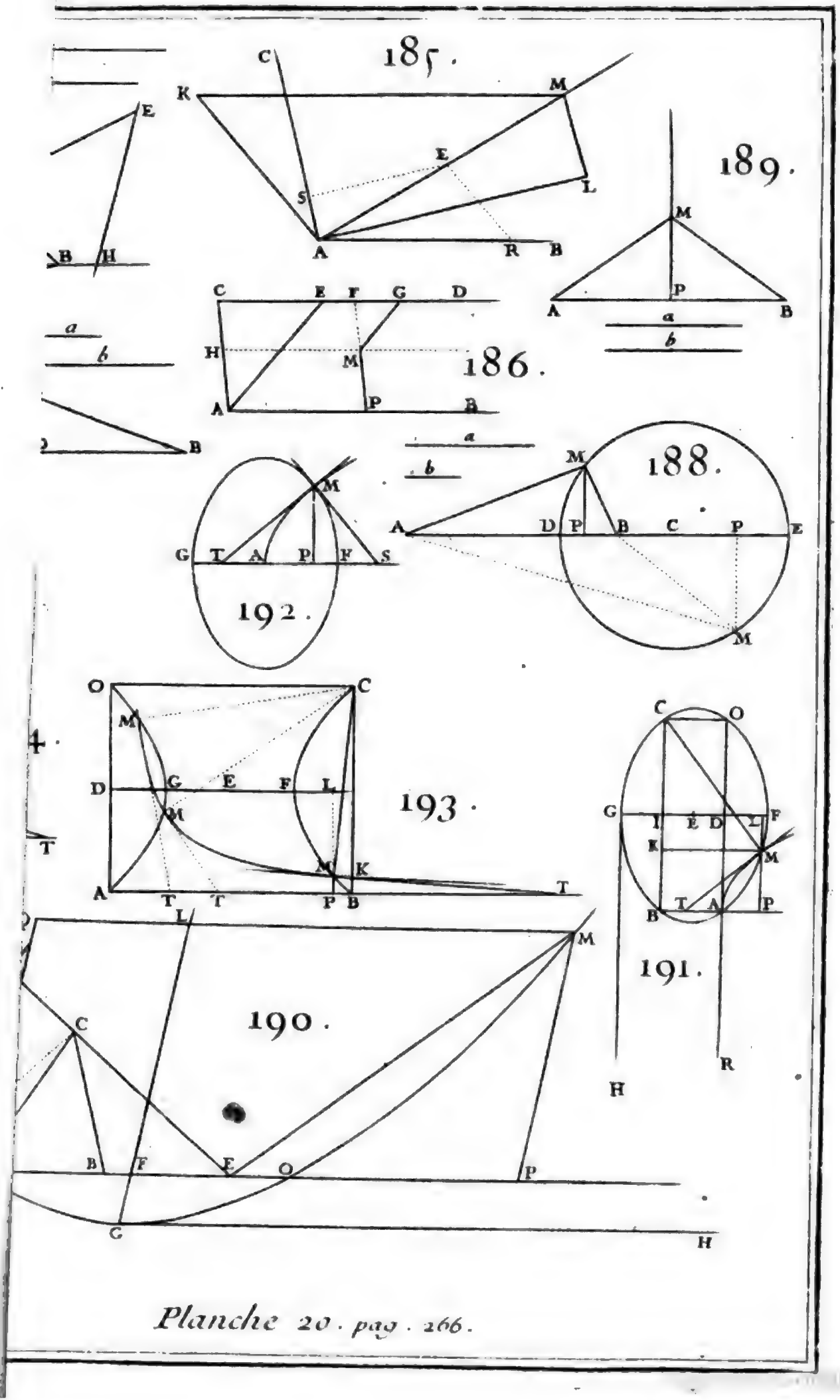
FIG. 196.

358. LA Parabole BAC étant donnée, on demande le lieu de tous les points M , tels qu'ayant mené de chacun de ces points, deux tangentes MB, MC , à cette Parabole; l'angle BMC qu'elles comprennent soit toujours égal à un angle donné.

Il peut arriver que l'angle donné BMC soit aigu, obtus, ou droit; ce qui fait trois differens cas.

Premier cas. Lorsque l'angle donné BMC est aigu.

* *Art. 160.* Ayant mené * l'axe AD de la Parabole donnée BAC , qui rencontre les tangentes MB, MC , aux points F, G , on tirera sur cet axe des points touchans B, C , & du point de concours M , les perpendiculaires BD, CE, MP . Et ayant mené MN qui fasse sur l'axe AD l'angle $FN M$ égal à l'angle FMG complément à deux droits de l'angle donné BMC , on nommera les inconnues & indéterminées AP, x ; PM, y ; AF, s ; AG, t ;



& le parametre de l'axe AD , ſçavoir, AV , a ; lequel eſt donné, puisſque la Parabole BAC eſt donnée. Cela poſé; à cauſe du triangle rectangle $FP M$, on aura le quarré $\overline{FM} = ss - 2sx + xx + yy$, lequel étant di-
viſé par $FG (s - t)$ donnera $\frac{ss - 2sx + xx + yy}{s - t} = FN$, à
cauſe des triangles ſemblables FMG , FMN ; & par-
tant $P N$ ou $FP - FN = \frac{sx + tx - st - xx - yy}{s - t}$. Je cherche
à preſent par le moyen de la Parabole donnée BAC des
valeurs de $s + t$, st , & $s - t$ par rapport à x & y , afin
qu'étant ſubſtituées, dans la valeur de $P N$, cette ligne ne
renferme plus dans ſon expreſſion d'autres inconnuës que
 x & y . Ce que je fais ainſi.

Les triangles ſemblables $FP M$, FDB ; & GPM ,
 GEC , donnent $FP (s - x) PM (y) :: FD^* (2s). BD^* (\sqrt{as})$. * *Art. 22.*
Et $GP (x - t). PM (y) :: GE (2t). CE (\sqrt{at})$ D'où je * *Art. 7.*
forme ces deux équations $ss - 2xs - \frac{4yy}{a}s + xx = 0$, &
 $st - 2xt - \frac{4yy}{a}t + xx = 0$; c'eſt à dire (en faiſant $p =$
 $2x + \frac{4yy}{a}$ pour faciliter le calcul) $ss - ps + xx = 0$, & $st -$
 $pt + xx = 0$. Je retranche la ſeconde équation de la pre-
miere, & j'ai $ss - st - ps + pt = 0$ qui étant diviſée par
 $s - t$ donne $s + t = p$; & partant $s = p - t$, & $ss = ps$
 $- ts = ps - xx$ à cauſe de la premiere équation, d'où je
tire $st = xx$. Si l'on ôte $4xx$ valeur de $4st$ de pp va-
leur de $ss + 2st + tt$, on formera enfin cette égali-
té $ss - 2st + tt = pp - 4xx$, & extrayant de part &
d'autre la racine quarrée, on aura $s - t = \sqrt{pp - 4xx}$
 $= \frac{4y\sqrt{ax + yy}}{a}$ en mettant pour p ſa valeur $2x + \frac{4yy}{a}$.

Si l'on met à preſent à la place de $s + t$, st , & $s - t$,
leurs valeurs $2x + \frac{4yy}{a}$, xx , & $\frac{4y\sqrt{ax + yy}}{a}$ dans
 $\frac{sx + tx - st - xx - yy}{s - t}$, on trouvera $PN = \frac{4xy - ay}{4\sqrt{ax + yy}}$. Or ſi
Ll ij

l'on prend sur l'axe la partie NQ égale au parametre $AV(a)$, & qu'on tire QT parallèle à PM , & qui rencontre en T la droite MN prolongée autant qu'il sera nécessaire ; il est visible que la ligne QT sera donnée, puisque dans le triangle rectangle NQT , l'angle QNT qui est égal à l'angle donné BMC est donné, & que de plus le côté NQ qui est égal au parametre AV de l'axe de la Parabole, est aussi donné. Soit donc la donnée $QT = b$, & à cause des triangles semblables NPM , NQT , on aura cette proportion, $NP \left(\frac{+xy - ay}{+ \sqrt{yy + ax}} \right) : PM(y) :: a.b$, & partant $4a \sqrt{yy + ax} = 4bx - ab$, c'est à dire en ôtant les incommensurables $yy - \frac{bb}{aa}xx + ax + \frac{bb}{2a}x - \frac{1}{16}bb = 0$, dont le lieu (qui est celui

* Art. 330. qu'on cherche) se construit * en cette sorte.

♣ 332.

Soit prise sur l'axe AD de la Parabole, la partie $AH = \frac{1}{4}a + \frac{a^2}{2bb}$ du côté de PM ; & de part & d'autre du point

H les parties HI , HK , égales chacune à $\frac{aa \sqrt{aa + bb}}{2bb}$; & soit décrit le premier axe IK qui soit à son parametre KL comme aa est à bb , une Hyperbole KM . Je dis qu'elle sera le lieu de l'équation que l'on vient de trouver.

Car $HP = x - \frac{1}{4}a - \frac{a^2}{2bb}$, & par la propriété de l'Hyperbole $\overline{HP}^2 - \overline{HK}^2 (xx - \frac{1}{2}ax - \frac{a^2}{bb}x + \frac{1}{16}aa) : \overline{PM}^2 (yy) :: IK.KL :: aa.bb$; ce qui donne, en multipliant les extrêmes & les moyens, l'équation précédente.

Il est à propos de remarquer que dans ce cas FN sera toujours moindre que FP ; puisque l'angle FNM , qu'on a pris égal au complément à deux droits de l'angle donné, est obtus. C'est pourquoi $\frac{+xy - ay}{+ \sqrt{yy + ax}}$ valeur de $FP - FN$ doit être positive; & par conséquent x doit toujours surpasser $\frac{1}{4}a$. D'où l'on voit que quoiqu'il y ait

une portion de l'Hyperbole opposée à KM qui soit renfermée dans l'angle PAV fait par la ligne AP & par la droite AV menée parallèlement à PM & du même côté, elle ne peut pas néanmoins faire partie du lieu des points M ; parce que AI étant moindre que $\frac{1}{4}a$, l'indéterminée AP qui seroit alors moindre que AI , seroit à plus forte raison moindre que $\frac{1}{4}a$.

Second cas. Lorsque l'angle donné est obtus. En supposant que les points M tombent dans l'angle PAV , & par un raisonnement semblable à celui du premier cas, on trouvera la même équation; & par conséquent la construction du lieu demeurera la même. Mais il faut observer dans ce second cas que FN sera plus grande que FP , & qu'ainsi la valeur $\frac{4xy - ay}{4\sqrt{yy + ax}}$ de $FP - FN$ deviendra negative; d'où il suit que x sera toujours moindre que $\frac{1}{4}a$, & partant que le lieu cherché sera alors la portion de l'Hyperbole qui s'étend du même côté de la Parabole, laquelle se trouve renfermée dans cet angle PAV . Et comme en supposant que les points M tombent dans l'angle DAV , on trouve encore la même équation, il s'ensuit que cette Hyperbole entière sera le lieu de tous les points cherchés M .

De-là il est évident que si une Hyperbole KM est le lieu de tous les points M lorsque l'angle donné BMC est aigu, son opposée sera le lieu de tous ces points lorsque l'angle donné sera égal au complément à deux droits de l'angle BMC , parce qu'alors les lignes données a & b qui déterminent la construction des Hyperboles demeurent les mêmes.

Troisième cas. Lorsque l'angle donné est droit. Il est FIG. 196. clair que FN est alors égale à FP , & qu'ainsi la valeur 197.

$\frac{4xy + ay}{4\sqrt{yy + ax}}$ de $FP - FN$ sera nulle ou zero. D'où l'on voit * que si l'on prend sur l'axe AD prolongé vers son * Art. 306. origine A la partie $AP = \frac{1}{4}a$, & qu'on lui mene la perpendiculaire indéfinie PM ; cette ligne qui n'est autre

que la directrice comme l'on peut voir dans les définitions de la Parabole, fera le lieu cherché.

COROLLAIRE.

FIG. 196.
197.

359. Si l'on mene le demi-second axe HO , & qu'on tire l'hypothénuse KO ; les triangles rectangles KHO , NQT seront semblables: car puisque le second axe est moyen proportionnel entre le premier IK & son parametre KL , il s'ensuit que $\overline{KH} \cdot \overline{HO} :: IK \cdot KL :: aa \cdot bb$, & qu'ainsi $KH \cdot HO :: NQ(a) \cdot QT(b)$. L'angle HKO (qui selon la définition 11. du 3. Livre, est égal à la moitié de l'angle fait par les Asymptotes de l'Hyperbole KM) sera donc égal à l'angle QNT ; c'est à dire, à l'angle donné BMC ; & on aura $NQ(a) \cdot QT(b) :: KH \left(\frac{aa \sqrt{aa+bb}}{2bb} \right) \cdot HO = \frac{a \sqrt{aa+bb}}{2b}$; & $NQ(a) \cdot QT(b) :: KH \left(\frac{aa \sqrt{aa+bb}}{2bb} \right) \cdot HO = \frac{a \sqrt{aa+bb}}{2b}$.

$$NT(\sqrt{aa+bb}) :: KH \left(\frac{aa \sqrt{aa+bb}}{2bb} \right) \cdot KO = \frac{a^3 + abb}{2bb}.$$

Or si l'on pose l'hypothénuse KO du triangle rectangle KHO fait par les deux demi-axes HK , HO , sur le premier axe IK depuis le centre H , en R & S ; il est clair * que ces deux points seront les deux foyers de l'Hyperbole KM & de son opposée; & que $RA = \frac{1}{4}a$, puisque $HR = \frac{a^3 + abb}{2bb}$ & $AH = \frac{1}{4}a + \frac{a^3}{2bb}$. D'où l'on voit que le foyer R de l'Hyperbole KM est encore le foyer * de la Parabole BAC , & que $SR \left(\frac{a^3 + abb}{bb} \right)$.

* Def. 3. 4.
s. I.

$HO \left(\frac{a \sqrt{aa+bb}}{2b} \right) :: HO \left(\frac{a \sqrt{aa+bb}}{2b} \right) \cdot AR \left(\frac{1}{4}a \right)$, puisqu'en multipliant les extrêmes & les moyens, on forme le même produit. Ce qui donne lieu à ce Theorème.

FIG. 196.

Si sur la distance SR des foyers d'une Hyperbole KM , on prend du côté de S , la partie RA troisième proportionnelle à cette distance SR , & à la moitié HO de son second axe; & qu'ayant décrit * une Parabole BAC qui ait pour foyer le point R , & pour axe la li-

* Art. 4.

gne AR dont l'origine soit en A , on tire d'un point quelconque M de l'Hyperbole KM deux tangentes MB , MC , à cette Parabole : je dis que l'angle BMC qu'elles comprennent, sera toujours égal à la moitié de l'angle fait par les Asymptotes ; & que si l'on prend le point M sur l'Hyperbole opposée, l'angle compris par les tangentes, sera toujours égal au complément à deux droits de la moitié de l'angle fait par les Asymptotes.

EXEMPLE VIII.

360. UNE ligne droite indéfinie BAP étant donnée de position sur un plan avec deux points fixes A, D , l'un sur cette ligne & l'autre au dehors ; on demande le lieu de tous les points M , dont la propriété soit telle qu'ayant mené de chacun de ces points aux deux points fixes A, D , les droites MA, MD : la ligne AM soit toujours égale à la partie ME de l'autre droite DM , prise entre le point M & le point E où elle rencontre la ligne MP . FIG. 198.

Du point donné D & du point M que l'on suppose être l'un des points cherchés, ayant mené les perpendiculaires BD, MP , sur la ligne AP , on nommera les données $AB, 2a$; $BD, 2b$; & les inconnues & indéterminées AP, x ; PM, y : & on aura $AP = PE$; puisque (*hyp.*) $AM = ME$. Or les triangles semblables EBD, EPM , donnent EB ou $AE - AB (2x - 2a)$. $BD (2b) :: EP (x)$. $PM (y)$. En multipliant donc les extrêmes & les moyens, on formera cette équation $xy - ay = bx$, qui renferme la condition marquée dans le Problème, & dont le lieu qui est * une Hyperbole équilatère entre les Asymptotes se construit ainsi. * *Art. 337.*

Soit tirée la ligne AD que l'on divisera par le milieu en C , par où l'on menera les droites CF, CG , l'une parallèle & l'autre perpendiculaire à AP : soient décrites entre les Asymptotes CF, CG , indéfiniment prolongées de part & d'autre du point C , par les points D, A , * *Art. 130.*

* Def. 16. les deux Hyperboles opposées DM , AM , qui sont *
 III. équilateres. Je dis qu'elles seront le lieu complet de tous les points cherchés M .

Car les Asymptotes CF , CG , divisent les droites AB , BD en deux parties égales aux points L , K , puisque AD est divisée par le milieu en C ; & partant lorsque les points P tombent sur AB prolongée indéfiniment du côté de B , comme l'on vient de supposer en faisant le calcul, la ligne PL ou $CH = x - a$, $HM = y - b$; & par la propriété * de l'Hyperbole $CH * HM$ ($xy - ay - bx + ab$) $= CK * KD (ab)$: ce qui donne $xy - ay = bx$.

* Art. 100.

Si l'on suppose à présent que les points P tombent sur BA indéfiniment prolongée du côté de A , ou sur la partie déterminée AB ; on trouvera toujours (en observant de faire $AP = -x$, & $PM = -y$ lorsqu'ils tombent de l'autre côté du point A & de la ligne AP) la même équation $xy - ay = bx$, tant par la condition marquée dans le Problème que par la propriété de l'Hyperbole AM ou DM . Donc &c.


COROLLAIRE.

361. D E-LA il est évident que les parties MR , MS des deux droites AM , DM , comprises entre le point M & l'une ou l'autre des Asymptotes, sont égales entr'elles. Car 1°. Lorsque l'Asymptote, comme CF , est parallèle à la ligne AP , l'angle $RS M$ est égal à l'angle AEM , & l'angle $SR M$ à l'angle MAE . 2°. Lorsque l'Asymptote, comme CG , est perpendiculaire à AP , l'angle $RS M$ sera le complément à un droit de l'angle AEM à cause du triangle rectangle SLE , & de même l'angle $SR M$ ou son opposé au sommet ARL est le complément à un droit de l'angle $EA M$ à cause du triangle rectangle RAL . Donc puisque les angles $EA M$, AEM , sont égaux, il s'ensuit que le triangle RMS sera isoscèle, & qu'ainsi les côtés MR , MS , seront égaux entr'eux.

entr'eux. Ce Corollaire nous fournit le Theorème suivant.

Si l'on mene d'un point quelconque M d'une Hyperbole équilatère, deux droites MD , MA , aux extrémités d'un de ses premiers diamètres AD , lesquelles rencontrent l'une ou l'autre Asymptote aux points R , S : je dis que les parties MR , MS , de ces deux droites seront égales entr'elles.

EXEMPLE IX.

362. **D**eux cercles EGF , BNO , dont les centres  Fig. 199. sont C , A , étant donnés, & ayant mené par un point quelconque G du cercle EGF une tangente indéfinie GNO qui coupe l'autre cercle BNO en deux points N , O , par lesquels soient tirées les tangentes NM , OM ; on demande le lieu de tous les points de concours M .

Ayant tiré MP perpendiculaire sur CA , qui passe par les centres C , A , des cercles donnés ; on menera les droites CG , AM , qui seront parallèles, puisque l'une & l'autre est perpendiculaire sur la même droite GO qu'elles rencontrent aux points G , Q ; & on nommera les données AB ou AO , a ; CE ou CF ou CG , b ; CA , c ; & les inconnues & indéterminées AP , x ; PM , y . Cela fait, les triangles rectangles semblables $AO M$, $AQ O$, donneront $AM (\sqrt{xx+yy})$. $AO (a) :: AO (a)$. $AQ = \frac{a^2}{\sqrt{xx+yy}}$. Et menant CH parallèle à

GO , qui rencontre en H , MA prolongée, s'il est nécessaire, on aura à cause des triangles rectangles semblables $M A P$, $C A H$, cette proportion : $PA (x)$. $AM (\sqrt{xx+yy}) :: AH$ ou $CG - AQ (b - \frac{a^2}{\sqrt{xx+yy}})$. $AC (c)$;

ce qui donne $b\sqrt{xx+yy} = aa + cx$, c'est à dire, en ôtant les incommensurables, l'équation $yy + \frac{bb-cc}{bb}xx$

$-\frac{2aac}{bb}x - \frac{a^4}{bb} = 0$, dont le lieu est * une Parabole, une * Art. 345.

Ellipse, ou une Hyperbole selon que $CE (b)$ est égale,

M m

plus grande, ou moindre que $CA(c)$. Voici la construction du dernier cas.

Soit prise sur la ligne AP la partie $AR = \frac{a^2c}{cc-bb}$ du côté opposé à PM ; & de part & d'autre du point R les parties RI, RK , égales chacune à $\frac{a^2b}{cc-bb}$; & soit décrite du premier axe IK qui ait pour parametre $KL = \frac{a^2a}{b}$ une Hyperbole. Je dis que la portion indéfinie DM renfermée dans l'angle PAD fait par la ligne AP & par la droite AD menée parallèlement à PM & du même côté, fera le lieu de cette équation.

Car par la propriété de l'Hyperbole, $\overline{RP}^2 - \overline{RI}^2$
 $\left(\frac{a^4 + 1a^2cx}{cc-bb} + xx\right) \overline{PM}^2 (yy) :: IK \left(\frac{2a^2b}{cc-bb}\right) \cdot KL \left(\frac{2a^2a}{b}\right)$;
 ce qui donne l'équation précédente.

Si l'on suppose à présent que les points M tombent dans l'angle KAD qui est à côté de l'angle PAD , on trouvera encore (en faisant $AP = -x$) la même équation, d'où il suit que la portion déterminée ID de l'Hyperbole IM , avec la moitié entière de l'Hyperbole qui lui est opposée sera le lieu de ces points, & qu'ainsi ces deux Hyperboles opposées composent le lieu complet de tous les points cherchés M : où l'on doit observer que la portion SIT renfermée dans le cercle BNO est inutile, puisqu'aucun des points de concours M des deux tangentes NM, OM , à ce cercle, ne peuvent tomber au dedans.

Il est à propos de remarquer que $RA \left(\frac{a^2c}{cc-bb}\right)$

$= \sqrt{KK^2 + \frac{1}{4}IK * KL}$, comme l'on voit en mettant pour ces lignes leurs valeurs analytiques; & qu'ainsi puisque le rectangle $IK * KL$ vaut le carré de la moitié du second axe, le point A sera * l'un des foyers de l'Hyperbole IM . Or puisque AI ou $AR - RI = \frac{a^2c - a^2b}{cc-bb} = \frac{a^2}{c+b}$, & $AK = AR + RK = \frac{a^2c + a^2b}{cc-bb} = \frac{a^2}{c-b}$, il s'ensuit qu'on peut abréger la construction

* Art. 74.

precedente en cette sorte.

Soient prises sur la ligne AC du côté de C , les parties AI , AK , troisièmes proportionnelles à $AF(c + b)$, $AB(a)$, & à $AE(c - b)$, $AB(a)$; & soient decrites du premier axe IK , & du foyer A^* deux Hyperboles * *Art. 76.* opposées. Il est évident qu'elles seront le lieu de tous les points cherchés M .

Lorsque $CE(b)$ est plus grande que $CA(c)$, la construction de l'Ellipse qui est le lieu des points cherchés M , se fera de la même manière que pour l'Hyperbole, en observant de prendre la partie AK de l'autre côté du point A par rapport au point C . Et enfin lorsque $CE(b) = CA(c)$, il n'y aura qu'à prendre sur la ligne AC du côté de C , la partie AI troisième proportionnelle à AF , AB , & décrire ensuite une Parabole qui ait pour foyer le point A , & pour axe la ligne IA dont l'origine soit en I . FIG. 200.

COROLLAIRE I. POUR L'ELLIPSE & LES HYPERBOLES OPPOSEES.

363. **D**E-LA il est évident que si de l'un des foyers FIG. 199. A d'une Ellipse ou de deux Hyperboles opposées, dont le premier axe est IK , on décrit un cercle quelconque BNO ; & qu'ayant pris sur cet axe les parties AE , AF , troisièmes proportionnelles à AK , AB , & à AI , & AB , (sçavoir AE du côté du point K , & AF du côté du point I) on décrive du diamètre EF un cercle EGF : il est évident, dis-je, que si l'on tire d'un point quelconque M de la Section, deux tangentes MN , MO , au cercle BNO , la ligne ON qui joint les points touchans étant prolongée, s'il est nécessaire, touchera toujours l'autre cercle EGF .

COROLLAIRE II. POUR LA PARABOLE.

364. **I**L suit encore de la resolution de ce Problème, FIG. 200. que si du foyer A d'une Parabole IM dont l'axe IA a
Mm ij

son origine en I , on décrit un cercle quelconque BNO ; & qu'ayant pris sur l'axe du côté de son origine, la partie AF troisième proportionnelle à AI , AB , on décrit un cercle AGF du diamètre AF ; & qu'enfin l'on tire d'un point quelconque M de la Parabole deux tangentes MN , MO , au cercle BNO : la ligne NO qui joint les points touchans, étant prolongée, s'il est nécessaire, touchera toujours le cercle AGF en un point G .

EXEMPLE V.

FIG. 201. 365. **UNE** ligne droite indéfinie AP étant donnée
202. 203. sur un plan, avec un point fixe F hors d'elle; trouver le lieu de tous les points M , dont la propriété soit telle qu'ayant mené de chacun de ces points une perpendiculaire MP sur AP , & au point F une ligne droite MF ; la raison de MP à MF soit toujours la même, que celle de la donnée a à la donnée b .

Ayant mené du point donné F sur la ligne AP la perpendiculaire FA , & du point M que l'on suppose être l'un des cherchés, une parallèle MQ à AP , on nommera la donnée AF , c ; & les inconnues & indéterminées AP , x ; PM , y ; qui font entr'elles un angle droit APM . Cela posé, le triangle rectangle MQF donne $\overline{MF}^2 = \overline{FQ}^2 (cc - 2cy + yy) + \overline{MQ}^2 (xx)$, & à cause de la condition marquée dans le Problème on aura $\overline{MP}^2 (yy)$. $\overline{MF}^2 (cc - 2cy + yy + xx) :: aa. bb$; d'où (en multipliant les moyens & les extrêmes) on tire cette équation $aayy - bbyy - 2aacy + aaxx + aacc = 0$, dont il s'agit maintenant de construire le lieu. Pour en venir à bout, il faut distinguer trois différens cas selon que a est plus grand, moindre, ou égal à b .

Premier cas. En divisant par $aa - bb$, on trouve cette équation $yy - \frac{aac}{aa-bb}y + \frac{aa}{aa-bb}xx + \frac{acc}{aa-bb} = 0$,

* *Art. 324.* dont le lieu est une Ellipse * que l'on construit en cette sorte.

Soit prise sur AF du côté de F , la partie $AC = \frac{aac}{aa-bb}$; FIG. 201.

& ayant mené par le point C une parallèle KH à AP , soient prises sur cette ligne de part & d'autre du point C , les parties CH , CK , égales chacune à $\sqrt{\frac{bbcc}{aa-bb}}$. Ensuite de l'axe KH qui soit à son parametre KL comme $aa-bb$ est à aa , soit décrite une Ellipse. Je dis qu'elle sera le lieu de l'équation précédente, & par conséquent de tous les points cherchés M .

Car par la propriété de l'Ellipse, $KE \times EH$ ou $\overline{CH} \times \overline{CE} = \left(\frac{bbcc}{aa-bb} - xx\right) \cdot \overline{EM} = \left(\frac{aac}{aa-bb} - \frac{2aacx}{aa-bb} + yy\right) :: KH \cdot KL :: aa-bb \cdot aa$; ce qui, en multipliant les extrêmes & les moyens, rend la même équation que ci dessus.

Puisque $\overline{CH} \cdot \overline{CB} :: KH \cdot KL :: aa-bb \cdot aa$, il s'ensuit que le demi-axe CB ou $CD = \frac{abc}{aa-bb}$; & qu'ainsi

$$DF \text{ ou } DC + CF = \frac{abc + bbc}{aa-bb} = \frac{bc}{a-b}, \text{ \& } FB \text{ ou } CB - CF = \frac{abc - bbc}{aa-bb} = \frac{bc}{a+b}.$$

Donc $DF \times FB = \frac{bbcc}{aa-bb} = \overline{CH}^2$; & partant le point F est * l'un des foyers de cette Ellipse qui * Art. 35. a pour grand axe la ligne BD . Ces remarques nous fournissent une construction beaucoup plus simple que la précédente : La voici.

Soient prises sur FA du côté de A la partie $FB = \frac{bc}{a+b}$, & du côté opposé la partie $FD = \frac{bc}{a-b}$. Ayant pris DG égal à BF du côté de F ; soit décrite des foyers F, G , & de l'axe BD * une Ellipse; il est évident qu'elle * Art. 36. satisfera à la question.

Second cas. On aura dans ce cas $yy + \frac{2aac}{bb-aa}y - \frac{aa}{bb-aa}xx - \frac{aac}{bb-aa} = 0$, parce que a est moindre que b . Le lieu de cette équation sera deux Hyperboles opposées, que l'on pourra construire selon l'article 332. (Liv. 7). Après

M m iij

avoir fait les mêmes remarques, que dans le cas précédent, on trouvera cette construction.

- FIG. 202. Soient prises sur FA du côté du point A les parties $FB = \frac{bc}{b+a}$, $FD = \frac{bc}{b-a}$. Ayant pris DG égal à BF du côté opposé au point F , soient * décrites des foyers F, G , & du premier axe BD , deux Hyperboles opposées BM, DM . Elles seront le lieu de tous les points cherchés M .
- * Art. 76.

- FIG. 203. *Troisième cas.* L'équation générale $aayy - bbyy - 2aacy + aaxx + aacc = 0$ le changeant en cette autre $xx - 2cy + cc = 0$, parce que $a = b$, son lieu est une Parabole qu'il est facile de construire selon l'article 310. (Liv. 7.) mais on voit tout d'un coup & sans avoir besoin d'aucun calcul, que si l'on décrit une Parabole qui ait pour directrice la ligne AP , & pour foyer le point F , selon qu'il est enseigné dans la définition première du premier Livre, elle sera le lieu requis.

COROLLAIRE I.

366. IL est clair dans le premier cas, que $CF \left(\frac{bbc}{aa-bb} \right) : CB \left(\frac{abc}{aa-bb} \right) :: CB \left(\frac{abc}{aa-bb} \right) : CA \left(\frac{aac}{aa-bb} \right) :: a. b$, & l'on trouve la même chose dans le second cas : ce qui donne lieu à ce Theorème.

- FIG. 201. Si dans une Ellipse ou deux Hyperboles opposées qui ont pour centre le point C , pour foyers les deux points F, G , & pour premier axe la ligne BD , on prend CA troisième proportionnelle à CF, CB , du côté du foyer F , & qu'on mene la droite indéfinie AP perpendiculaire sur BD : je dis que si d'un point quelconque M de la Section, l'on tire sur AP la perpendiculaire MP , & au foyer F la droite MF ; la raison de MP à MF , sera toujours la même que du premier axe BD à la distance FG des foyers.
- 202.

Dans les Corollaires suivans cette ligne droite indéfinie AP s'appellera *Directrice* à l'égard de ces deux

Sections ; aussi-bien qu'à l'égard de la Parabole. D'où l'on voit qu'il est facile de décrire une Section conique qui ait pour foyer un point donné F , pour directrice une ligne donnée de position AP , & qui passe par un point donné M : car tirant au foyer F la ligne MF , & sur la directrice AP la perpendiculaire MP , & nommant les données MP , a ; MF , b ; il n'y aura qu'à décrire le lieu des points M tels que MP soit toujours à MF comme a est à b .

COROLLAIRE II.

367. SI l'on joint deux points quelconques M , N , d'une Section conique, par une ligne droite qui rencontre la directrice en C , & que du foyer F , on tire les droites FM , FN , FC : je dis que la ligne FC coupe en deux parties égales l'angle NFH complement à deux droits de l'angle NFM , lorsque les points M , N , tombent sur une Parabole, Ellipse, ou Hyperbole ; & l'angle NFM , lorsqu'ils tombent sur deux Hyperboles opposées. Fig. 204.
205.

Car tirant les perpendiculaires MP , NQ , sur la directrice, & la ligne ND parallèle à MF ; les triangles semblables MPC , NQC , & MFC , NDC , donnent MP . NQ :: MC . NC :: MF . ND . Et partant MP . MF :: NQ . ND . Or par la propriété de la Section conique qui a pour directrice la ligne PQ , & pour foyer le point F , on aura MP . MF :: NQ . NF . Les lignes ND , NF , seront donc égales entr'elles ; c'est pourquoi dans le premier cas l'angle NDF ou CFH fera égal à l'angle CFN , & dans le second l'angle FDN ou CFM fera égal à l'angle CFN . Ce qu'il falloit prouver.

COROLLAIRE III.

368. DE-LA on voit comment on peut décrire une Parabole, Ellipse, ou Hyperbole qui passe par trois Fig. 204.

points donnés M, N, O , & qui ait pour foyer le point donné F .

Soient menées par le foyer F , les droites FC, FE , qui divisent par le milieu les angles NFH, NFK , compléments à deux droits des angles donnés MFN, OFN ; & par les points C, E , où elles rencontrent les lignes MN, ON , qui joignent les points donnés, soit tirée une ligne droite indéfinie CE . Soit décrite une Section conique qui ait pour directrice la ligne CE , pour foyer le point F , & qui passe par le point M : il est clair selon le Corollaire précédent qu'elle passera aussi par les deux autres points N, O .

COROLLAIRE IV.

FIG. 205. 369. ON tire encore du Corollaire second une manière de décrire deux Hyperboles opposées qui aient pour foyer le point F ; & dont l'une d'elles passe par deux points donnés M, O , & l'autre par un point donné N .

Soit menée par le point F la ligne FE qui divise par le milieu l'angle HFO complément à deux droits de l'angle MFO formé par les droites FM, FO , tirées du point F aux deux points M, O , qui doivent se trouver dans la même Hyperbole; & soit encore menée par le même point F la ligne FC , qui divise en deux parties égales l'angle MFN formé par les droites FM, FN , tirées du point F aux deux points M, N , qui doivent tomber sur les deux Hyperboles opposées. Par les points E, C , où les lignes FE, FC , rencontrent les droites MO, MN , qui joignent les points donnés, soit tirée une ligne droite indéfinie EC . Soient enfin décrites deux Hyperboles opposées, qui aient pour foyer le point F , pour directrice la ligne EC , & dont l'une d'elles passe par le point M : il est évident qu'elles satisfont à la question.

COROL. V.

COROLLAIRE. V.

370. **L**ES mêmes choses étant posées que dans le Fig. 204. Corollaire second ; il est visible que l'angle MFN différence de l'angle CFM & de son complément à deux droits CFH ou CFN , diminuë à mesure que le point N approche du point M ; de sorte qu'il s'évanouit tout-à-fait , lorsque le point N tombe sur le point M . L'angle CFM sera donc égal alors à son complément à deux droits , & par conséquent il sera droit. Or comme la ligne MN devient alors la tangente MT , puisqu'elle passe * par deux points infiniment proches de la courbe ; * Art. 188. on voit naître une maniere generale & toute nouvelle de mener d'un point donné M sur une Section conique , une tangente MT , un foyer F avec l'axe qui passe par ce foyer étant donnés.

Car ayant trouvé la directrice comme il est enseigné dans le Corollaire second , on menera du point donné M au foyer F la droite MF , sur laquelle on tirera la perpendiculaire FT qui rencontre la directrice en T , par où & par le point donné M on tirera la tangente cherchée MT .

EXEMPLE XI.

371. **D**EUx angles KAM , KBM , mobiles autour Fig. 206. des points fixes A , B , étant donnés sur un plan , avec une ligne droite indéfinie FK qui ne passe par aucun de ces points ; soit imaginé le point de concours K des deux côtés AK , BK , se mouvoir le long de la droite FK , & soit proposé de trouver la nature de la ligne courbe que décrit dans ce mouvement le concours M des deux autres côtés AM , BM , prolongés lorsqu'il est nécessaire de l'autre côté des points A , B .

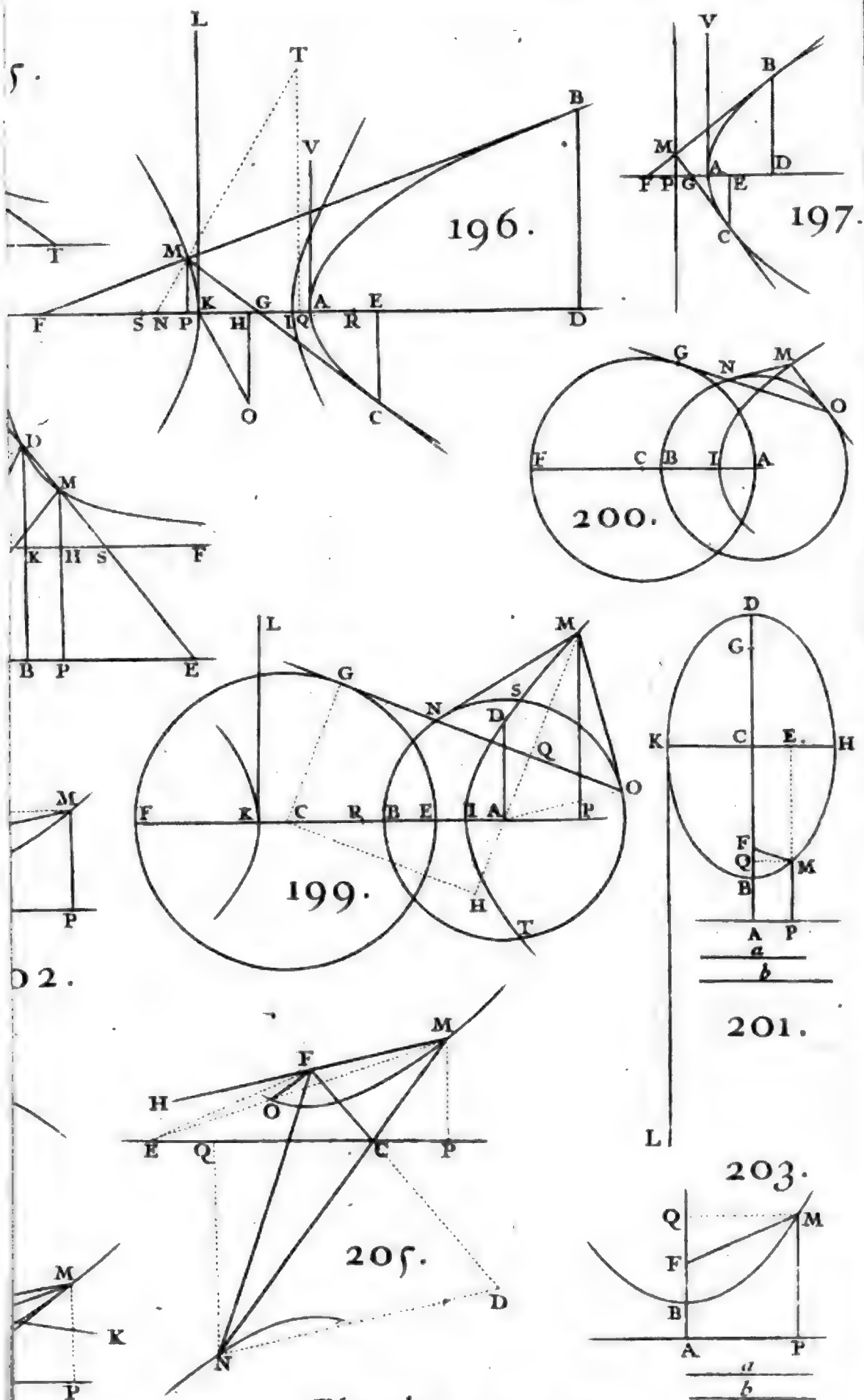
Sur AB , comme corde , je décris de l'autre côté du point M , un arc de cercle capable d'un angle BDA qui vaille quatre droits moins les deux angles donnés KAM , KBM ; & ayant achevé le cercle entier dont

N n

cet arc fait partie, il peut arriver que la droite indéfinie FK tombe toute entière au dehors de ce cercle, ou qu'elle passe au dedans, ou enfin qu'elle le touche ce qui fait trois differens cas que j'explique en particulier.

Premier cas. Du centre C du cercle $BDAE$ je mene sur FK , la perpendiculaire CF qui le rencontre aux points D, E ; & je fais passer par le point D (plus proche de la ligne FK que l'autre point E) les deux côtés DA, DB , des deux angles DAP, DBQ , égaux aux angles KAM, KBM , lesquels côtés étant prolongés vers D rencontrent la ligne FK , aux points G, H . Or par la construction l'angle BDA plus les deux angles DAP, DBQ , vaut quatre droits; & comme le même angle BDA plus les deux angles DAB, DBA , vaut deux droits; il s'ensuit que les angles BAP, BAQ , valent deux droits, & qu'ainsi les lignes AP, BQ , sont paralleles entr'elles. Cela posé.

Soit mené du point K sur les deux côtés AD, BD , les perpendiculaires KR, KS ; & des points A, M , sur les deux autres côtés BQ, AP , les perpendiculaires AI, MP , qui rencontrent BQ , aux points I, Q . Soient les données $FE = a, FD = b, BI = c, AI = d, FG = g, FH = h, DG = m, DH = n$; & les inconnues $FK = z, AP = x, PM = y$; & à cause des triangles rectangles semblables, GDF, GKR , on aura ces deux proportions: $GD(m). GF(g) :: GK(z-g). GR = \frac{gz-gg}{m}$. Et $GD(m). DF(b) :: GK(z-g). KR = \frac{bz-bg}{m}$. Or les triangles rectangles semblables GDF, EDA , donnent aussi $GD(m). DF(b) :: ED(a-b). AD = \frac{ab-bb}{m}$, & partant $AD + DG$ ou $AG = \frac{ab-bb+mm}{m}$, & $AG + GR$ ou $AR = \frac{ab-bb+mm+gz-gg}{m} = \frac{ab+gz}{m}$; parce que $mm=bb + gg$ à cause du triangle rectangle DFG . Mais les triangles rectangles ARK, APM sont semblables



car retranchant des angles égaux KAM , DAP le même angle KAP , les restes KAR , PAM , seront égaux ; & par conséquent $AR \left(\frac{ab+gz}{m} \right)$. $RK \left(\frac{bx-bz}{m} \right) :: AP(x)$. $PM(y)$, d'où l'on tire $z = \frac{aby+bgx}{bx-gy}$.

Maintenant les triangles rectangles semblables HDF , HKS donnent $HS = \frac{bz+hb}{n}$, $KS = \frac{bz+bb}{n}$; & les triangles rectangles semblables HFD , EBD , donnent $DH(n)$. $DF(b) :: DE(a-b)$. $DB = \frac{ab-bb}{n}$. Et partant $BD+DH$ ou $BH = \frac{ab-bb+nn}{n}$, & $BH-HS$ ou $BS = \frac{ab-bb+nn-hz-bb}{n} = \frac{ab-hz}{n}$, parce que $nn = bb + hb$ à cause du triangle rectangle DPH . Or les triangles rectangles BSK , BQM , sont semblables ; car retranchant des angles égaux DBQ , KBM , le même angle DBM , les restes KBS , MBQ , seront égaux ; & par conséquent $BS \left(\frac{ab-hz}{n} \right)$. $SK \left(\frac{bz+bb}{n} \right) :: BQ(x-c)$. $QM(y+d)$. D'où l'on tire $z = \frac{aby-bhx+bcx+abd}{bx+by-bc+bd}$.

Comparant cette dernière valeur de z avec la précédente , multipliant en croix , en faisant pour abréger $GH(g+b) = f$, on arrive enfin en divisant par abf à cette équation.

$$yy + dy + \frac{b}{n}xx - \frac{bc}{n}x = 0.$$

$$- \frac{bc}{f} \quad - \frac{bd}{f}$$

$$+ \frac{cgb}{af} \quad + \frac{dgh}{af}$$

dont le lieu que l'on pourra construire selon l'article 324. (Liv. 7.) sera une Ellipse , parce que le terme $\frac{b}{n}xx$ sera toujours précédé dans ce premier cas du signe $+$, en quelque situation que se puissent trouver les points A , B , K .

Second cas. Après avoir nommé les lignes par les Fig. 207.

N n ij.

mêmes lettres que dans le premier cas, & fait les mêmes raisonnemens ; on arrivera à cette équation.

$$yy + dy - \frac{b}{a}xx + \frac{bc}{a}x = 0$$

$$-\frac{\frac{bc}{f}}{\frac{cgb}{af}} \quad -\frac{\frac{bd}{f}}{\frac{dgb}{af}}$$

qui ne diffère de la précédente que dans quelques signes, & dont le lieu que l'on pourra construire selon l'article 332. (Liv. 7.) sera toujours deux Hyperboles opposées, parce que le terme $\frac{b}{a}xx$ sera toujours précédé du signe — dans ce second cas.

Comme le plan xy ne se rencontre point dans les deux équations précédentes, & que l'angle APM est droit ; on connoît d'abord que l'un des axes de l'Ellipse dans le premier cas, & des Hyperboles opposées dans le second doit être parallèle aux lignes AP , BQ ; & qu'il a avec son parametre la même raison que $EF(a)$ à $FD(b)$, parce que la fraction $\frac{b}{a}$ qui multiplie le quarré xx exprime ce rapport.

Lorsque le point K en parcourant la ligne indéfinie KF arrive au point O où cette ligne rencontre la circonférence, il est clair que les côtés AM , BM , qui décrivent par leur point de concours M l'Hyperbole BAM deviennent parallèles entr'eux ; qu'ils se coupent vers le côté opposé, pendant que le point K parcourt la partie OL de la ligne KF renfermée dans la circonférence ; qu'ils deviennent encore parallèles, lorsque le point K tombe en L , après quoi ils se rencontrent de nouveau vers le même côté. D'où l'on voit que le point M décrit l'Hyperbole BAM , pendant que le point K parcourt les deux parties indéfinies de la droite KF qui tombent de part & d'autre de la circonférence ; & qu'il décrit son opposée, pendant que le point K parcourt la partie OL renfermée dans la circonférence.

FIG. 208. *Troisième cas.* Comme dans ce troisième cas la droite

indéfinie FK touche la circonférence du cercle $BDAE$ en quelque point F , il est clair que le point D des deux autres cas se confond ici avec le point F , & qu'ainsi les triangles DFG , DFH , s'évanouissent : c'est pourquoi on se servira en leur place des triangles DAE , DBE , de la manière qui suit.

Soient les données $AE = a$, $EB = b$, $EF = m$, $AF = g$, $BF = h$, $BI = c$, $AI = d$; & les inconnues $FK = z$, $AP = x$, $PM = y$. Les triangles rectangles FKR , EFA sont semblables ; car l'angle KFR ou son opposé au sommet TFA fait par la tangente FT & la corde FA , a pour mesure la moitié de l'arc AF ; de même que l'angle FEA : Et partant $FE(m).EA(a) :: KF(z).FR = \frac{az}{m}$. Et $EF(m).FA(g) :: FK(z).KR = \frac{gz}{m}$. Or les triangles rectangles semblables ARK , APM , donnent AR ou $AF + FR(\frac{az+gm}{m})$. $RK(\frac{gz}{m}) :: AP(x).PM(y)$; d'où l'on tire $z = \frac{gmy}{gx-a}$. On trouvera de même, à cause des triangles rectangles semblables EFB , FKS , que $FS = \frac{bz}{m}$, & $KS = \frac{hz}{m}$; & à cause des triangles rectangles semblables BSK , BQM , que BS ou $BF - FS(\frac{bm-bz}{m})$. $SK(\frac{hz}{m}) :: BQ(x-c).QM(y+d)$; ce qui donne $z = \frac{bmy+bm d}{bx-cb+bd+by}$.

Comparant ces deux valeurs de z , multipliant en croix, & mettant par ordre les termes, on trouve cette équation $yy + dy - \frac{cgb}{ah+bg}y - \frac{dgb}{ah+bg}x = 0$, dont le lieu sera toujours une Parabole que l'on peut construire selon l'article 310. (Liv. 7.) & qui aura son axe parallele aux droites AP , BQ .

Il est donc évident 1°. Que le lieu de tous les points cherchés M sera toujours une Section conique, dont l'axe ou l'un des axes sera parallele aux lignes AP , BQ ; & en

particulier qu'il sera une Ellipse dans le premier cas, deux Hyperboles opposées dans le second, & une Parabole dans le troisième; & que dans le premier & le second cas, l'axe qui est parallèle à AP , aura avec son parametre, la même raison que EF à FD . 1°. Que dans le premier & le troisième cas les deux points fixes A, B , autour desquels tournent les angles mobiles KAM, KBM tomberont toujours du même côté de la ligne FK , au lieu que dans le second ils peuvent tomber non seulement du même côté de cette ligne, mais encore de part & d'autre; parce que la circonférence du cercle $ADBE$ sur laquelle ils sont situés, est coupée alors en deux portions par la ligne FK .

REMARQUE I.

FIG. 206. 372. 1°. **U**N E ligne quelconque qui passe par l'un des points fixes A ou B , comme AM , étant donnée, on pourra toujours trouver sur cette ligne le point M où elle rencontre la Section qui est le lieu requis, en cette sorte. Ayant mené la droite AK qui fasse avec AM l'angle MAK égal à l'angle donné qui doit tourner autour du point fixe A , on menera du point K où elle rencontre la droite FK , par le point fixe B , l'angle KBM égal à l'autre angle donné, qui doit tourner autour de l'autre point fixe B ; & le point M où le côté BM de cet angle rencontre la ligne AM , sera celui qu'on cherche. 2°. Lorsque le point K en parcourant la ligne FK , se trouve tellement situé que le côté AM de l'angle KAM tombe sur la ligne AB ; il est visible que le point de concours M des deux côtés AM, BM , tombe alors sur le point B , & qu'ainsi le lieu des points M passe par le point fixe B ; on prouvera de même qu'il passe par le point A .

FIG. 206. De-là on voit que pour décrire la Section conique qui est le lieu des points cherchés M , sans avoir besoin des équations précédentes, il n'y a qu'à mener comme dans l'exemple les droites AP, AI ; sur lesquelles ayant

trouvé, selon cette remarque, les points où elles rencontrent la Section, & achevé le rectangle qui a pour côtés ces deux lignes, il n'y aura qu'à décrire * autour de ce rectangle, l'Ellipse ou les deux Hyperboles opposées (selon que PK tombe au dehors ou au dedans du cercle), dont l'axe qui est parallèle à AP soit à son conjugué, comme le carré de EF est au carré de DF . Si la Section est une Parabole (ce qui arrive lorsque la ligne KP touche le cercle BD); on trouvera sur la ligne AI le point où elle rencontre la Section, & on décrira selon l'article 170. (Liv. 4.) une Parabole qui passe par ce point, & par les deux autres donnés A, B ; & dont les diamètres soient parallèles aux lignes AP, BQ . * Art. 176.
* 178.

REMARQUE II.

373 **LORSQUE** le point K en parcourant la ligne FK est tellement situé que le côté AM de l'angle KAM tombe sur AB , il est clair non-seulement que le point M tombe en B ; mais aussi que le côté BM de l'angle KBM devient tangente * en B de la ligne courbe qui est le lieu du point M , puisque le point M peut être regardé alors comme étant infiniment près du point B . D'où il suit que pour mener une tangente de ce lieu en B , il n'y a qu'à mener par le point A une ligne droite AC qui fasse avec BA un angle BAC égal à l'angle donné KAM , & tirer ensuite une ligne BD , qui fasse avec BC l'angle CBD égal à l'autre angle donné KBM ; car le côté BM de cet angle, qui devient BD , touchera la Section en B . Il en est de même de l'autre point fixe A . FIG. 209.

De-là on tire encore une manière très-facile de décrire la Section conique qui est le lieu de tous les points M sans avoir besoin des équations précédentes, ni même d'aucun calcul. Ayant mené par le point fixe B une tangente BD , & par l'autre point fixe A une parallèle AE à cette tangente, on trouvera * sur cette ligne le point E où elle rencontre la Section, & l'ayant divisée par le milieu en H on tirera BH , sur laquelle on cherchera * FIG. 209.
* Art. 188.
* Art. 372.
* Art. 372.

* Art. 162. 161. aussi le point G où elle rencontre la Section. Cela fait, on décrira * du diamètre BG & de l'ordonnée HA ou HE , une Section conique, qui sera celle qu'on demande. Car il est visible que la ligne BG qui divise par le milieu en H la ligne AE terminée par la Section & parallèle à la tangente en B , en sera un diamètre qui aura pour ordonnée la ligne AH . Où l'on doit remarquer que lorsque le point H tombe entre les points B, G , la Section est une Ellipse ; que lorsqu'il tombe de part ou d'autre de ces deux points, ce sont deux Hyperboles opposées ; & qu'enfin lorsque la ligne BG est infinie, la Section est une Parabole.

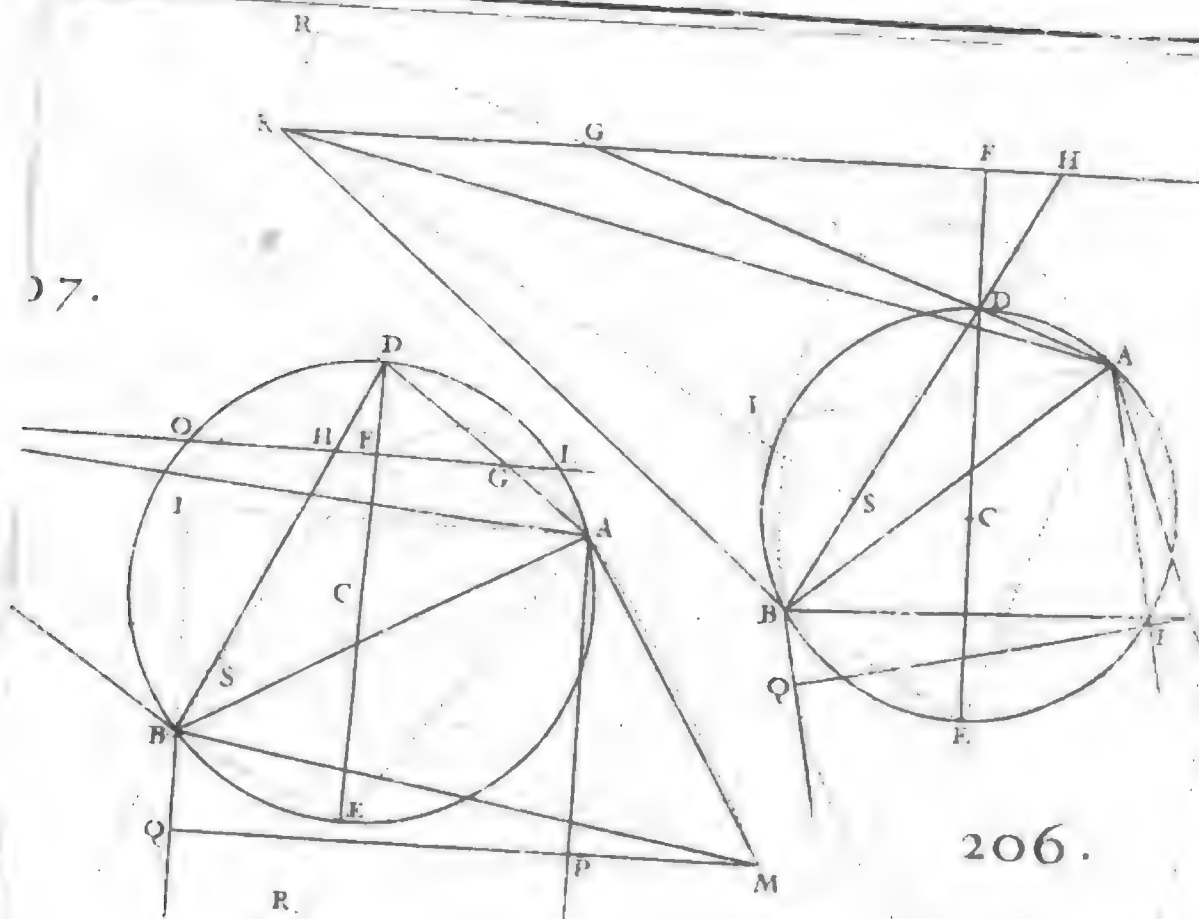
COROLLAIRE I.

FIG. 210. 374. C'EST exemple nous fournit le moyen de faire passer par quatre points donnés A, B, H, M , une Section conique d'une espèce déterminée.

Car 1°. Soit la Section conique une Ellipse ; dont le grand axe soit à son paramètre, en la raison donnée de a à b . Je forme le triangle ABH , en joignant trois des points donnés par des lignes droites ; & du quatrième point M , je fais passer par les points A, B , les angles MAK, MBK , égaux aux angles GAH, RBA , compléments à deux droits des angles HAB, HBA . Je décris sur AB comme corde de l'autre côté du point M un arc de cercle $BD A$ capable d'un angle qui vaille quatre droits moins les deux angles KAM, KBM ; & du centre C de cet arc, je décris un autre cercle dont le rayon CF soit au rayon CD du premier, comme $a + b$ est à $a - b$; & du point de concours K des deux côtés AK, BK , des angles MAK, MBK , je tire une tangente KF à ce dernier cercle. Maintenant je dis que si l'on fait mouvoir le point K le long de la droite indéfinie FK ; le point de concours M des deux autres côtés AM, BM , prolongés lorsqu'il sera nécessaire de l'autre côté des points A, B , décrira dans ce mouvement l'Ellipse qu'on demande. Car il est évident selon

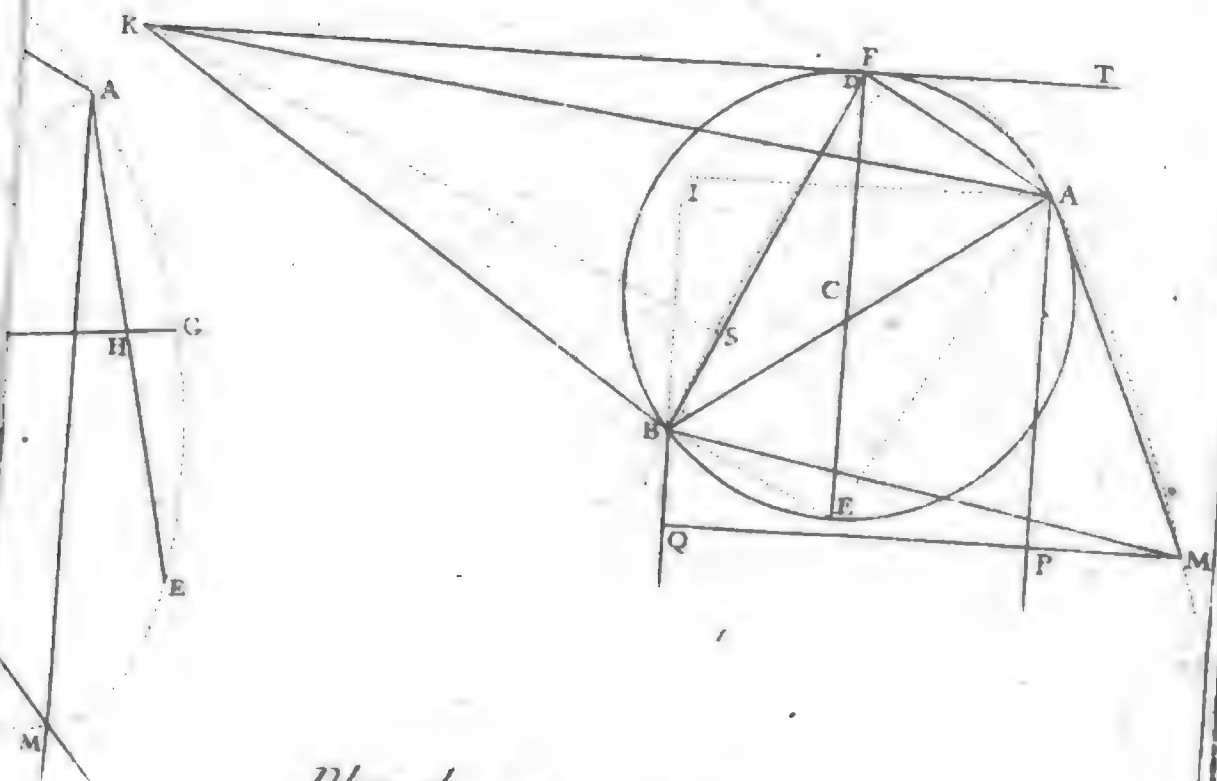
ce

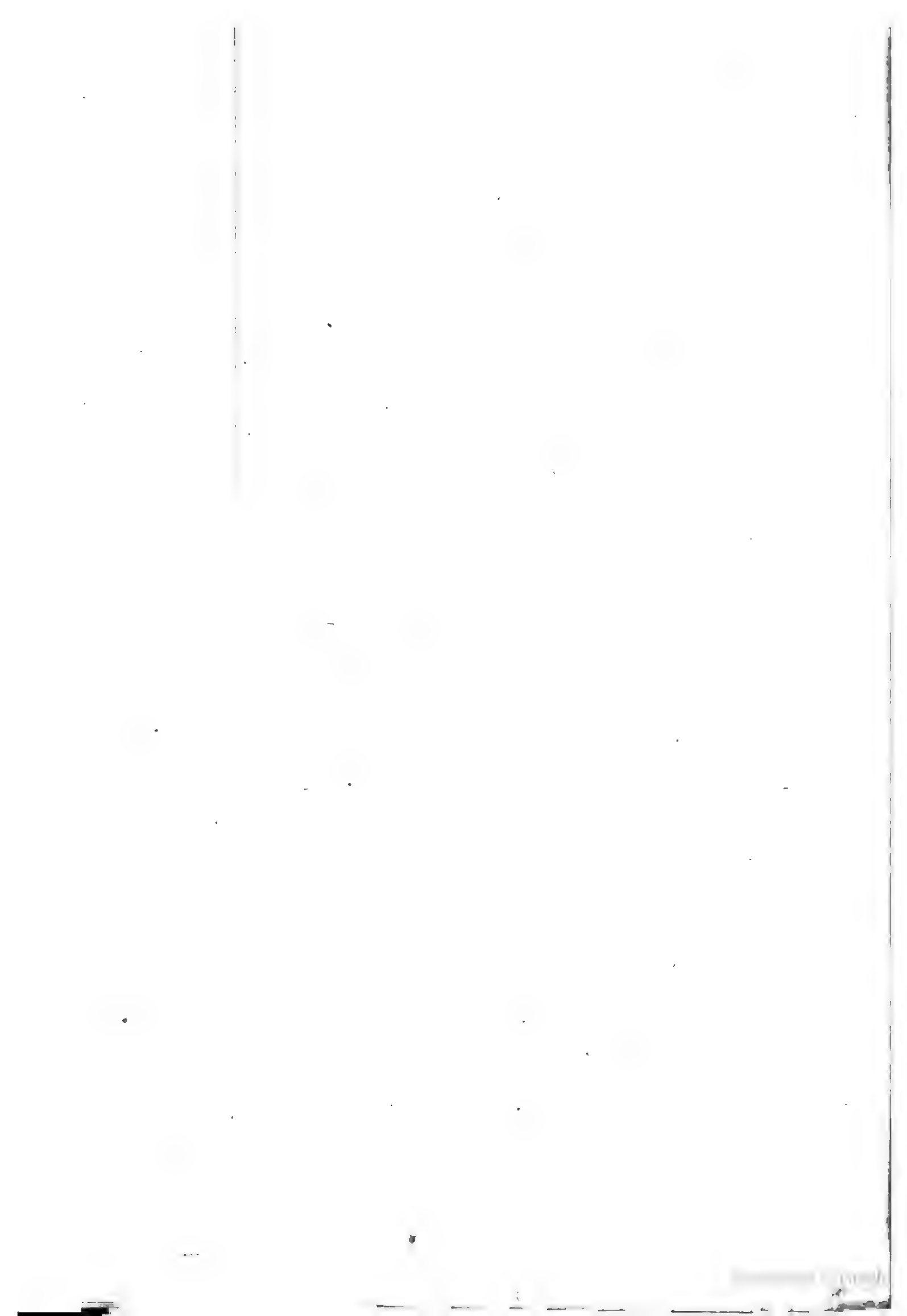
207.



206.

208.





ce qu'on a dit dans le premier cas de l'exemple, que le lieu des points M sera une Ellipse, dont le grand axe sera à son parametre comme $EF(a)$ à $DF(b)$; & de plus qu'elle passera par les points A, M, B, H , puis- que le point K étant en G , le côté AM tombera sur AH , & le côté BM sur BR .

2°. Lorsque c'est une Hyperbole ou deux Hyperboles opposées qu'il est question de décrire par quatre points donnés A, B, H, M , & dont le grand axe soit à son parametre en la raison donnée de a à b ; la construction demeure la même, excepté que le rayon CF du cercle concentrique au cercle $BDAE$, doit être au rayon CD , comme $a - b$ est à $a + b$.

3°. Lorsqu'il s'agit de décrire une Parabole par quatre points donnés A, B, H, M . Ayant décrit comme dans le premier cas le cercle $BDAE$, on menera du point de concours K une tangente à ce cercle, qui sera la droite indéfinie sur laquelle faisant mouvoir le point K , l'autre point de concours M décrira la Parabole qu'on demande.

Comme l'on peut mener d'un même point deux tangentes à un cercle, il s'ensuit qu'on peut décrire deux différentes Sections coniques qui satisfont également lorsque le Problème est possible; car lorsque le point K tombe au dedans du cercle qui a pour rayon CF , il est visible que le Problème est impossible.

On pourra décrire la Section conique par le moyen de ses axes en se servant de l'article 372. ou par le moyen d'un de ses diametres & d'une ordonnée à ce diametre, en se servant de l'article 373.

COROLLAIRE II.

375. **O**N tire encore de cet exemple, une nouvelle manière de décrire une Section conique qui passe par cinq points donnés A, B, H, M, N . Car ayant joint trois quelconques de ces points A, B, H , par des

FIG. XII.

Oo

lignes droites, on fera passer par les autres points M, N , & par les deux points fixes A, B , les angles MAK, NAS , égaux chacun à l'angle HAG complément à deux droits de l'angle HAB , & les angles MBK, NBS égaux chacun à l'angle ABR complément à deux droits de l'angle ABH ; & on tirera par les points de concours K, S , une ligne droite indéfinie S, K , sur laquelle faisant mouvoir le point K , il est clair que le point de concours M décrira dans ce mouvement la Section conique qu'on demande; puisqu'elle passera par les cinq points donnés A, B, H, M, N .



LIVRE NEUVIÈME,

De la construction des Egalités.

PROPOSITION I.

Problème.

376. **C**ONSTRUIRE toute égalité donnée, dans laquelle l'inconnue ne se trouve qu'au premier degré.

Soit en premier lieu l'inconnue x égale à une ou à plusieurs fractions simples, telles que $\frac{a^b}{c}$, ou $\frac{a^b e}{cf}$, ou $\frac{a^b e h}{cf g}$ &c. Ayant fait $c. b :: a. l$, il est clair que cette quatrième proportionnelle $l = \frac{a^b}{c}$; & si l'on fait $f. l :: e. m$, l'on

« a une fraction simple, par exemple, telle que $\frac{a^b}{c}$ - &c.

aura $m = \frac{el}{f} = \frac{a^b e}{cf}$; & faisant enfin $g. m :: h. n$, il vient $n = \frac{mh}{g} = \frac{a^b e h}{cf g}$ en mettant pour m sa valeur $\frac{a^b e}{cf}$. De sorte qu'on aura l'inconnue x égale à l , ou à m , ou à n , &c. selon que x sera égale à $\frac{a^b}{c}$, ou à $\frac{a^b e}{cf}$, ou à $\frac{a^b e h}{cf g}$ &c. Or il est visible qu'en augmentant le nombre des proportions, autant qu'il sera nécessaire, on trouvera toujours une ligne droite égale à une fraction simple donnée, tel que puisse être le nombre des dimensions de son numérateur. D'où l'on voit que l'on pourra toujours trouver une ligne x égale à une quantité composée de plusieurs fractions simples; car ayant trouvé en particulier des lignes droites égales à chacune de ces fractions, il n'y aura qu'à les ajouter, ou retrancher selon qu'il sera marqué par les signes $+$ & $-$. Qu'il faille, par exemple, trouver une ligne $x = a + \frac{a^b}{c} + \frac{a^b e}{cf} - \frac{a^b e h}{cf g}$, on ajoutera les deux lignes $b = \frac{a^b}{c}$ & $l = \frac{a^b e}{cf}$ à la ligne a pour en composer une seule, de laquelle ayant retran-

O o ij

ché la ligne $m = \frac{ace}{b}$, le reste sera la valeur cherchée de l'inconnue x , c'est à dire qu'on aura $x = a + b + l - m$.

Soit en second lieu l'inconnue x égale à une ou à plusieurs fractions composées, c'est à dire, dont les denominateurs ayent plusieurs termes. On cherchera d'abord, comme l'on vient d'enseigner ci-dessus, une ligne égale au dénominateur divisé par une ligne arbitraire, lorsque chacun de ses termes n'a que deux dimensions, par un plan lorsqu'ils en ont trois, par un solide lorsqu'ils en ont quatre, &c ; ce qui réunira tous les termes du dénominateur en un seul, lequel étant substitué en leur place, changera la fraction composée en une ou en plusieurs simples selon que le numérateur est composé d'un ou de plusieurs termes ; & ayant trouvé comme ci-dessus une ligne qui leur soit égale, elle sera celle qu'on cherche. Ceci s'éclaircira par les exemples qui suivent.

On demande une ligne $x = \frac{ace - bce}{bb + af}$, je cherche d'abord une ligne $m = f + \frac{bb}{a}$, c'est à dire égale au dénominateur $af + bb$ divisé par la ligne a , ce qui donne $bb + af = am$, & ayant trouvé ensuite une ligne $n = \frac{ace - bce}{am} = \frac{ce}{m} - \frac{bce}{am}$; il est clair que la ligne cherchée $x = n$. De même si l'on demandoit une ligne $x = \frac{a^3b + aacc - abcf}{aaf + cc f + bff}$, on trouveroit une ligne $m = a + \frac{cc}{a} + \frac{bf}{a}$, c'est à dire égale au dénominateur $aaf + cc f + bff$ divisé par le plan af ; ce qui donne $afm = aaf + cc f + bff$, & ensuite une autre ligne $= \frac{a^3b + aacc - abcf}{afm} = \frac{a^3b}{fm} + \frac{acc}{fm} - \frac{bc}{m} = x$. Il en est ainsi de tous les autres exemples que chacun se peut former à plaisir.

Il est inutile d'avertir que si l'on demandoit une ligne x égale à une ou à plusieurs fractions tant simples que

composées ; il faudroit chercher en particulier des lignes égales à chacune de ces fractions , pour les ajouter ensuite ou les retrancher les unes des autres , selon que les signes $+$ ou $-$ le feroient connoître.

COROLLAIRE I.

377. IL est facile par le moyen de cette Proposition de trouver 1°. Une fraction simple $\frac{x}{a}$ ou $\frac{a}{x}$, dont le dénominateur ou le numérateur a soit donné , égale à une ou à plusieurs fractions simples ou composées ; car il n'y aura qu'à trouver une ligne x égale à la ligne a multipliée ou divisée par ces fractions. Qu'il faille trouver par exemple , une fraction $\frac{x}{a} = \frac{cc+ff}{af+cf} + \frac{aa}{gg}$, il est visible qu'il n'y aura qu'à trouver une ligne $x = \frac{acc+aff}{af+cf} + \frac{a^3}{gg}$. 2°. Un plan ax , dont l'un des côtés a est donné , égal à un ou à plusieurs plans si composé qu'ils puissent être ; car il ne faut pour cela que trouver une ligne x égale à tous ces plans divisés par a . 3°. Un solide $aa x$ ou abx , dont deux des côtés a, a , ou a, b , sont donnés , égal à plusieurs solides ; puisqu'il ne faut pour cela que trouver une ligne x égale à tous ces solides divisés par le carré aa ou par le plan ab . 4°. Un sursolide $a^3 x$ ou $abcx$ dont trois côtés a, a, a , ou a, b, c , sont donnés , égal à plusieurs sursolides ; puisqu'il ne faut encore pour cela que trouver une ligne x égale à tous ces sursolides divisés par le cube a^3 ou par le solide abc . Et il en est de même de plusieurs produits de cinq dimensions , de six &c. que l'on peut toujours réduire en un seul dont tous les côtés , excepté un , soient donnés.

COROLLAIRE II.

378. DE LA on voit que pour trouver un carré égal à plusieurs plans donnés , il les faut réunir

tous en un seul, & trouver ensuite une moyenne proportionnelle entre les deux côtés ; car il est clair qu'elle sera le côté du quarré qu'on demande. Qu'il faille, par exemple, trouver un quarré $xx = ss - \frac{ccce - eebb}{bb + af}$ (les lignes

a, b, c, e, f, h, s , sont données), je cherche une ligne $m = \frac{ss}{e} - \frac{cce - ehh}{bb + af}$ pour avoir un plan $em = ss - \frac{ccce - eebb}{bb + af}$, & ayant trouvé une moyenne proportionnelle x entre les deux côtés e, m , du plan em , il est clair que $xx = em = ss - \frac{ccce - eebb}{bb + af}$.

Pour trouver une ligne x dont le quarré x^2 soit égal à plusieurs surfolides donnés ; je cherche, comme ci dessus, un quarré zz égal à tous les surfolides donnés divisés par le quarré aa donné ou pris à volonté. Je prends ensuite une moyenne proportionnelle x entre les deux lignes a & z , & je dis qu'elle sera celle qu'on demande ; car $xx = az$, & en quarrant chaque membre, $x^2 = aaz$, c'est à dire x^2 égal à tous les surfolides donnés.

REMARQUE.

379. QUOIQUE la methode que l'on vient d'expliquer soit general pour tous les cas possibles, il ne s'en suit pas néanmoins qu'elle soit toujours la plus simple. C'est pourquoi je vais donner ici des exemples particuliers que l'on resoud d'une maniere plus aisée en s'écartant un peu de la methode generale, & qui pourront servir de methodes pour tous les cas semblables.

1°. Soit $x = \frac{abcc - aabb}{abc + c^3}$. Je cherche d'abord une ligne $m = \frac{ab}{c}$, & substituant à la place de ab sa valeur cm , je trouve $x = \frac{c^3m - ccm}{ccm + c^3} = \frac{cm - mm}{m + c}$; d'où je connois qu'en faisant $c + m.c - m :: m.n$, j'ai cette quatrième proportionnelle $n = x$. Il est donc visible qu'on n'a eu besoin que de deux proportions pour trouver la valeur de x , au lieu

que si l'on tente la methode generale, on trouvera qu'il en faut au moins trois.

2°. Soit $x = \sqrt{aa + bb}$. Je fais un triangle rectangle, dont l'un des côtés $= a$, & l'autre $= b$; & son hypothenuse sera la valeur de x . S'il falloit trouver une ligne $x = \sqrt{aa - bb}$, il n'y auroit qu'à trouver une moyenne proportionnelle x entre les deux lignes $a + b$ & $a - b$; car son quarré xx doit être égal au produit des extrêmes $aa - bb$. Ou bien je fais un triangle rectangle dont l'hypothenuse $= a$, & l'un des côtés $= b$; l'autre côté sera la valeur de x .

3°. Soit $xx = ss + 4cc - \frac{4ccc}{aa}$. Je prends l'hypothenuse m d'un triangle rectangle dont l'un des côtés $= s$, & l'autre $= 2c$, & ayant trouvé une autre ligne $n = \frac{2cc}{a}$, j'ai $xx = mm - nn$ & $x = \sqrt{mm - nn}$ que je resous comme je viens de faire $x = \sqrt{aa - bb}$ dans l'exemple precedent.

4°. Soit enfin $xx = ss - \frac{ccc - cchb}{bb + af}$. Je prends une moyenne proportionnelle entre les côtés a, f , du plan af , pour avoir un quarré $ll = af$, je trouve ensuite un quarré $mm = bb + ll$, & un autre quarré $nn = cc + hh$ par le moyen de deux triangles rectangles, comme dans le second exemple, & j'ai par la substitution $xx = ss - \frac{cenn}{mm}$; & trouvant enfin une ligne $g = \frac{cn}{m}$, il vient $x = \sqrt{ss - gg}$ que l'on resoud comme ci-dessus.

PROPOSITION II.

Problême.

380. **T**ROUVER les racines de toutes sortes d'Egalités du second degré.

Toutes les Egalités du second degré se peuvent ré-

duire à l'une de ces deux formes, $xx \mp ax - bb = 0$, ou $xx + ax + bb = 0$; en trouvant une ligne a * égale à toutes les quantités connues qui multiplient l'inconnue x , & un quarré bb * égal à tous les plans entièrement connus. Cela posé.

FIG. 212.

1°. Soit $xx + ax - bb = 0$. Je forme un angle droit CAB dont l'un des côtés $CA = \frac{a}{2}$, & l'autre côté $AB = b$, & ayant mené l'hypothénuse BC prolongée au delà de C , je décris du centre C & du rayon CA , un cercle qui coupe BC en deux points E, D . Je dis que les droites BD, BE , sont les deux racines de l'égalité proposée $xx + ax - bb$: sçavoir BE la racine vraie, & BD la fausse de l'égalité $xx + ax - bb = 0$, & au contraire BD la vraie & BE la fausse de l'égalité $xx - ax - bb = 0$.

Car faisant $BE = x$, on aura BD ou $BE + ED = a + x$; & si l'on fait $BD = -x$, on trouvera BE ou $BD - ED = -x - a$. Donc en l'un & l'autre cas $DB * BE = xx + ax = \overline{AB} (bb)$ par la propriété du cercle, c'est à dire $xx + ax - bb = 0$. Au contraire si l'on fait $BD = x$ ou $BE = -x$, on trouvera $DB * BE = xx - ax = \overline{AB} (bb)$ ou $xx - ax - bb = 0$.

FIG. 213.

2°. Soit $xx \mp ax + bb = 0$. Je forme comme dans le premier cas, un angle droit CAB dont l'un des côtés $CA = \frac{a}{2}$, & l'autre $AB = b$; & ayant mené une droite infinie BD parallèle à AC , je décris du centre C & du rayon CA un arc de cercle qui coupe la ligne BD aux points E, D . Je dis que les droites BE, BD , sont les racines de l'égalité proposée $xx \mp ax + bb = 0$: sçavoir les deux vraies de l'égalité $xx - ax + bb = 0$, & les deux fausses de l'égalité $xx + ax + bb = 0$.

Car achevant la demi-circonférence $AEDH$, & menant les parallèles EF, DG à AB ; on aura en faisant BE ou $AF = x$, le rectangle $AF * FH = ax - xx = \overline{FE} (bb)$ par la propriété du cercle. De même si l'on fait BD ou $AG = x$, on aura $AG * GH = ax - xx = \overline{GD} (bb)$: c'est à dire en l'un & l'autre cas

cas $xx - ax + bb = 0$. Si l'on veut que BE ou $AF = -x$, & BD ou $AG = -x$, on trouvera $AF * FH$ & $AG * GH = -xx - ax = \overline{FE}^2$ ou \overline{GD}^2 (bb) c'est à dire $xx + ax + bb = 0$.

Si le cercle qui a pour centre le point C , & pour rayon la droite CA , ne coupe ni ne touche la parallèle BD , (ce qui arrive toujours lorsque AB surpasse CA) ; les racines de l'égalité seront toutes deux imaginaires : mais s'il la touche en un point, les deux racines BE , BD , deviennent égales chacune au rayon CA .

REMARQUE.

381. LORSQUE dans une égalité l'inconnuë ne se rencontre qu'au quatrième & au second degré, on peut toujours réduire cette égalité en une autre où l'inconnuë ne monte qu'au second degré : de manière que ces sortes d'égalités ne passent que pour être du second degré.

Soit par exemple $z^4 - aaz - abb = 0$. Je suppose FIG. 114. une inconnuë x qui soit telle que son rectangle par la donnée a soit égal au quarré zz ; ce qui donne $ax = zz$. Et mettant à la place de zz cette valeur ax , & à la place de z^4 son quarré $aaxx$, je change l'égalité donnée $z^4 - aaz - abb = 0$ en cette autre $xx - ax - bb = 0$, où l'inconnuë x ne monte qu'au second degré. J'en cherche les racines x , comme l'on vient d'enseigner, & prenant des moyennes proportionnelles entre la donnée a & les valeurs de ses racines, je dis qu'elles exprimeront les valeurs cherchées de l'inconnuë z : ce qui est évident, puisque $zz = ax$.

PROPOSITION III.

Problème.

382. TROUVER par une autre voye les racines des égalités du second degré, sans qu'il soit nécessaire de changer leur dernier terme en un quarré.

FIG. 215.

1°. Soit $xx + ax - bc = 0$. Ayant décrit un cercle quelconque ABD , dont le diamètre ne soit pas moindre que les données a & $b - c$ je suppose ici que b surpasse c , on inscrira dans ce cercle, à commencer par un de ses points quelconques A , deux cordes $AB = a$, $AD = b - c$: & ayant prolongé AD en F en sorte que $DF = c$, on décrira de son centre C , & du rayon CF , un autre cercle concentrique qui coupe aux points F, E, G, H , les cordes AD, AB prolongées. Je dis que AG est la vraie racine, & AH la fausse de l'égalité $xx + ax - bc = 0$; & qu'au contraire AG est la fausse, & AH est la vraie racine de $xx - ax - bc = 0$.

Car AF ou $AD + DF = b$, DF ou $AE = c$, & faisant AG ou $BH = x$, on aura $AH = a + x$. Or par la propriété du cercle $EGFH$, le rectangle $EA \times AF (bc) = GA \times AH (xx + ax)$. Si l'on fait à présent $AH = -x$, on aura AG ou BH ou $AH - AB = -x - a$, & par conséquent $GA \times AH = xx + ax$ comme auparavant. Donc soit que l'on fasse $AG = x$ ou $AH = -x$, on trouvera toujours $xx + ax - bc = 0$. On prouvera de même que AG est la racine fausse, & AH la vraie de l'égalité $xx - ax - bc = 0$.

FIG. 216.

2°. Soit $xx + ax + bc = 0$. Ayant décrit un cercle quelconque ABD , dont le diamètre ne soit pas moindre que les données a & $b + c$, on inscrira dans ce cercle, à commencer par un de ses points quelconques A , deux cordes $AB = a$, $AD = b + c$: & ayant pris sur AD la partie $DF = c$, on décrira de son centre C & du rayon CF un autre cercle concentrique qui coupera les cordes AD, AB , aux points F, E, G, H . Je dis que AG & AH sont les deux racines vraies de l'égalité $xx + ax + bc = 0$, & les deux fausses de $xx + ax - bc = 0$. Cela se démontre de même que dans le premier cas.

Si le cercle qui a pour rayon CF ne touchoit ni ne rencontroit la ligne AB en aucun point, il s'ensuivroit que les deux racines de l'égalité seroient imaginaires.

A V E R T I S S E M E N T.

Tout l'artifice dont je me sers pour construire les égalités qui n'ont qu'une inconnue, ou pour trouver les racines, consiste à introduire dans cette égalité une nouvelle inconnue, en sorte qu'on en puisse tirer plusieurs équations qui renferment chacune les deux inconnues & qui soient telles que deux quelconques de ces équations renferment ensemble toutes les quantités connues de la proposée; car autrement en faisant évanouir l'inconnue nouvellement introduite, on ne retrouveroit pas l'égalité proposée. Je choisis ensuite entre ces équations deux des plus simples, & en ayant construit séparément les lieux, leurs points d'intersections me donnent les racines que je cherche. Il y a de l'art à introduire l'inconnue; car il faut que les lieux que l'on tire de la proposée, soient les plus simples qu'il se puisse: par exemple, si l'égalité est du quatrième degré, il faut que les lieux des équations qu'on tire ne passent point le second degré; que parmi ces lieux il y ait toujours un cercle comme étant le plus simple, & aussi une Parabole, une Hyperbole équilatère &c. Or c'est ce que j'ai tâché d'exécuter dans les Lemmes & les Propositions qui suivent.

L E M M E F O N D A M E N T A L.

Pour la construction des Egalités du troisième & du quatrième degré, par le moyen d'un cercle, & d'une Parabole donnée.

383. S O I T proposée l'égalité $x^4 + 1bx^3 + acxx - aadx - a^2f = 0$, dans laquelle x est l'inconnue, & a, b, c, d, f , sont les données; & soit supposée une autre inconnue y telle que son rectangle par la connue a , soit égal au rectangle de $x + b$ par x . Ce qui donne les équations suivantes.

1°. $ay = xx + bx$, de laquelle quarrant chaque membre, on trouve $x^4 + 1bx^3 + bbxx = aayy$; &

P p ij

mettant à la place de $x^2 + 2bx$, la valeur $ayy - bbxx$ dans l'égalité proposée x^2 &c. on la changera en cette seconde équation.

2^e. $yy - \frac{bb}{aa}xx + \frac{c}{a}xx - dx - af = 0$, dans laquelle mettant à la place de xx la valeur $ay - bx$ trouvée par le moyen de la première équation, 1^o. Dans $-\frac{bb}{aa}xx$. 2^o. Dans $\frac{c}{a}xx$. 3^o. Dans $-\frac{bb}{aa}xx + \frac{c}{a}xx$, on arrivera à ces trois différentes équations.

$$3^e. yy - \frac{bb}{a}y + \frac{b^2}{aa}x + \frac{c}{a}xx - dx - af = 0.$$

$$4^e. yy - \frac{bb}{aa}xx + cy - \frac{bc}{a}x - dx - af = 0.$$

5^e. $yy + cy - \frac{bb}{a}y - \frac{bc}{a}x + \frac{b^2}{aa}x - dx - af = 0$. Si l'on retranche de cette cinquième équation, la première $xx + bx - ay = 0$, & qu'ensuite on la lui ajoute, on aura ces deux autres.

$$6^e. yy + cy - \frac{bb}{a}y + ay - xx - bx - \frac{bc}{a}x + \frac{b^2}{aa}x - dx - af = 0.$$

$$7^e. yy + cy - \frac{bb}{a}y - ay + xx + bx - \frac{bc}{a}x + \frac{b^2}{aa}x - dx - af = 0.$$

- Maintenant si l'on prend pour les inconnues x & y deux lignes droites AP , PM , qui fassent entr'elles un angle quelconque APM , il est évident que le lieu de la première équation est * une Parabole : que celui de la seconde peut être une Parabole, une Ellipse, ou une Hyperbole selon que bb est égal, moindre, ou plus grand que ac ; que celui de la troisième est une Ellipse, qui devient un
- * Art. 310. cercle * lorsque $c = a$ & que l'angle APM est droit : que celui de la quatrième est une Hyperbole, qui devient équi-
- * Art. 328. latère * lorsque $b = a$: que celui de la cinquième est enco-
- ♣ 329. re une Parabole : que celui de la sixième est une Hyper-
- * Art. 335. bole équilatère : & enfin que le lieu de la septième est un
- ♣ 336. cercle, lorsque l'angle APM est droit.

REMARQUE I.

384. S'IL y avoit $-2bx'$ dans l'égalité proposée au lieu de $+2bx'$, il faudroit changer dans toutes les équations les signes des termes où b se rencontre avec une dimension impaire ; & si le second terme manquoit, il faudroit effacer tous les termes où b se trouve. Il en est de même à l'égard des autres termes de l'égalité proposée par rapport aux lettres, c, d, f , qu'ils renferment. Mais l'on doit remarquer que dans tous les differens changemens qui peuvent arriver, le lieu de la premiere équation sera une Parabole, celui de la sixième une Hyperbole équilatere, & enfin celui de la dernière toujours un cercle lorsque l'angle APM est droit.

REMARQUE II.

385. ON a choisi pour premiere équation $xx + bx = ay$, plutôt que $xx - bx = ay$ ou simplement $xx = ay$; parce qu'en quarrant chaque membre de cette équation, les deux premiers termes du premier membre sont les mêmes que les deux premiers termes de l'égalité proposée $x^2 + 2bx'$ &c, & qu'ainsi on peut les faire évanouir tout d'un coup. Ce qui donne une nouvelle equation dont le lieu n'est que du second degré, & qui étant combinée en différentes façons avec la premiere, sert à en trouver (comme l'on vient de voir) plusieurs autres, dont les lieux n'étant que du second degré, se construisent aisément, parce qu'elles ne renferment point le plan xy ; & entre lesquels le lieu de la dernière equation est toujours un cercle, en supposant que les inconnuës x & y fassent entr'elles un angle droit.

PROPOSITION IV.

Problème.

386. **T**ROUVER les racines de l'égalité proposée $x^4 + 1bx^3 + 2c x x - aad x - a'f = 0$, par le moyen d'une Parabole & d'un cercle.

FIG. 217. Ayant pris pour les inconnues & indéterminées x & y , les deux lignes droites AP , PM , qui fassent entr'elles un angle droit APM ; je construis d'abord la Parabole qui est le lieu de la première équation du Lemme, & ensuite le cercle qui est le lieu de la septième: & leurs intersections me servent à découvrir les différentes valeurs de l'inconnue x qui seront les racines de l'égalité proposée. Cela se fait en cette sorte.

* Art. 310.

Ayant pris sur la ligne AP prolongée de l'autre côté de A la partie $AD = \frac{1}{2}b$, on mènera par le point D une parallèle à PM , sur laquelle on prendra la partie $DC = \frac{bb}{4a}$ du côté opposé à PM ; & on décrira de l'axe CD qui ait son origine en C , & dont le paramètre soit égal à la donnée a , une Parabole MCM . Cela fait on mènera par le point fixe A une parallèle AQ à PM , sur laquelle ayant pris la partie $AB = \frac{1}{2}a + \frac{bb}{2a} - \frac{1}{2}c = -g$ pour abréger, on tirera parallèlement à AP la droite $BE = \frac{1}{2}d \pm \frac{bx}{a}$ sçavoir $-\frac{bx}{a}$ lorsque $AB = -g$ c'est à dire lorsque la valeur de AB est positive, & $+\frac{bx}{a}$ lorsque $AB = -g$; en observant de prendre ou mener ces deux lignes AB , BE , du côté de PM lorsque leurs valeurs sont positives, & du côté opposé lorsqu'elles sont negatives. Nommant enfin $E A, m$; on décrira du centre E , & du rayon $EM = \sqrt{mm + af}$ un cercle; & menant des points M où il coupe la Parabole des perpendiculaires MP sur la ligne AP : les par-

ties AP de cette ligne marqueront les racines de l'égalité, sçavoir les vraies lorsque les points P tombent du côté où l'on a supposé PM en faisant la construction, & les fausses lorsqu'ils tombent du côté opposé.

Car prolongeant MQ parallèle à AP , & qui rencontre l'axe CG au point L , on aura ML ou $AP + AD = x + \frac{1}{2}b$, CL ou $MP + DC = y + \frac{bb}{4a}$; & par la propriété de la Parabole $\overline{ML} = CL \times a$, c'est à dire $xx + bx + \frac{1}{4}bb = \frac{1}{4}bb + ay$, ou $xx + bx = ay$ qui est la premiere equation du Lemme. Maintenant si l'on prolonge EB jusqu'à ce qu'elle rencontre PM en R , & qu'on tire le rayon EM , on aura à cause du triangle rectangle ERM le quarré $\overline{EM} = \overline{ER} + \overline{RM} = \overline{EB} + 2EB \times BR + \overline{BR} + \overline{PM} = 2AB \times PM + \overline{AB} = \overline{EB} + \overline{BA} + af$ par la construction; c'est à dire en effaçant de part & d'autre les quarrés \overline{EB} , \overline{BA} , & mettant pour $2AB$ sa valeur $a + \frac{bb}{a} = c$, & pour $2BE$ sa valeur $\frac{2bs}{a} = d$ ou $b + \frac{b^2}{aa} = \frac{bc}{a} = d$, & pour BR ou AP & PM leurs valeurs x & y , la septième equation $yy + cy = ay + \frac{bb}{a}y + xx + bx + \frac{b^2}{aa}x - \frac{bc}{a}x - dx = af$, dans laquelle si l'on met à la place de y sa valeur $\frac{xx + bx}{a}$ trouvée par la premiere equation, & à la place de yy le quarré de cette valeur, on retrouve l'equation même proposée $x^4 + 2bx^3 + acxx - aadx - a^2f = 0$. D'où l'on voit que la ligne AP exprime une racine vraie de cette égalité.

Si l'on observe de prendre $-x$ pour AP & $-y$ pour PM , lorsque ces lignes tombent du côté opposé où on les a supposées en faisant la construction; on trouvera toujours par la propriété de la Parabole la premiere equation, & par la propriété du cercle la septième. Donc &c.

COROLLAIRE I.

387. IL est visible qu'on rendra la construction précédente générale pour toutes les égalités du troisième & du quatrième degré, & qu'on y emploiera toujours une Parabole qui ait pour le paramètre de son axe une ligne donnée a ; si l'on observe 1°. De multiplier par la racine x l'égalité lorsqu'elle n'est que du troisième degré; & de prendre
 * Art. 376. une ligne $2b$ égale à toutes celles qui multiplient x , un
 * Art. 377. plan ac égal à ceux qui multiplient xx , un solide ad égal aux solides qui multiplient x , & enfin un sursolide $a'f$ égal aux termes entièrement connus de l'égalité donnée.
 2°. De changer dans les valeurs des lignes AD , DC , AB , BE , EM , qui déterminent la construction de la Parabole & du cercle, les signes des termes où b se rencontre avec une dimension impaire s'il y a $-2bx$ dans l'égalité donnée, parce qu'il y avoit $+2bx$ dans celle du Problème; & d'effacer tous les termes où b se trouve si le terme $2bx$ manque, parce qu'alors $b = 0$: comme aussi de faire la même chose à l'égard des termes où c , d , f , se rencontrent. 3°. De prendre ou mener ces lignes du côté de PM lorsqu'elles sont positives, & du côté opposé lorsqu'elles sont négatives. On aura donc $AD = \pm \frac{1}{2}b$, sçavoir $-\frac{1}{2}b$ lorsqu'il y a $+2bx$, & $+\frac{1}{2}b$ lorsqu'il y a $-2bx$; $AB = \frac{1}{2}a + \frac{bb}{2a} \pm \frac{1}{2}c = \pm g$, sçavoir $-\frac{1}{2}c$ lorsqu'il y a $+acxx$, & $+\frac{1}{2}c$ lorsque c'est $-acxx$; $BE = \pm \frac{bx}{a} \mp \frac{1}{2}d$, sçavoir $-\frac{bx}{a}$ lorsque $AB = +g$, & qu'il y a $+2bx$, ou bien lorsque $AB = -g$, & qu'il y a $-2bx$; & au contraire $+\frac{bx}{a}$ lorsque $AB = +g$ & qu'il y a $-2bx$, ou bien lorsque $AB = -g$ & qu'il y a $+2bx$ (c'est à dire $-\frac{bx}{a}$ lorsque les valeurs de AB & AD sont l'une positive & l'autre négative, & $+\frac{bx}{a}$ lorsque ces valeurs sont toutes deux ou positi-

ves ou negatives) ; comme aussi $+\frac{1}{2}d$ lorsqu'il y a $-aax$, & $-\frac{1}{2}d$ lorsque c'est $+aax$: & enfin $EM = \sqrt{mm \mp af}$, sçavoir $+af$ lorsqu'il y a $-a'f$, & $-af$ lorsque c'est $+a'f$. D'où l'on tire cette construction geometrique qui est generale pour tous les cas.

Une Parabole $MC M$ qui a pour axe la ligne CG dont FIG. 217.
 le parametre est égal à la ligne a , étant donnée, & ayant réduit l'égalité proposée sous cette forme $x^2 \mp 2bx' \mp acxx \mp aax \mp a'f = 0$; on menera une ligne AB parallele à l'axe CG qui en soit distante de $\frac{1}{2}b$, du côté droit de cet axe lorsqu'il y a $+2bx'$ dans l'égalité donnée, & du côté gauche lorsqu'il y a $-2bx'$. On tirera par le point A où la ligne AB rencontre la Parabole, une perpendiculaire AD sur l'axe CG ; & on prendra sur cet axe les parties $DF = \frac{1}{2}a$, $FG = 2CD$ toujours du côté opposé à son origine C , & la partie $GK = \frac{1}{2}C$ vers son origine C lorsqu'il y a $+acxx$, & du côté opposé lorsqu'il y a $-acxx$. On menera ensuite par les points déterminés A, F , une ligne droite indéfinie AF , & par le point K une perpendiculaire à l'axe qui rencontre AF en H ; & on prendra sur cette perpendiculaire la partie $HE = \frac{1}{2}d$ du côté droit lorsqu'il y a $-aax$, & du côté gauche lorsqu'il y a $+aax$. Cela fait, on décrira un cercle du centre E , & du rayon $EM = AE$, lorsque le terme $a'f$ manque dans l'égalité donnée, c'est à dire, lorsqu'elle n'est que du troisième degré : mais lorsqu'elle est du quatrième, on prendra (après avoir nommé AE, m ;) le rayon $EM = \sqrt{mm \mp af}$, sçavoir $+af$ s'il y a $-a'f$, & $-af$ s'il y a $+a'f$. Enfin des points M où ce cercle rencontre la Parabole donnée, menant des perpendiculaires MQ sur la ligne AB ; elles seront les racines de l'égalité donnée; sçavoir celles qui tombent du côté droit de cette ligne, les vraies, & celles qui tombent du côté gauche, les fausses.

Car prolongeant HK jusqu'à ce qu'elle rencontre la ligne AB au point B , on a par la construction BK ou

Qq

$AD = \mp \frac{1}{2}b$, sçavoir $-\frac{1}{2}b$ lorsqu'il y a $+\frac{1}{2}bx^2$, & $+\frac{1}{2}b$ lorsque c'est $-\frac{1}{2}bx^2$; & par la propriété de la Parabole, $CD = \frac{bb}{4a}$. Donc DG ou $DF + FG = \frac{1}{2}a + \frac{bb}{4a}$, & DK ou $AB = \frac{1}{2}a + \frac{bb}{4a} \pm \frac{1}{2}c = \mp g$, sçavoir $-\frac{1}{2}c$ lorsqu'il y a $+acxx$, & $+\frac{1}{2}c$ lorsqu'il y a $-acxx$; & l'on doit observer que le point B tombe du côté de PM lorsque $AB = +g$, c'est à dire lorsque la valeur est positive, & du côté opposé lorsqu'elle est negative. Or à cause des triangles semblables ADF , ABH , on aura $DF (\frac{1}{2}a) : DA (\mp \frac{1}{2}b) :: AB (\mp g) : BH = \mp \frac{bg}{a}$, sçavoir $+\frac{bg}{a}$ lorsque les valeurs de AD & de AB sont toutes deux positives ou negatives, & $-\frac{bg}{a}$ lorsque l'une d'elles est positive & l'autre negative.

Et partant $BE = \mp \frac{bg}{a} \pm \frac{1}{2}d$, sçavoir $-\frac{1}{2}d$ lorsqu'il y a $-aadx$, & $+\frac{1}{2}d$ lorsqu'il y a $+aadx$; & l'on doit encore observer que le point E tombera du côté de PM lorsque la valeur de BE est positive, & du côté opposé lorsqu'elle est negative. D'où il est évident que par le moyen de cette construction on déterminera dans tous les cas possibles, toujours comme il est requis, le centre E du cercle.

Si le second terme $\frac{1}{2}bx^2$ manquoit dans l'égalité donnée, il est clair que les lignes AB , AF , tomberoient sur l'axe CG , en sorte que les points A , D , se confondroient avec l'origine C ; puisque $b=0$. Et par conséquent le point G tomberoit sur le point F , & les points H , B , sur le point K : ce qui rend la construction generale beaucoup plus simple. Car il ne faudroit alors que prendre sur l'axe la partie $CF = \frac{1}{2}a$ toujours vers le dedans de la Parabole, & la partie $KF = \frac{1}{2}c$ vers l'origine C lorsqu'il y a $+acxx$, & du côté opposé lorsqu'il y a $-acxx$; mener $KE = \frac{1}{2}d$ perpendiculaire à l'axe, du côté gauche lorsqu'il y a $+aadx$; & du côté droit lorsqu'il y a $-aadx$; & achever le reste comme dans la construction generale, en observant qu'ici $EC = m$.

De même si le terme $acxx$ manque, le point K tombera sur le point G ; & si c'est le terme $aadx$, le centre E du cercle tombera en H . FIG. 217.

COROLLAIRE II.

388. **O**N peut encore trouver une construction plus simple pour les égalités du troisième degré qui ont un second terme, en les multipliant par l'inconnue plus ou moins la quantité connue du second terme, sçavoir plus cette quantité quand le second terme est affecté du signe $-$; & moins cette quantité lorsqu'il y a le signe $+$; ce qui donne une équation du quatrième degré où le second terme est évanoui. Qu'il faille, par exemple, trouver les racines de l'égalité du troisième degré, $x^3 - bxx + apx + aaq = 0$: je la multiplie par $x + b$ pour avoir l'égalité du quatrième degré, $x^4 + apxx + aaqx + aabq = 0$,
 $- b b x x + a b p x$
 dans laquelle le second terme est évanoui; je me sers à présent de la construction que l'on vient de donner pour ces sortes d'égalités où le second terme manque, & j'ai
 $CK (\frac{1}{2}a \pm \frac{1}{2}c) = \frac{1}{2}a + \frac{bb}{2a} - \frac{1}{2}p$, $KE (\frac{1}{2}d) = \frac{1}{2}q + \frac{bp}{2a}$,
 & le rayon du cercle $EM = \sqrt{mm - bq}$: ce qui donne cette construction.

Ayant mené une parallèle à l'axe CD qui en soit distante vers le côté gauche d'une ligne égale à b , & qui rencontre la Parabole au point A , je tire par l'origine C de l'axe la droite CA , sur laquelle j'éleve par son point de milieu O une perpendiculaire indéfinie OG qui rencontre l'axe au point G . Je prends sur l'axe vers son origine C la partie $GK = \frac{1}{2}p$, & ayant tiré par le point K une perpendiculaire à l'axe qui rencontre la ligne OG au point H , je prends sur cette perpendiculaire prolongée du côté de H la partie $HE = \frac{1}{2}q$, & je décris du centre E & du rayon EA un cercle. Je dis qu'il coupera la Parabole en des points M , d'où ayant abaissé sur l'axe des perpendiculaires MQ , celles qui seront Qq ij FIG. 219.

à droit, marqueront les vraies racines; & celles qui seront à gauche, les fausses de l'égalité proposée $x^3 - bxx + apx + aaq = 0$.

Car ayant mené les perpendiculaires AD , OL , sur l'axe; on aura par la construction $AD = b$, & par la propriété de la Parabole $CD = \frac{bb}{a}$. Donc puisque CA est divisée par le milieu en O , les triangles semblables CAD , COL , donneront $OL = \frac{1}{2}b$, $CL = \frac{bb}{2a}$; & à cause des triangles rectangles semblables CLO , OLG , on aura $CL (\frac{bb}{2a}) \cdot LO (\frac{1}{2}b) :: LO (\frac{1}{2}b) \cdot LG = \frac{1}{2}a$, & par conséquent CK ou $CL + LG - GK = \frac{1}{2}a + \frac{bb}{2a} - \frac{1}{2}p$. De plus à cause des triangles semblables GLO , GKH , on trouve $KH = \frac{bp}{2a}$, & $KH + HE$ ou $KE = \frac{1}{2}q + \frac{bp}{2a}$ qui tend du côté gauche de l'axe, comme il est prescrit dans la construction lorsqu'il y a $+aa dx$. Le point E est donc le centre du cercle lequel doit déterminer par ses intersections avec la Parabole donnée toutes les racines de l'égalité du quatrième degré $x^4 + apxx$ &c. Or comme les racines de cette égalité sont celles de la proposée $x^3 - bxx + apx + aaq = 0$, avec une fausse $AD (b)$; il s'ensuit que ce cercle doit passer par le point A . Donc &c.

On peut encore s'assurer par le calcul que EA est le rayon du cercle cherché. Car menant EB parallèle à l'axe, on aura (à cause des triangles rectangles EBA , EKC) les quarrés des hypoténuses $\overline{EA} = \overline{EB} + \overline{BA}$ & $\overline{EC} = \overline{CK} + \overline{KE}$ & par conséquent il s'agit de prouver que $\overline{EB} + \overline{BA} = \overline{EK} + \overline{KC} = bq$, puisqu'on doit prendre $EM = \sqrt{mm - bq}$. Or en mettant à la place de ces lignes de part & d'autre leurs valeurs analytiques, on trouvera les mêmes quantités. Et c'est ce qui doit arriver, si le rayon cherché $EM = EA$.

Pour rendre cette construction generale, il faut observer 1°. De mener du côté gauche de l'axe la parallele qui en est distante d'une ligne égale à b , lorsqu'il y a $-bxx$ dans l'égalité proposée, & du côté droit lorsqu'il y a $+bxx$. 2°. De prendre sur l'axe $GK = \frac{1}{2}p$ du côté de son origine C lorsqu'il y a $+apx$, & du côté opposé lorsqu'il y a $-apx$. 3°. De prendre $HE = \frac{1}{2}q$ du côté gauche lorsqu'il y a $+aaq$, & du côté droit lorsqu'il y a $-aaq$. Tout cela est trop évident pour m'arrêter à le démontrer en détail.

REMARQUE I.

389. IL est à propos de remarquer, 1°. Que si le cercle ne coupe la Parabole donnée qu'en deux points, il s'ensuivra que l'égalité proposée n'aura que deux racines réelles lorsqu'elle est du quatrième degré, & qu'une seule lorsqu'elle est du troisième, & les deux autres imaginaires: comme dans la figure 219. où le cercle ne coupe la Parabole qu'en deux points A, M ; l'égalité $x^4 + apxx - bbxx$ &c. n'a que deux racines réelles AD, MQ , qui sont toutes deux fausses, parce qu'elles tombent du côté gauche de l'axe. 2°. Que si le cercle ne coupoit ni ne rencontroit la Parabole en aucun point (ce qui ne peut arriver lorsque l'égalité est du troisième degré comme l'on voit par les constructions precedentes) les quatre racines seroient imaginaires. 3°. Que s'il la touchoit en un point l'égalité proposée auroit deux racines égales chacune à la perpendiculaire menée de ce point; ce qui vient de ce qu'on peut considerer un cercle qui touche une Parabole, comme s'il coupoit en deux points infiniment proches l'un de l'autre, qui sont regardés comme réunis dans le point touchant: mais alors l'égalité proposée se pourroit abaisser à une du second degré par les regles de l'Algebre ordinaire, de sorte qu'on n'auroit point besoin d'une Parabole pour en trouver les racines.

REMARQUE II.

390. Si l'on fait attention à ce qu'on démontre en Algebre qu'en toute égalité où le second terme manque, & qui a toutes ses racines réelles, la somme des vraies est égale à la somme des fausses; on verra naître ce Theorème.

FIG. 218. S'il y a un cercle qui coupe une Parabole en quatre points M d'où l'on abaisse des perpendiculaires MQ sur l'axe CF : je dis que la somme des perpendiculaires qui tombent du côté droit de l'axe, sera égale à la somme de celles qui tombent du côté gauche.

Car si l'on prend vers le dedans de la Parabole sur l'axe depuis son origine C la partie CF égale à la moitié de son parametre que j'appelle a , & qu'ayant tiré du centre E du cercle la perpendiculaire EK sur l'axe, on fasse $FK = \frac{1}{2}c$, $KE = \frac{1}{2}d$, $\overline{EC} - \overline{EM} = af$; il est clair * Art. 387. par la construction qui est à la fin * du Corollaire premier, que les perpendiculaires MQ seront les racines de cette égalité $x^2 - acxx + aadx + a'f = 0$ dans laquelle le second terme manque; sçavoir celles qui tombent du côté droit de l'axe, les vraies; & celles qui tombent du côté gauche, les fausses. Donc &c.

Si le cercle passoit par l'origine C de l'axe, il est visible que l'une des perpendiculaires MQ deviendrait nulle ou zero; & qu'ainsi il y auroit alors une perpendiculaire d'une part de l'axe égale aux deux autres de l'autre part.

Si le cercle touchoit la Parabole en un point & la coupoit en deux autres, il faudroit prendre le double de la perpendiculaire menée du point touchant; puisque * Art. 389. (comme l'on vient * de dire) on peut regarder ce cercle comme s'il coupoit la Parabole en deux points infiniment proches l'un de l'autre, lesquels se réunissent au point touchant.

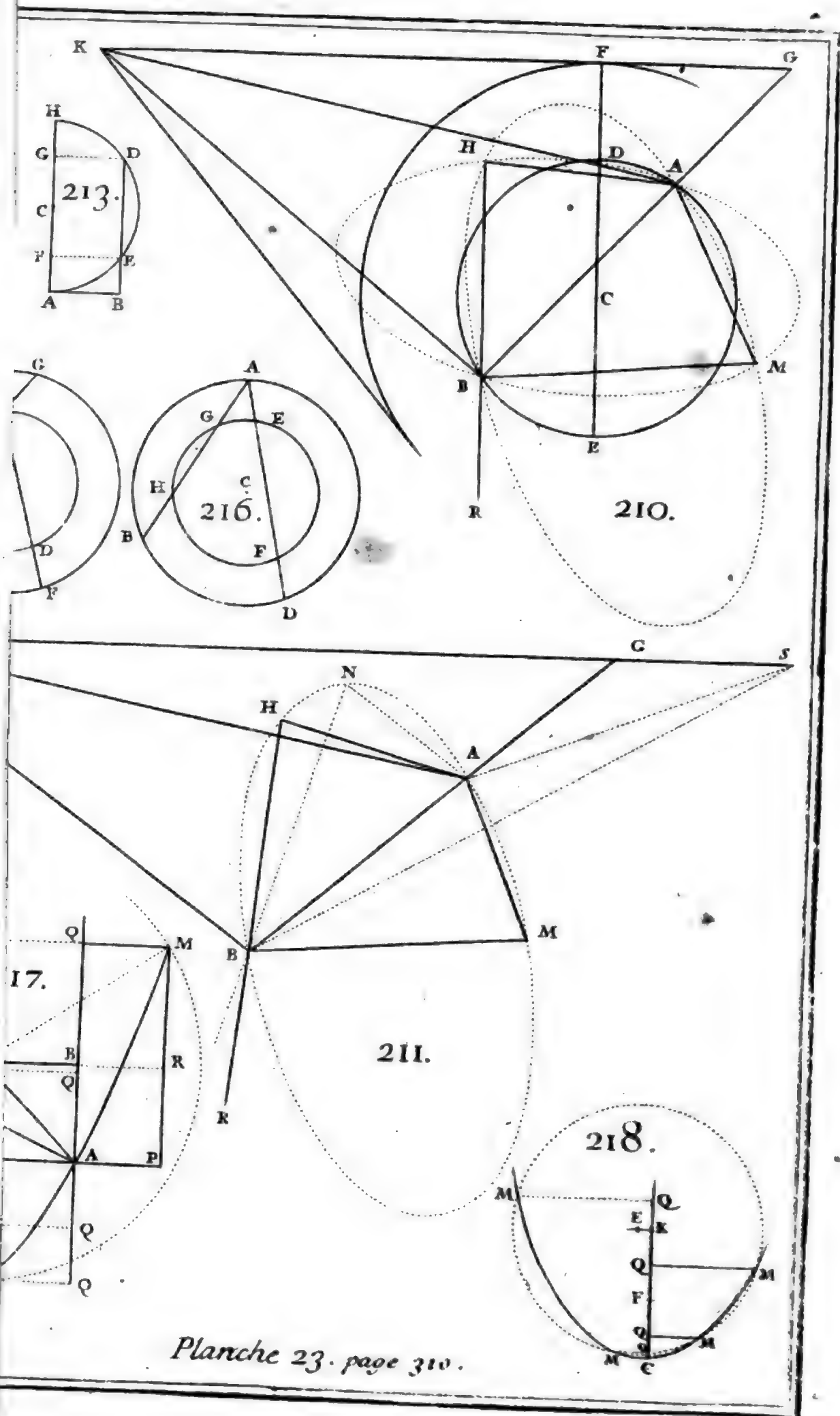


Planche 23. page 310.

REMARQUE III.

391. COMME l'on ne peut imaginer en Geometrie des produits qui ayent plus de trois dimensions ; puisque le solide , qui est la quantité la plus composée , n'en a que trois ; on pourra diviser , si l'on veut , tous les termes d'une égalité proposée qui passe le troisième degré , par telle ligne donnée qu'on voudra , élevée à une puissance moindre d'une unité que chacun de ses termes n'a de dimensions : ce qui ne troublera point l'égalité , & fera que chacun de ses termes , n'exprimera plus que des lignes droites. Soit , par exemple , l'égalité du quatrième degré $x^4 + 2bx^3 + acxx - aadx - a'f = 0$; je la divise par a^3 , ce qui donne $\frac{x^4}{a^3} + \frac{2bx^3}{a^3} + \frac{cxx}{aa} - \frac{dx}{a} - f = 0$, dont chaque terme n'a qu'une dimension , & n'exprime par conséquent que des lignes droites. On choisit ordinairement la ligne qui se trouve répétée le plus souvent dans tous les termes de l'équation proposée , comme est ici la ligne a , & même quelquefois on la sousentend , en la regardant comme l'unité dans les nombres , qui ne change rien aux quantités qu'elle multiplie ou qu'elle divise : ainsi en faisant $a = 1$, on écrira $x^4 + 2bx^3 + cxx - dx - f = 0$, au lieu de $x^4 + 2bx^3 + acxx - aadx - a'f = 0$ ou de $\frac{x^4}{a^3} + \frac{2bx^3}{a^3} + \frac{cxx}{aa} - \frac{dx}{a} - f = 0$. Il en est de même des égalités du cinquième & du sixième degré , &c.

REMARQUE IV.

392. SI après avoir construit le cercle qui est le lieu de la dernière équation du Lemme , on construit une Section conique qui soit le lieu de telle autre de ses équations qu'on voudra ; ces deux lieux détermineront par leurs intersections les racines de l'égalité proposée ; dont la raison est que faisant évanouir par le moyen de leurs équations l'inconnue y , on retrouve l'égalité même proposée.

De-là il est évident qu'on peut construire cette égalité, 1°. Par le moyen d'un cercle & d'une Hyperbole équilatère, en se servant de la septième & de la sixième équation du Lemme. 2°. Par le moyen d'un cercle, & d'une Ellipse dont l'axe parallèle à AP est à son paramètre comme a est à c , en se servant de la septième & de la troisième équation. 3°. Par le moyen d'un cercle, & d'une Hyperbole dont l'axe parallèle à AP est à son paramètre comme aa est à bb , en se servant de la septième & de la quatrième équation. Or comme la ligne a , dont on se sert pour réduire sous l'expression ac toutes les quantités qui multiplient xx , sous l'expression aad celles qui multiplient x , & enfin sous l'expression $a'f$ les quantités entièrement connues, est arbitraire ; il s'ensuit qu'en prenant pour cette ligne a une infinité de différentes grandeurs, on pourra construire l'égalité proposée par le moyen d'une infinité de cercles, & d'Ellipses, ou d'Hyperboles équilatères & non équilatères, toutes différentes entr'elles.

On a vu dans l'article 387. qu'en prenant pour l'unité arbitraire a le paramètre de l'axe d'une Parabole donnée, on peut en se servant de la première & de la septième équation construire l'égalité proposée par le moyen d'un cercle & de la Parabole donnée : & je vais faire voir qu'en déterminant cette ligne a d'une certaine manière, on peut construire l'égalité par le moyen d'un cercle & d'une Ellipse ou d'une Hyperbole semblable à une Ellipse ou à une Hyperbole donnée. Car la raison de ses axes étant donnée par la supposition, la raison de l'axe parallèle à AP avec son paramètre sera aussi donnée. Si donc l'on nomme cette raison donnée $\frac{n}{m}$; on aura lorsqu'il s'agit de l'Ellipse $\frac{c}{a} = \frac{n}{m}$, & partant $aa = \frac{a'm}{n}$; d'où il suit que si l'on prend pour l'uni-

* Art. 378. té arbitraire a , la racine d'un carré aa égal * à une quantité connue ac qui multiplie xx dans l'égalité donnée

donnée, & est multipliée par $\frac{m}{n}$, on construira l'égalité en se servant de la septième & de la troisième équation, par le moyen d'un cercle & d'une Ellipse dont l'axe parallèle à AP , sera à son paramètre comme m est à n , puisque $\frac{n}{m} = \frac{e}{a}$. Mais lorsqu'il s'agit de l'Hyperbole, on aura $\frac{n}{m} = \frac{b^2}{a^2}$, & partant $a = b\sqrt{\frac{m}{n}}$; d'où l'on voit que si l'on prend pour l'unité a cette valeur, & qu'on construise l'égalité en se servant de la septième & de la quatrième équation, l'axe parallèle à AP de l'Hyperbole qui est le lieu de la quatrième, sera à son paramètre comme m est à n , puisque $\frac{n}{m} = \frac{b^2}{a^2}$. Et c'est ce qui étoit proposé.

REMARQUE V.

393. LA ligne a qui fait l'office de l'unité, & qui est arbitraire, suffit comme l'on vient de voir pour construire l'égalité proposée, par le moyen d'un cercle & d'une Parabole donnée, ou bien par le moyen d'un cercle, & d'une Ellipse, ou d'une Hyperbole semblable à une donnée. Mais lorsqu'il est question de la construire par le moyen d'un cercle, & d'une Ellipse, ou d'une Hyperbole donnée, une seule ligne arbitraire ne suffit pas; il faut en introduire d'autres dans l'égalité proposée, afin de pouvoir les déterminer ensuite de la manière que la Section donnée serve. C'est ce que l'on va exécuter dans le Lemme suivant.

LEMME FONDAMENTAL.

Pour la construction des Egalités du troisième & du quatrième degré, avec un cercle, & une Ellipse, ou une Hyperbole donnée.

394. SOIT l'égalité du quatrième degré $z^4 + abz^2 - acz + a'd = 0$, dans laquelle les lettres a, b, c, d ,
Rr

marquent des lignes données, & la lettre z exprime les racines inconnues de l'égalité. Je prends une autre inconnue $x = \frac{fz}{a}$ (la lettre f marque une ligne prise à volonté), & substituant à la place de z , zz , & z^4 leurs valeurs $\frac{ax}{f}$, $\frac{aax}{ff}$, & $\frac{a^4x^4}{f^4}$ dans l'égalité précédente, je la change en cette autre $x^4 + \frac{bff}{a}xx - \frac{cf^3}{a}x + \frac{df^4}{a} = 0$; je prends une troisième inconnue y telle qu'étant multipliée par f son produit fy soit égal au quarré xx de la seconde; ce qui donne les équations suivantes.

1^e. $xx - fy = 0$; & substituant à la place de xx , & de x^4 leurs valeurs fy & $ffyy$ dans l'égalité $x^4 + \frac{bff}{a}xx$ &c, j'ai pour seconde équation.

2^e. $yy + \frac{bf}{a}y - \frac{cf}{a}x + \frac{df}{a} = 0$, laquelle étant ajoutée à la première, donne pour troisième équation.

3^e. $yy + \frac{bf}{a}y - fy + xx - \frac{cf}{a}x + \frac{df}{a} = 0$, dont le lieu est * un cercle lorsque les inconnues & indéterminées x & y font entr'elles un angle droit. Je multiplie la première équation par la fraction $\frac{g}{a}$ dans laquelle g exprime une ligne telle qu'on veut de même que f , & j'ai $\frac{g}{a}xx - \frac{fg}{a}y = 0$; Et ajoutant cette équation avec la seconde, & l'en ôtant ensuite, je forme la quatrième & la cinquième équation.

4^e. $yy + \frac{bf}{a}y - \frac{gf}{a}y + \frac{g}{a}xx - \frac{cf}{a}x + \frac{df}{a} = 0$, dont le lieu est * une Ellipse.

5^e. $yy + \frac{bf}{a}y + \frac{gf}{a}y - \frac{g}{a}xx - \frac{cf}{a}x + \frac{df}{a} = 0$, dont le lieu est * une Hyperbole ou les Hyperboles opposées.

REMARQUE.

395. S'il arrive que quelques termes de l'égalité proposée aient des signes differens de celle-ci, ou qu'ils

manquent ; les lieux de ces cinq équations seront toujours néanmoins des Sections coniques de même nom : c'est à dire que les lieux de la première & de la seconde équation seront toujours des Paraboles, celui de la troisième, un cercle, &c.

PROPOSITION V.

Problème.

396. **C**ONSTRUIRE l'égalité du quatrième degré $z^4 + abzz - aacz + a^3d = 0$, avec un cercle donné & une Hyperbole semblable à une donnée ; ou avec une Hyperbole donnée & un cercle.

Je construis séparément * les lieux de la troisième & de * *Art.* 314. la cinquième équation, en prenant pour les inconnues & *Art.* 332. indéterminées x & y les mêmes lignes AP , PM , qui *Fig.* 110. fassent entr'elles un angle droit APM ; & les intersec. & 121. tions de ces deux lieux me servent à déterminer les valeurs de l'inconnue z , de la manière qui suit.

Soit menée par le point A origine des x , la ligne $AD = \frac{af - bf}{2a}$ parallèle à PM , & du même côté lorsque a surpasse b , & au contraire du côté opposé lorsqu'il est moindre. Et ayant tiré la droite indéfinie DG parallèle à AP , soient prises sur cette ligne du côté de PM la partie $DC = \frac{cf}{2a}$, & soit décrit du centre C & du rayon CF ou $CG = \frac{f}{2a} \sqrt{cc + aa - zab + bb - 4ad}$, un cercle. Maintenant ayant mené $AH = \frac{bf + gf}{2a}$ parallèle à PM & du côté opposé, soit tirée la droite indéfinie HK parallèle à AP , sur laquelle soient prises la partie $HI = \frac{cf}{2g}$ du côté opposé à PM , & de part & d'autre du point I les parties IK , IL , égales chacune à $\frac{f}{2g} \sqrt{cc - hg + 4dg}$ ou $\frac{f}{2g} \sqrt{hg - 4dg - cc}$ (on a

pris pour abréger $b = \frac{b+z}{2}$). Soit enfin décrite de l'axe LK (qui doit être le premier lorsque $cc + 4dg$ est plus grand que bg , & le second lorsqu'il est moindre) qui soit à son paramètre KO comme a est à g , une Hyperbole ou les Hyperboles opposées qui rencontrent le cercle en des points M, M , d'où soient abaissées des perpendiculaires MP, MP , sur la ligne AP . Je dis que les parties AP, AP , de cette ligne seront les racines de l'égalité $x^4 + \frac{bff}{a}xx - \frac{cf^3}{a}x + \frac{df^4}{a} = 0$; en observant qu'elles sont vraies lorsque les points P tombent du côté où l'on a supposé PM en faisant la construction, & fausses lorsqu'ils tombent du côté opposé.

Car on trouvera par la propriété du cercle la troisième équation; & par la propriété de l'Hyperbole, la cinquième; & ôtant la troisième de la cinquième, on aura $\frac{zf}{a}y + fy - \frac{z}{a}xx - xx = 0$, d'où l'on tire $y = \frac{xx}{f}$; & mettant dans l'une ou dans l'autre de ces deux équations à la place de y cette valeur $\frac{xx}{f}$, & à la place de yy son carré $\frac{x^4}{f^2}$, on trouvera l'égalité x^4 &c. Mais ayant les valeurs de x , on a celles de z ; puisque $z = \frac{ax}{f}$.

Maintenant pour satisfaire à la première demande du Problème, je nomme le rayon du cercle donné CF, r ; & j'ai par conséquent $r = \frac{f}{2a} \sqrt{cc + aa - 2ab + bb - 4ad}$; d'où il suit que si l'on prend $f = \frac{2ar}{\sqrt{cc + aa - 2ab + bb - 4ad}}$, le rayon CF ou CG du cercle qui est le lieu de la troisième équation, sera égal à la donnée r . Il reste à faire que l'Hyperbole soit semblable à une donnée, c'est à dire, que son premier ou second axe LK soit à son paramètre KO en raison donnée de m à n ; & il est visible qu'il ne faut pour cela que prendre $g = \frac{an}{m}$, puisque $LK. KO :: a. g :: m. n$.

Enfin pour faire en sorte que l'Hyperbole soit donnée, ou, ce qui est la même chose que son premier ou second axe LK & le parametre KO de cet axe soient égaux à des lignes données; je nomme d'abord le premier axe LK , $2t$; son parametre KO , p ; & j'ai $KO(p) = \frac{2pt}{a}$, & $LK(2t) = \frac{f}{\sqrt{cc+4dg-hg}}$ (il faut ref. souvenir que $h = \frac{b+g}{a}$); ce qui donne $g = \frac{a^2}{2t}$, & $f = \frac{2gt}{\sqrt{cc+4dg-hg}}$: d'où l'on voit que si $cc+4dg$ surpasse hg , & qu'on prenne pour g & pour f ces valeurs, on trouvera dans la construction de la cinquième équation pour le premier axe LK & son parametre KO les lignes données $2t$ & p . Mais s'il arrive que $cc+4dg$ soit moindre que hg , il faudra nommer le second axe LK , $2t$; & son parametre KO , p ; ce qui donne comme ci dessus $g = \frac{a^2}{2t}$, & $f = \frac{2gt}{\sqrt{hg-cc-4dg}}$; où l'on doit observer que $2t$ & p ne marquent plus à présent les mêmes lignes qu'auparavant: & s'il arrive que hg , dans cette dernière supposition où $2t$ marque le second axe; surpasse $cc+4dg$, il est visible qu'en prenant pour g & f ces valeurs dans la construction de la cinquième équation, on trouvera pour le second axe LK & son parametre KO les lignes données $2t$ & p .

Il faut bien remarquer qu'il peut arriver que la valeur de f soit imaginaire dans l'une & dans l'autre de ces suppositions; & alors on voit que la construction devient impossible du moins par cette methode. Or comme tous les Auteurs qui s'en sont servis après M. Sluze, qui en est l'inventeur, la donnent pour generale, j'en ferai une remarque à part, où je ferai voir en examinant par ordre tous les cas qui peuvent arriver, que dans cet exemple même il peut y en avoir une infinité où cette methode ne réussit point.

Si c'étoient deux Hyperboles conjuguées qui fussent données, la construction seroit toujours possible, car si

après avoir nommé le premier axe d'une de ces Hyperboles ZK , $2c$, & son parametre KO , p , il se trouvoit que la valeur de $f = \frac{2g^2}{\sqrt{cc+4dc-bg}}$ fût imaginaire, c'est à dire, que bg surpât $cc+4dg$; il n'y auroit qu'à se servir dans la construction à la place de cette Hyperbole de sa conjuguée & de son second axe, puisque le second axe de celle-ci étant le même que le premier axe de l'autre, la valeur de f ne renfermeroit plus aucune contradiction. Je dois encore avertir que s'il arrive que $cc+4dg=bg$, l'équation du quatrième degré s'abaisse à une du second.

REMARQUE.

397. 1^o. SI l'Hyperbole donnée est équilatere. On aura $g=a$, & on se servira dans la construction du Problème de son premier axe, lorsque $cc+4dg$ surpasse bg , c'est à dire, en mettant pour b la valeur $\frac{b+g}{4}$, & pour g la valeur

a , lorsque $cc+4ad$ surpasse $\overline{b+a}$; & du second lorsqu'il est moindre. Et la construction sera toujours possible.

2^o. Si le premier axe de l'Hyperbole donnée surpasse son parametre. On se servira dans la construction du Problème de son premier axe, lorsque $cc+4ad$ surpasse $\overline{b+a}$; car il suit de là que $cc+4dg$ surpasse bg , c'est à dire (en multipliant par $\frac{a}{g}$ & mettant pour b la

valeur $\frac{b+g}{a}$) que $\frac{ccc}{g}+4ad$ surpasse $\overline{b+g}$, puisque dans cette supposition $g(\frac{a}{g})$ étant moindre que a , la quantité $\frac{ccc}{g}+4ad$ sera plus grande que $cc+4ad$, & $\overline{b+g}$ sera moindre que $\overline{b+a}$. Au contraire lorsque $cc+4ad$ est moindre que $\overline{b+a}$, il faudra se servir du second axe; car il suit de là que $cc+4dg$ est moindre que bg , ou que $\frac{ccc}{g}+4ad$ est moindre que $\overline{b+g}$.

puisque $2x$ marquant à présent le second axe qui est moindre que son paramètre p la quantité $\frac{ap}{2x}$ est ici plus grande que a . D'où l'on voit que la construction est toujours possible, non seulement lorsque l'Hyperbole donnée est équilatère, mais encore lorsque le premier axe est plus grand que son paramètre.

3°. Si le premier axe est moindre que son paramètre. Il faudra nécessairement lorsque $cc + 4ad$ surpasse $\overline{b+a}$, se servir du premier axe; car si l'on employoit le second, il faudroit que $cc + 4dg$ fût moindre que hg , ou que $\frac{cc}{g} + 4ad$ fût moindre que $\overline{b+g}$; ce qui ne peut être, puisque $2x$ qui exprimeroit alors le second axe étant plus grand que p , la quantité $g(\frac{ap}{2x})$ seroit moindre que a . Mais en se servant du premier axe, il peut arriver que $\frac{cc}{g} + 4ad$ soit moindre que $\overline{b+g}$ puisque $g(\frac{ap}{2x})$ est plus grand que a ; & alors il est évident que la construction du Problème devient impossible, parce que la valeur de $f\left(\frac{2g^2}{\sqrt{cc+4dg-hg}}\right)$ renferme une contradiction. De même lorsque $cc + 4ad$ est moindre que $\overline{b+a}$, il faut nécessairement se servir du second axe; & comme alors la valeur de $g(\frac{ap}{2x})$ est moindre que a , il peut arriver que $\frac{cc}{g} + 4ad$ soit plus grand que $\overline{b+g}$, & qu'ainsi la valeur de $f\left(\frac{2g^2}{\sqrt{hg-cc-4dg}}\right)$ soit imaginaire.

Il est donc évident qu'il peut arriver une infinité de cas, où la construction de l'égalité proposée dans le Problème devient impossible; & cela lorsque le premier axe de l'Hyperbole donnée est moindre que son paramètre, car autrement elle réussira toujours.

COROLLAIRE I.

398. Si l'on prenoit dans le Problème précédent la quatrième équation au lieu de la cinquième, & qu'on fit la construction de même en se servant de l'Ellipse qui est le lieu de cette équation, au lieu de l'Hyperbole qui est le lieu de la cinquième : il est visible que l'on construira l'égalité proposée z^4 &c. par le moyen d'un cercle donné & d'une Ellipse semblable à une donnée ; ou avec une Ellipse donnée & un cercle.

COROLLAIRE II.

399. Il est évident qu'on peut rendre la construction précédente générale pour toutes sortes d'égalités du troisième & du quatrième degré, en observant 1°. De faire évanouir le second terme de l'égalité donnée, lorsqu'elle en a un ; de la multiplier ensuite par sa racine z lorsqu'elle n'est que du troisième degré ; & de prendre un plan ab égal à tous les plans qui multiplient z , un solide aac égal à tous les solides qui multiplient z , & enfin un sursolide a^3d égal à tous les sursolides donnés. 2°. D'effacer dans les valeurs de AD , DC , CF , AH , IH , LK , les termes où se trouve b lorsque zz ne se rencontre point dans l'égalité donnée, ceux dans lesquels se rencontrent c ou d lorsque le quatrième ou le cinquième terme manquent : & de changer de signes tous les termes où b se rencontre avec une dimension impair, si le troisième terme de l'équation donnée a un signe différent du troisième de la précédente ; comme aussi ceux dans lesquels c ou d se rencontrent avec une dimension impaire lorsque le quatrième ou le cinquième terme ont des signes différens des quatrième & cinquième de l'égalité précédente. 3°. De prendre du côté de PM ces lignes lorsque leurs valeurs sont positives, & du côté opposé lorsqu'elles sont négatives.

REMAR

REMARQUE.

400. ON peut toujours rendre la construction précédente plus simple dans les égalités particulières qu'on se propose de construire, en faisant en sorte que a soit égal à b ; car il n'y a qu'à réduire l'égalité donnée sous cette forme $z^4 + aaz^2 + aacz + a'd = 0$, au lieu de cette autre $z^4 + abzz + aacz + a'd = 0$. Ce qui a empêché de le faire d'abord, c'est qu'on avoit en vûe de rendre la construction du Problème générale pour tous les cas, comme l'on vient de faire dans le Corollaire précédent, & que pour cet effet il falloit que chaque terme de l'égalité renfermât des lettres différentes b, c, d , au premier degré.

PROPOSITION VI.

Problème.

401. TROUVER les racines de l'égalité $z^4 - bz^3 - aczz + aadz + aahh = 0$, par le moyen d'une Hyperbole donnée entre les Asymptotes, & d'un cercle. FIG. 122.

Ayant fait $z = \frac{ax}{f}$, on transformera l'égalité donnée en cette autre $x^4 - \frac{bf}{a}x^3 - \frac{cf}{a}xx + \frac{df}{a}x + \frac{bhf^4}{a^2} = 0$.
 Ayant mené d'un point quelconque M de l'Hyperbole donnée qui a pour centre le point A , une parallèle MP à l'une des Asymptotes AQ , & qui rencontre l'autre au point P , on nommera les inconnues & indéterminées AP, x ; PM, y ; lesquelles font entr'elles un angle donné APM , & on aura par la propriété de l'Hyperbole $xy = mm$, en supposant que mm en soit la puissance. Maintenant si l'on prend $f = m\sqrt{\frac{a}{b}}$, on aura $hff = am m'$, & $\frac{bhf^4}{a^2} = m^4 = xxyy$: & mettant à la place de $\frac{bhf^4}{a^2}$ qui est le dernier terme de l'égalité précédente sa valeur

xy , & divisant ensuite par xx , on trouvera $xx - \frac{bf}{a}x - \frac{cf}{a} + \frac{df}{ax} + yy = 0$, qui se change (en mettant dans le terme $\frac{df}{ax}$ à la place de x sa valeur $\frac{bf}{a}$ trouvée par le moyen de l'équation $xy = mm = \frac{bf}{a}$) en cette autre $xx - \frac{bf}{a}x - \frac{cf}{a} + \frac{df}{b}y + yy = 0$, dont le lieu est * un cercle lorsque l'angle APM est droit.

Mais lorsque l'angle APM n'est pas droit, ou (ce qui revient au même) lorsque l'Hyperbole donnée n'est pas équilatère, il est évident que le lieu de la dernière équation n'est plus un cercle, mais une Ellipse. C'est pourquoi afin de trouver une équation dont le lieu soit un cercle, je prens sur l'Asymptote AP la partie $AB = 2a$: & ayant mené BE parallèle à l'autre Asymptote AQ , je tire du centre A la perpendiculaire AE sur BE : & nommant les données BE, g ; AE, e ; je multiplie l'équation $xy - mm = 0$, dont l'Hyperbole donnée est le lieu, par $\frac{x}{a}$; & j'ai $\frac{exy}{a} - \frac{mxm}{a} = 0$. J'ajoute ensuite cette équation à la précédente lorsque l'angle fait par les Asymptotes est aigu, & je l'en retranche lorsqu'il est obtus comme je le suppose dans cette figure : cela me donne $yy - \frac{e}{a}xy + \frac{df}{b}y + xx - \frac{bf}{a}x - \frac{cf + gmm}{a} = 0$, dont le lieu est un cercle & qui se construit ainsi.

* Art. 327.

* 329.

FIG. 221.

Soit prise sur l'Asymptote AQ la partie $AD = \frac{df}{2b}$ du côté opposé à PM : soit tirée parallèlement à AE , la ligne $DC = \frac{bf}{a} - \frac{df}{2b}$ du côté de PM lorsque cette valeur est positive, & du côté opposé lorsqu'elle est négative : Enfin du centre C & du rayon $CM = \sqrt{AC^2 + \frac{cf - gmm}{a}}$ soit décrit un cercle. Je dis qu'il coupera l'Hyperbole donnée & son opposée en des points M , d'où ayant mené des parallèles MP à l'Asymptote

AQ ; les parties AP de l'autre Asymptote exprimeront les racines de l'égalité $x^4 - \frac{bf}{a}x^3 - \frac{cf}{a}xx + \frac{df^3}{a}x + \frac{hbf^4}{a} = 0$: savoir celles qui sont du côté de PM , les vraies; & celles qui sont du côté opposé, les fausses.

Car par la propriété du cercle, on trouve cette équation $yy - \frac{g}{a}xy + \frac{df}{b}y + xx - \frac{bf}{a}x - \frac{cf + gmm}{a} = 0$ qui se réduit (en mettant pour xy sa valeur mm) à cette autre $xx - \frac{bf}{a}x - \frac{cf}{a} + \frac{af}{b}y + yy = 0$, dans laquelle mettant enfin pour y sa valeur $\frac{mm}{x}$ ou $\frac{bdf}{ax}$, & pour yy le carré de cette valeur, on trouve l'égalité même proposée $x^4 - \frac{bf}{a}x^3$ &c.

Si l'angle fait par les Asymptotes étoit aigu; il faudroit changer dans les valeurs de AD & de CM , les signes des termes où g se rencontre, dont la raison est que BB (g) devient négative de positive qu'elle étoit. Mais lorsque l'Hyperbole est équilatère, il faut effacer les termes où g se rencontre & mettre pour e sa valeur $2a$ parce que AE tombe alors sur AB : ce qui rend la construction beaucoup plus simple.

Lorsqu'on a les différentes valeurs de x , il est évident qu'on a aussi celles de z , en faisant $z = \frac{ax}{f}$. Et c'est ce qui étoit proposé.

COROLLAIRE I.

402. Si le dernier terme de l'égalité proposée du quatrième degré, avoit le signe —, il est clair qu'en opérant comme ci-dessus, on trouveroit une équation dans laquelle le terme yy auroit le signe —, & dont le lieu par conséquent ne seroit pas un cercle, mais * une Hyperbole. * *Art. 332.* D'où l'on voit que cette méthode ne peut servir que pour les égalités du quatrième degré qui ont leur dernier terme avec le signe +.

COROLLAIRE I.

403. ON pourra toujours en se servant de la méthode précédente, résoudre toute égalité donnée du troisième degré $x^3 \mp nxx \mp apx \mp aaq = 0$; par le moyen d'une Hyperbole donnée entre ses Asymptotes, & d'un cercle. Car la multipliant par $x \mp r$ lorsqu'il y a $\mp aaq$, & par $x \mp r$ lorsque c'est $\mp aaq$, on la changera toujours en cette autre du quatrième degré.

$$x^4 \mp nx^3 \mp apxx \mp aaqx \mp aaqr = 0.$$

$$\mp r \quad \mp nr \quad \mp apr$$

dont le dernier terme $aaqr$ aura toujours le signe \mp , & qui sera par conséquent du nombre de celles qu'on peut construire de la manière précédente.

Mais on abrégera beaucoup la construction en observant 1°. De prendre pour l'unité arbitraire a la ligne m racine de la puissance de l'Hyperbole donnée, qui est le lieu de l'équation $xy = mm = aa$, puisque $m = a$. 2°. De profiter de l'indéterminée r pour égaler le dernier terme $aaqr$ avec $a^4 = xxyy$: ce qui donne $r = \frac{a^4}{q}$. 3°.

Que le cercle qui doit déterminer par ses intersections les racines de l'égalité coupera nécessairement l'Hyperbole lorsqu'il y a $\mp aaq$, & son opposée lorsque c'est $\mp aaq$, en un point K , d'où ayant mené une parallèle KH à l'Asymptote AQ , la partie AH de l'autre Asymptote doit être égale à r , puisque l'égalité du quatrième degré a pour une de ses racines $x = \mp r$. De là on tire cette construction qu'il est facile de rendre générale pour toutes les égalités du troisième degré.

Je suppose que l'angle fait par les Asymptotes de l'Hyperbole donnée soit aigu, & qu'ayant pris pour l'unité arbitraire a la racine de la puissance de l'Hyperbole donnée, on ait réduit l'égalité donnée du troisième degré sous cette expression $x^3 \mp nxx \mp apx \mp aaq = 0$. Ayant pris sur l'Asymptote AP la partie $AB = 2a$, & mené BE parallèle à l'autre Asymptote AQ , on tire

du centre A la perpendiculaire AE sur BE ; & ayant pris sur AQ la partie $AL = q$ du côté de PM , parce qu'il y a $-aaq$ dans l'égalité donnée , on tirera LK parallèle à AP , & qui rencontre l'Hyperbole au point K . Cela fait , on nommera les données BE, g ; AE, e ; LK, r ; & on prendra sur l'Asymptote AQ la partie $AD = \frac{er}{2a} - \frac{1}{2}q = \frac{-d}{2}$ pour abréger , & on tirera $DC = \frac{an+ar+dg}{e}$ parallèle à AE , en observant de prendre ou mener ces lignes du côté de PM lorsque leurs valeurs sont positives & du côté opposé lorsqu'elles sont negatives. On décrira enfin du centre C , & du rayon CK , un cercle qui coupera les Hyperboles opposées en des points M , d'où ayant mené des droites MP parallèles à l'Asymptote AQ ; les parties AP de l'autre Asymptote seront les racines de l'égalité proposée $x' - nxx - apx - aaq = 0$.

Car prolongeant les droites MP, KH , jusqu'à ce qu'elles rencontrent la ligne DC aussi prolongée , s'il est nécessaire aux points G, F ; on aura (à cause des triangles rectangles CFK, CGM) ces deux égalités $\overline{GM} + \overline{CG} = \overline{CM}$, & $\overline{FK} + \overline{CF} = \overline{CK}$: & par conséquent $\overline{GM} + \overline{CG} = \overline{FK} + \overline{CF}$, puisque les lignes CM, CK , sont rayons d'un même cercle. Or par la construction (je suppose ici pour éviter l'embarras des signes $+$ & $-$, que $\frac{er}{2a} - \frac{1}{2}q = +d$, c'est à dire , que cette valeur est positive) GM ou $PM + PG = y + \frac{e}{2a}x + d$, CG ou $DG - DC = \frac{ex}{2a} - \frac{an-ar-dg}{e}$, FK ou $KH + HF = q + \frac{e}{2a}r + d$, CF ou $CD - DF = \frac{an+ar+dg}{e} - \frac{er}{2a}$. C'est pourquoi mettant à la place de ces lignes leurs valeurs analytiques dans l'égalité precedente $\overline{GM} + \overline{CG} = \overline{FK} + \overline{CF}$ on en formera d'abord celle-ci $yy + \frac{e}{2a}xy + 2dy + \frac{xe+e^2}{4aa}xx$

$-nx - rx = qq + \frac{e}{a}rq + 2dq + \frac{gg + ee}{4aa}rr - nr - rr,$
 en s'épargnant la peine d'écrire de part & d'autre les
 quarrés de d & de $\frac{an + ar + dg}{a}$ qui se détruisent mutuel-
 lement. Si l'on considère à présent qu'à cause de l'Hy-
 perbole, le rectangle $xy = rq$, & qu'à cause du trian-
 gle rectangle AEB le quarré $aaa = gg + ee$, on
 changera l'équation précédente en celle-ci $yy + 2dy$
 $+ xx - nx - rx = qq + 2dq - nr$, dans laquelle
 mettant d'abord à la place de $2d$ la valeur $\frac{p}{a} - q$, & en-
 suite à la place de y & yy leurs valeurs $\frac{a}{x}$ & $\frac{a^2}{xx}$, & ordon-
 nant l'égalité il vient

$$\begin{aligned}
 x^3 - nx^2 - apxx - aaqx + a^3 = 0, \\
 -r + nr + apr
 \end{aligned}$$

qui étant divisé par $x - r$, donne enfin $x^3 - nx^2 - apx$
 $- aaq = 0$, qu'il falloit construire.

Pour rendre cette construction générale il faut observer,
 1°. De prendre la partie AL sur l'Asymptote AQ du côté
 opposé à PM lorsqu'il y a $+aaq$ dans l'égalité donnée ;
 & de changer de signes les termes où q & r se rencontrent
 dans les valeurs de AD , DC , 2°. De changer de signes
 le terme où p se rencontre dans la valeur de AD lorsqu'il
 y a $+apx$ dans l'égalité donnée, & de l'effacer lorsque
 ce terme y manque : il faut faire la même chose à l'égard
 du terme où n se rencontre dans la valeur de DC , lorf-
 qu'il y a $+nxx$. 3°. De changer de signe le terme où g
 se rencontre dans la valeur de DC , lorsque l'angle fait
 par les Asymptotes est obtus, & de l'effacer lorsqu'il est
 droit, en observant alors que $e = 2a$.

REMARQUE.

404. L'ALGÈBRE nous fournit des moyens faciles
 pour transformer toute égalité du quatrième degré, en
 une autre du même degré dont les signes des termes
 soient alternatifs. Or comme alors son dernier terme

aura toujours le signe $+$, il est visible qu'en se servant de cette préparation lorsque le dernier terme de l'égalité qu'on veut construire a le signe $-$, on rend la méthode du Problème générale pour toutes sortes d'égalités du quatrième degré. Mais parce que toutes les racines réelles d'une égalité, sont vraies, lorsque les signes de ses termes sont alternatifs; il s'ensuit qu'on n'a besoin alors que de l'Hyperbole donnée, puisque son opposée qui ne sert que pour les racines fausses devient inutile.

PROPOSITION VII.

Problème.

405. *Soit proposée à construire l'égalité du sixième degré*
 $x^6 - bx^5 + acx^4 - aadx^3 + a'cxx - a'fx + a'g = 0$,
 ou $x^6 - bx^5 + cx^4 + dx^3 + exx - fx + g = 0$
 (en sousentendant la ligne a qui rend le nombre des dimensions égal dans chaque terme, & que l'on regarde comme l'unité);
 par le moyen d'un cercle, & d'un lieu du troisième degré.

Je prends pour le lieu du troisième degré $x^3 - mxx - nx + q = pxy$, dans lequel les quantités m, n, p, q , que l'on regarde comme données, se doivent déterminer d'une manière convenable pour satisfaire au Problème; ce que je fais en cette sorte :

en quarrant chaque membre, j'ai

$$x^6 - 2mx^5 + mmx^4 + 2mnx^3 + nnxx - 2nqx + qq = ppxxyy,$$

$$- 2n \quad + 2q \quad - 2mq$$

& comparant les termes $- 2mx^5$, $- 2nqx$, $+ qq$ avec leurs correspondans dans la proposée $- bx^5$, $- fx$, $+ g$, je trouve $m = \frac{1}{2}b$, $q = \sqrt{g}$, $n = \frac{f}{2\sqrt{g}}$; & par conséquent $x^6 - 2mx^5 - 2nqx + qq = x^6 - bx^5 - fx + g$. Si l'on met à présent à la place de $x^6 - 2mx^5 - 2nqx + qq$ la valeur $pppxxyy - mmx^4$ &c. trouvée par le moyen de l'équation précédente, & à la place de $x^6 - bx^5 - fx + g$ la valeur $- cx^4 - dx^3$ &c. trouvée par le moyen de l'égalité donnée, & qu'ayant divisé par xx , on transf-

pose toutes les quantités du même côté, on formera cette équation

$$ppyy - mmxx - 2mnx - nn = 0, \\ + 2n \quad - 2q \quad + 2mq \\ + c \quad + d \quad + e$$

* Art. 318. dont le lieu sera * un cercle si la quantité $c + 2n - mm$ (qui multiplie le quarré xx) est positive, & qu'on prenne pp

♣ 319.

$= c + \frac{f}{\sqrt{g}} - \frac{1}{4}bb$; car divisant par pp , & faisant pour

abreger $2r = \frac{2mn+2q-d}{pp}$ & $ss = \frac{2mq+c-nn}{pp}$ ou $\frac{nn-2mq-d}{pp}$,

on aura $yy + xx - 2rx + ss = 0$: sçavoir $+ss$ lorsqu' que $2mq + e$ surpasse nn , & $-ss$, lorsqu'il est moindre.

Pour construire la ligne courbe qui est le lieu de la premiere équation $x' - xx - nx + q = -pxy$, je suppose à l'ordinaire deux lignes droites inconnues & indétermi-

FIG. 224. nées $AP(x)$, $PM(y)$ qui fassent entr'elles un angle droit APM ; & je tire par l'origine A des x , une ligne droite indéfinie AQ parallele à PM , sur laquelle ayant pris du côté de PM la partie $AG = \frac{n}{p}$, & du côté opposé la partie

$GB = \frac{q}{m}$, je mene du côté de PM la droite $BC = m$ perpendiculaire à AQ . Cela fait, je décris sur un plan séparé une Parabole MEM qui ait pour parametre de son axe la ligne $p = \sqrt{c + 2n - mm}$, & ayant placé ce plan sur celui-ci en sorte que l'axe de la Parabole se confonde avec la ligne AQ & que la Parabole s'étende vers le côté opposé à PM , je prends sur cet axe depuis son origine E vers le dedans de la Parabole la partie $EF = BG = \frac{q}{m}$.

Je me fers enfin d'une longue regle indéfinie CF mobile autour du point fixe C , & qui passe toujours par le point F , & la faisant tourner autour du point C , en sorte qu'elle fasse glisser la partie EF de l'axe de la Parabole le long de la ligne AQ . Je dis que les deux intersections continuelles M, M , de cette regle avec la Parabole MEM décriront dans ce mouvement deux lignes courbes qui seront le lieu qu'on

qu'on demande. Car par la construction AB ou AG — $GB = \frac{n}{p} - \frac{q}{mp}$, & par la propriété de la Parabole $EQ = \frac{x^2}{p}$ puisque AP ou $MQ = x$. Or les triangles semblables FQM , MDC , donnent FQ ou $EQ - EF$ $(\frac{x^2}{p} - \frac{q}{mp}) \cdot QM(x) :: DM$ ou $PM - AB(y + \frac{q}{mp} - \frac{n}{p}) \cdot CD(m - x)$. Donc en multipliant les extrêmes & les moyens, on aura $x^3 - mxx - nx + q = -pxy$. Et si l'on prend successivement les points M dans les trois angles qui suivent celui-ci, on trouvera toujours la même équation, en observant de faire $AP = -x$ & $PM = -y$ lorsque les points P & M tombent du côté opposé à celui-ci : de sorte que ces deux lignes courbes, qu'on peut appeller *conchoïdes paraboliques*, seront le lieu complet de toutes les valeurs tant vraies que fausses de l'inconnue y , qui répondent à toutes les valeurs tant vraies que fausses de l'autre inconnue x , dans l'égalité $x^3 - mxx - nx + q = -pxy$.

Pour construire le cercle qui est le lieu de la seconde équation $yy + xx - 2rx + ss = 0$, il n'y a qu'à prendre sur la droite indéfinie AP la partie $AH = r$ du côté de P , lorsque la valeur de r est positive ; & du côté opposé lorsqu'elle est négative ; ensuite du centre H & du rayon $HM = \sqrt{rr + ss}$, sçavoir $-ss$, lorsqu'il y a $+ss$ dans l'équation, & $+ss$ lorsque c'est $-ss$, décrire un cercle ; car à cause du triangle rectangle HPM , on aura toujours $HM^2 = HP^2 + PM^2$, c'est à dire en mettant les valeurs analytiques, & transposant tous les termes d'un côté $yy + xx - 2rx + ss = 0$.

Je dis maintenant que si des points M où ce cercle rencontre les conchoïdes paraboliques on mene des perpendiculaires MQ sur la droite indéfinie AQ ; ces lignes seront les racines de l'égalité proposée : sçavoir celles qui tombent à droit, les vraies ; & celles qui tombent à gauche, les fausses. Car menant des paralleles MP à AQ , on trouve par la propriété des conchoïdes cette équation

T t

$x^2 - mxx - nx + q = -pxy$, c'est à dire, en quarrant chaque membre, $ppxxyy = -x^2 - 2mx^2$ &c; & par la propriété du cercle, cette autre $yy + xx - 2rx + ss = 0$, laquelle étant multipliée par $ppxx$ donne $ppxxyy = -ppx^2 + 2pprx^2 + ppsxx$. Et comparant ensemble ces deux valeurs de $ppxxyy$, on formera une égalité dans laquelle si l'on met à la place de $2r, ss, pp, m, n, q$, leurs valeurs, on retrouvera l'égalité proposée $x^2 - bx^2$ &c.

S'il y avoit dans l'égalité proposée $-dx^2$ au lieu de $+dx^2$, il est visible qu'en prenant alors $2r = \frac{2mn + 2q + d}{pp}$, le reste de la construction ne changeroit point, puisque d ne se rencontre que dans la valeur de r . Et comme alors tous les signes des termes de l'égalité proposée sont alternatifs; c'est une maxime reçue en Algebre que toutes ses racines réelles seront vraies; c'est à dire, que si cette égalité a deux racines réelles & quatre imaginaires, les deux réelles seront vraies; si elle en a quatre réelles & deux imaginaires, les quatre seront vraies; & enfin si toutes les six sont réelles, elles seront toutes vraies. D'où l'on voit qu'on n'a besoin alors que de la conchoïde qui est décrite par la moitié de la Parabole qui tombe du côté du point fixe C , puisque l'autre ne sert que pour les racines fausses.

S'il arrivoit que la valeur du rayon du cercle fût nulle ou imaginaire, ou enfin si petite qu'il ne touchât, ni ne coupât les deux conchoïdes en aucun point; ce seroit une marque infailible que toutes les racines de l'égalité seroient imaginaires. S'il les coupoit en six points, toutes les racines seroient réelles. Et enfin s'il ne les coupoit qu'en quatre ou en deux, il n'y auroit que quatre ou deux racines réelles, & les autres seroient imaginaires. Il faut toujours prendre garde que si le cercle touchoit l'une des conchoïdes en quelque point, on doit regarder ce point comme s'il réunissoit deux points infiniment proches, en sorte que l'égalité proposée auroit deux racines égales à la perpendiculaire menée de ce point sur BE .

REMARQUE I.

406. IL suit de la description des deux conchoïdes paraboliques, 1°. Qu'elles ont pour Asymptote commune la droite BE infiniment prolongée de part & d'autre. 2°. Qu'une des conchoïdes passe par le point fixe C , & qu'alors la règle CF la touchera en ce point; puisque le point M se réunissant au point C , la règle passe par deux points infiniment proches de cette ligne courbe. 3°. Que lorsque le point F tombe sur B , la règle CF qui décrit par les intersections M, M , avec la Parabole les conchoïdes, tombe sur CB ; & qu'ainsi la ligne MM devient la double ordonnée qui part du point F : c'est à dire que la ligne CB rencontre les conchoïdes en deux points K, L , tels que BK & BL sont égales chacune à l'ordonnée à l'axe de la Parabole qui part du point F . D'où il est clair que si BC étoit égale à cette ordonnée, le point K tomberoit alors sur le point C ; & qu'ainsi la ligne BC qui passeroit par deux points infiniment proches K, C de la conchoïde la toucheroit en se réunissant toute entière dans le seul point C .

Il n'est pas nécessaire de se servir de la Parabole MEM FIG. 225. pour trouver les points des conchoïdes; car ayant pris sur BE la partie BO égale au paramètre de la Parabole, & décrit d'un diamètre quelconque OR plus grand que OB un cercle qui coupe BC aux points D, D ; on prendra sur ce diamètre la partie RS égale à EF , & on tirera par le point fixe C les deux droites CM, CM , parallèles à DS, DS , qui rencontreront les parallèles DM, DM , à EB en des points M, M , qui seront aux deux conchoïdes. Car ayant prolongé CM jusqu'à ce qu'elle rencontre l'Asymptote BE au point F ; & mené MQ parallèle à BC ; il est clair que les triangles rectangles MQF, DBS , seront égaux, & qu'ainsi FQ est égale à BS . Or ayant pris RS égale à EF ; on aura $EF + FQ$, ou $EQ = RS + SB$ ou RB ; & la Parabole EM qui a pour sommet le point E , & pour

T t ij

parametre une ligne égale à BO , passera par le point M ; puisque par la propriété du cercle le quarré de BD ou MQ , est égal au rectangle de BK ou EQ par le parametre de BO ; ce que donne aussi la propriété de la parabole. D'où il suit que le point M trouvé par cette construction, n'est pas différent de celui que donneroit l'intersection de la regle CF avec la demie Parabole EM . *Et c'est ce qu'il falloit démontrer.*

Si le point D étoit donné, il ne faudroit pour avoir le point R , que mener DR perpendiculaire à OD ; & le reste de la construction ne changeroit point.

J'avertirai ici en passant, 1°. Que si l'on prend sur BC du côté du point C , une partie BD égale à la vraie racine de l'égalité du troisième degré $x^3 - \frac{1}{2}mx^2 - \frac{1}{2}mnp = 0$ (les données $BC = m$, $Et = n$, $BO = p$); & qu'on trouve ensuite le point M comme l'on vient d'enseigner: ce point sera plus éloigné de la droite BC que tous les autres points de la portion KMC , de sorte que la tangente qui passe par ce point sera parallèle à BC . 2°. Que si l'on prend sur BC prolongée de l'autre côté du point B , une partie BD égale à la vraie racine de l'égalité $x^3 - mnp = 0$; le point M de la conchoïde, qui repond au point D , en sera le point d'inflexion: c'est à dire le point où de concave elle devient convexe. Comme ceci dépend des principes que j'ai établis dans mon Livre des Infiniment petits, on doit le supposer comme vraie, & remettre à en chercher la raison après avoir lû ce Livre ou quelque chose d'équivalent, d'autant plus que cela est inutile pour la resolution des égalités du sixième degré dont il est ici question.

REMARQUE II.

407. IL est visible que pour décrire les deux conchoïdes paraboliques, il faut 1°. Que la ligne BC ($\frac{1}{2}b$) ait quelque grandeur, & qu'ainsi l'égalité proposée doit avoir un second terme. 2°. Que le terme q ne peut être

nul dans l'équation $x^3 - mxx - nx + q = -pxy$, puisqu'en divisant par x , elle deviendrait cette autre $xx - mx - n = -py$, dont le lieu est une Parabole ; d'où il est clair que le dernier terme g se doit trouver dans l'égalité proposée avec le signe $+$, puisque $q = \sqrt{g}$.

De plus si le terme fx avoit le signe $+$, on lui donneroit le signe $-$ en changeant aussi les signes du deuxième & du quatrième terme ; ce qui ne troubleroit point l'égalité, mais changeroit seulement les racines fausses en vraies & les vraies en fausses. Et afin que le lieu de la deuxième équation pût être un cercle, il faudroit que $\frac{f}{\sqrt{g}} \mp c$ (sçavoir $+$ c lorsqu'il y a $+cx^2$, & $-c$ lorsqu'il y a $-cx^2$) surpassât $\frac{1}{4}bb$. D'où l'on voit que le terme fx manquant, il faut que le terme cx^2 ait le signe $+$, & que c surpassé $\frac{1}{4}bb$; & que si le terme cx^2 manque, $\frac{f}{\sqrt{g}}$ doit surpasser $\frac{1}{4}bb$.

Il est donc évident que ce sont là les conditions que doit avoir nécessairement l'égalité proposée du sixième degré, afin qu'on la puisse construire immédiatement par le moyen des conchoïdes paraboliques, & du cercle, comme l'on vient de faire la précédente.

REMARQUE III.

408. LORSQUE l'égalité donnée n'est que du cinquième degré, on peut souvent en l'élevant au sixième, lui donner en même temps toutes les conditions nécessaires pour être construite immédiatement. En voici quelques exemples.

Soit 1°. $x^5 - a^4b = 0$, où l'on suppose que a surpassé b . Je multiplie cette égalité par $x - b$, pour avoir celle du sixième $x^6 - bx^5 - a^4bx + a^4bb = 0$, qui a toutes les conditions requises dans la remarque précédente.

Soit 2°. $x^5 - 5aax^3 + 5a^2x - a^4b = 0$, dans laquelle a surpassé b . Je multiplie cette égalité par $x - b$, & j'ai $x^6 - bx^5 - 5aax^4 + 5a^2bx^3 + 5a^2xx - 6a^4bx + a^4bb = 0$, qui a toutes les conditions nécessaires.

Soit 3°. $x^3 - ax^2 - 4aax' + 3a'xx + 3a^2x - a^3 = 0$.
Je multiplie cette égalité par $x - 4a$; ce qui me donne
 $x^4 - 5ax^3 + 19a'x^2 - 9aaxx - 13a^2x + 4a^3 = 0$, qui
est une égalité du sixième degré, dans laquelle toutes les
conditions nécessaires se rencontrent.

Il est bon d'avertir que la première égalité $x^3 - a^2b = 0$,
sert à trouver quatre moyennes proportionnelles entre
les deux extrêmes A, B ; que la seconde $x^3 - 5aax' &c.$
sert à diviser un angle donné en cinq parties égales ; &
enfin que la troisième $x^3 - ax^2 &c.$ sert à inscrire dans
un cercle donné un Polygone regulier de onze côtés : &
c'est ce qu'on verra dans les articles du Livre suivant.
Je vais donner la construction de la première de ces éga-
lités, afin qu'on la puisse comparer avec celle qu'on
trouve à la fin du troisième Livre de la Geometrie de M.
Descartes.

FIG. 216. Ayant décrit une Parabole ME qui ait pour le para-
metre de son axe une ligne $p = \sqrt{aa - \frac{1}{4}bb}$, & pris du
côté que l'on voit dans la figure les lignes $AG = \frac{aa}{2p}$,
 GB ou $EF = 4AG$, $BC = \frac{1}{2}b$, $AH = \frac{1}{4} \frac{aa^2b}{p^3}$, & une
ligne $s = \frac{a}{2p} \sqrt{4bb - aa}$, ou $\frac{a}{2p} \sqrt{aa - 4bb}$; on décri-
ra d'abord une conchoïde parabolique COM (comme l'on
a enseigné dans l'article 404) à l'aide de la Parabole
 ME , & d'une longue regle CF qui tourne librement
autour du point fixe C , & qui passe toujours par le point
 F , pendant que la partie EF de l'axe de la Parabole glis-
se le long de la ligne AQ ; & ensuite un cercle du cen-
tre H & du rayon $HM = \sqrt{AH^2 \mp ss}$, sçavoir $+$ ss
lorsque $4bb$ surpasse aa , & $-ss$ lorsqu'il est moindre.
Je dis que si des points O, M , où ce cercle rencontre la
conchoïde, on mene des perpendiculaires QR, MP , sur
 AP ; les parties AR, AP , seront les racines de l'égalité
 $x^3 - bx^2 - a^2bx + a^2bb = 0$. Cela se prouve comme
dans l'article 404.

On peut s'épargner la peine de trouver une ligne $s = \frac{a}{2p} \sqrt{4bb - aa}$, ou $\frac{a}{2p} \sqrt{aa - 4bb}$; si l'on fait attention que le cercle décrit du centre M , doit couper la conchoïde COM en un point O , tel qu'ayant mené OR perpendiculaire sur AP , on a la partie $AR = b$; puis-que l'une des racines de cette égalité est $x = b$. C'est pour-quoi ayant pris sur AP la partie $AR = b$, & tiré RO perpendiculaire à AP & qui rencontre en O la conchoïde COM ; il n'y a qu'à décrire du centre H & du rayon HO un cercle. Car il la coupera en un autre point M , tel, qu'ayant mené MP perpendiculaire sur AP , la ligne AP sera la plus grande des quatre moyennes proportionnelles qu'on demande. Comme le cercle décrit du centre H ne coupe la conchoïde qui passe par le point C qu'en deux points O , M , & ne rencontre point l'autre; il s'ensuit que l'égalité proposée $x^6 - bx^4$ &c. n'a que deux racines vraies AR , AP , & les quatre autres imaginaires.

REMARQUE. IV.

409. LORSQUE l'égalité donnée du sixième degré n'a point les conditions nécessaires pour être construite immédiatement par la methode que l'on vient d'expliquer, ou bien qu'étant du cinquième degré, la remarque precedente se trouve inutile, on pourra se servir de la preparation qu'enseigne M. Descartes dans le troisième Livre de sa Geometrie. On y trouve la maniere de transformer toute égalité du cinquième ou du sixième degré en une autre du sixième, dans laquelle tous les termes se rencontrent avec des signes alternatifs, & où la quantité connue du troisième terme surpasse le carré de la moitié de la quantité connue du second: ce qui rend la construction du Problème generale pour toutes sortes d'égalités du cinquième & du sixième degré. Je ne m'arrêterai point ici à expliquer cette preparation, parce qu'elle dépend de l'Algebre pure dont je n'ai point

entrepris de parler, & que d'ailleurs je vais donner dans la proposition suivante une construction generale pour toutes sortes d'égalités du cinquième & du sixième degré, qui ne suppose point d'autre preparation que celle de faire évanouir le second terme.

PROPOSITION VIII.

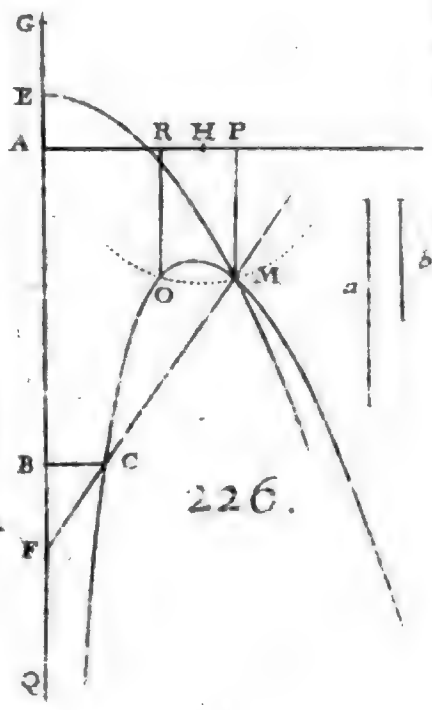
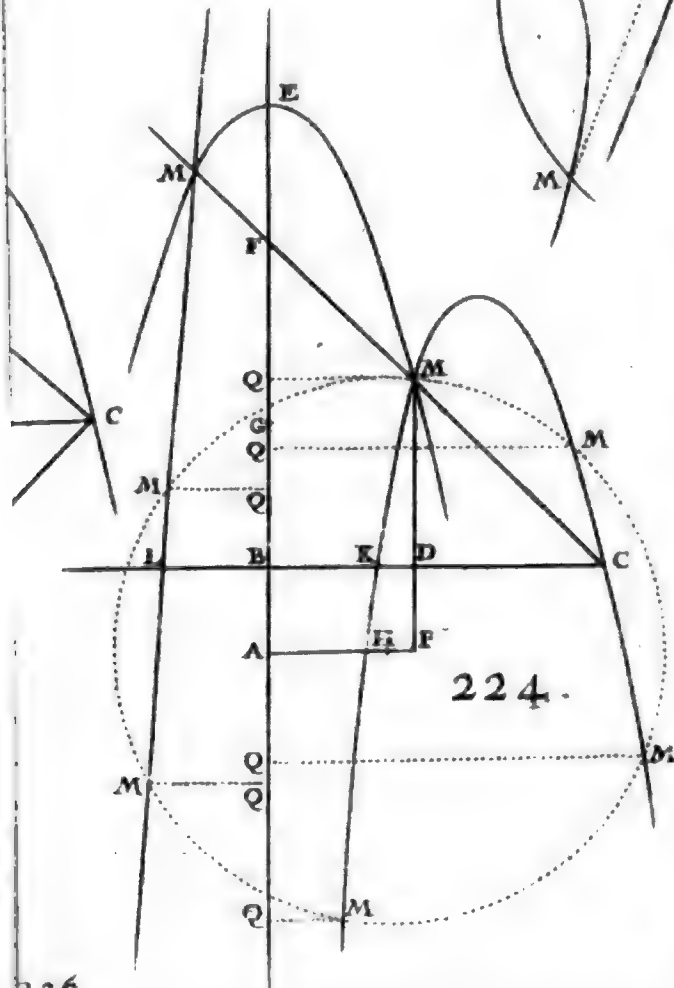
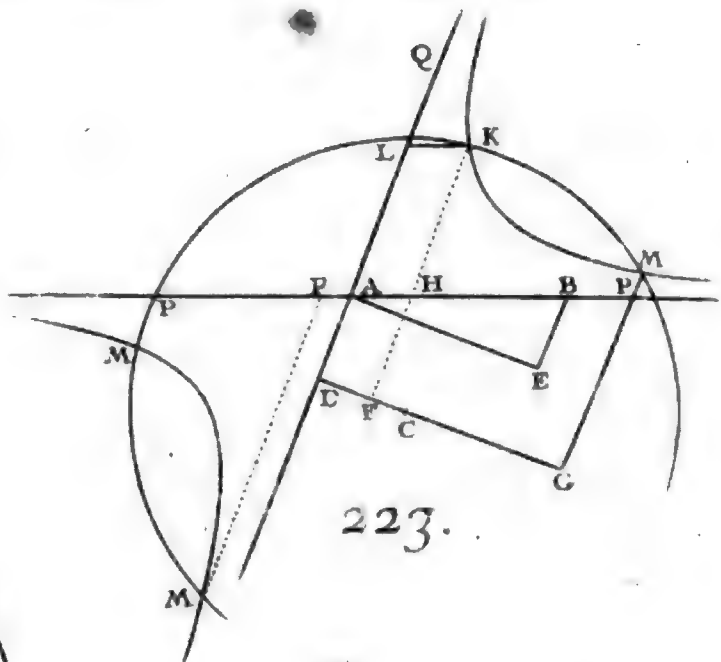
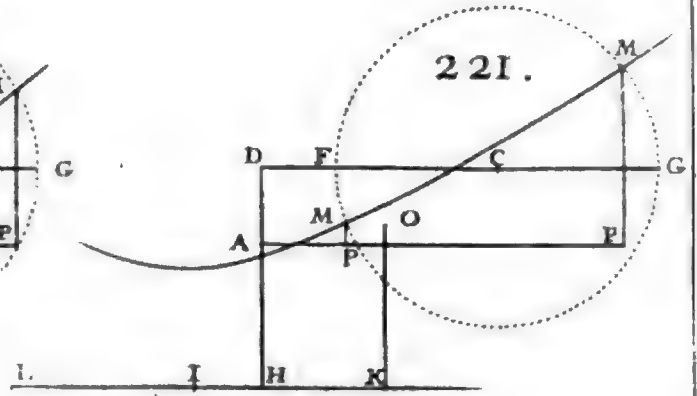
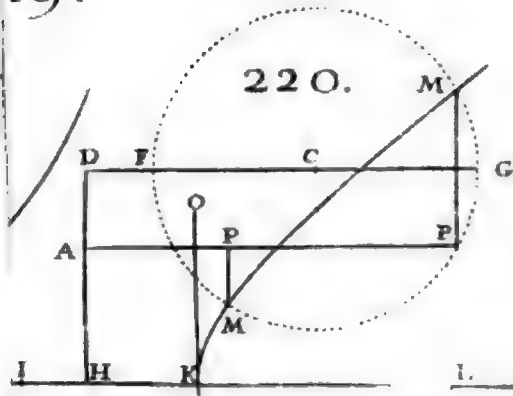
Problème.

410. **T**ROUVER les racines de l'égalité $x^5 - bx^4 - cx^3 + dx^2 - fx + g = 0$, par le moyen d'une premiere Parabole cubique donnée, & d'une Section conique.

FIG. 217. Soit $axy = x^5$ l'équation dont le lieu est la premiere Parabole cubique MAM ($AP = x$, $PM = y$, $AB = a$). Je mets dans l'égalité proposée à la place de x^5 sa valeur $a^4 yy$, à la place de x^4 sa valeur $axxy$, & à la place de x^3 sa valeur axy ; ce qui la change en cette équation du second degré $yy - \frac{b}{a}xy - \frac{c}{a}y + \frac{d}{a}xx - \frac{f}{a}x + \frac{g}{a} = 0$, dont le lieu est une Ellipse* lorsque d surpasse $\frac{1}{4}bb$, c'est à dire, lorsque la quantité connue qui multiplie xx surpasse le quarré de la moitié de la quantité connue qui multiplie x^2 , comme je le suppose ici. Et si l'on veut que la ligne qui fait l'office de l'unité dans l'égalité proposée, & qui y est sousentendue, soit égale au parametre a de la Parabole cubique donnée; cette équation se changera en celle-ci $yy - \frac{b}{a}xy - cy + \frac{d}{a}xx - fx + ag = 0$, dont voici la construction.

Ayant pris sur la droite indéfinie AP la partie $AB = a$, on tirera parallelement à PM & du même côté les droites $BE = \frac{1}{2}b$, $AD = \frac{1}{2}c$: & on menera par le point A la droite AE (e), & par le point D une parallele DG à AE , sur laquelle on prendra du côté de PM la partie DC (s) $= \frac{2afe + bce}{4ad - bb}$, & de part & d'autre du point C les parties

19.



236.

parties CK, CZ , égales chacune à $t = \sqrt{ss + \frac{ccce - 4agee}{4ad - bb}}$.

Cela fait, du diamètre LK ($2t$) qui ait pour parametre une ligne $KH = \frac{4adt - bbt}{2ce}$, & pour ordonnées des droites paralleles à PM , on décrira l'Ellipse cherchée.

Maintenant si des points de rencontre de cette Ellipse avec la Parabole cubique donnée, on abaisse des lignes MP qui fassent avec AP l'angle donné ou pris à volonté APM , les parties AP de la droite indéfinie sur laquelle s'étend l'indéterminée x seront les racines cherchées, savoir celles qui tombent du côté où l'on a supposé PM en faisant la construction, les vraies, & celles qui tombent du côté opposé, les fausses. Car par la propriété de la Section conique il vient $yy - \frac{b}{a}xy - cy + \frac{d}{a}xx - fx + ag = 0$, & par la propriété de la Parabole cubique, $y = \frac{x^3}{aa}$; & mettant cette valeur à la place de y & son quarré à la place de yy dans l'équation précédente, on retrouve l'égalité donnée $x^6 - abx^4 - aacx^3 \&c. = 0$.

REMARQUE I.

411. **TOUTE** égalité du cinquième ou du sixième degré étant donnée, si l'on en fait évanouir le second terme, & qu'après l'avoir multipliée par l'inconnue x lorsqu'elle n'est que du cinquième degré, on se serve du parametre a de la Parabole cubique donnée pour réduire sous l'expression ab les quantités connues qui multiplient x^6 , sous l'expression aac celles qui multiplient x^3 &c; il est visible qu'en faisant la substitution comme ci-dessus, on transformera toujours l'égalité donnée en un lieu du second degré. D'où l'on voit qu'ayant une fois décrit avec exactitude une Parabole cubique qui ait pour parametre une ligne quelconque a , & dont l'angle APM que font les appliquées PM avec le diamètre AP , peut être pris à volonté; on pourra toujours par

Vu

son moyen, en décrivant de plus une Section conique convenable, résoudre toutes sortes d'égalités du cinquième & du sixième degré.

REMARQUE II.

412. **L**ORSQU'APRÈS avoir fait évanouir le second terme d'une égalité donnée du cinquième & du sixième degré, & l'avoir multipliée par l'inconnue x si elle n'est que du cinquième; la quantité connue qui multiplie le quarré xx est positive, & surpasse le quarré de la moitié de celle qui multiplie x^4 : on arrivera toujours en faisant la substitution par le moyen de $ay = x^4$, à une équation du second degré dont le lieu est une Ellipse, comme l'on a vû dans ce Problème. Or l'on pourra toujours faire en sorte que cette Ellipse devienne un cercle, mais alors la Parabole cubique ne peut plus être donnée. Voici comment il s'y faudra prendre.

- * *Art.* 378. Ayant trouvé une ligne a^* dont le quarré de quarré a^4 soit égal à la quantité connue qui multiplie xx , on se servira de cette ligne a pour reduire sous l'expression ab toutes les quantités connues qui multiplient x^4 , sous l'expression aac celles qui multiplient x^3 &c; ce qui reduira l'égalité donnée sous cette forme $x^4 \pm abx^4 \pm aacx^3 \pm a^4xx \pm a^4fx \pm a^4g = 0$. Et mettant a^4yy , $aaxy$ & ayy à la place de x^4 , x^3 & x^2 , on trouvera cette équation du second degré $yy \pm \frac{b}{a}xy \pm cy \pm xx \pm fx \pm ag$
- * *Art.* 327. $= 0$, dont le lieu sera * un cercle, si l'on fait en sorte
 & 319. que l'angle AEB soit droit; ce qui est facile en cette maniere.

FIG. 118. Ayant pris sur la droite indéfinie AP la partie $AB = a$, on décrira de cette ligne comme diametre un demi cercle AEB , du côté où l'on suppose que PM doit tomber, lorsqu'il y a $-\frac{b}{a}xy$, & du côté opposé lorsqu'il y a $+\frac{b}{a}xy$. On portera sur la demi circonfe-

rence de B en E , une ligne $BE = \frac{1}{2}b$; & ayant tiré AE (e), la ligne PM doit être parallèle à BE , & on achèvera le reste de la construction comme pour l'Ellipse, qui deviendra alors un cercle; puisque l'angle CGM sera droit, & qu'à cause du triangle rectangle AEB il vient $ee = aa - \frac{1}{4}bb$, qui doit exprimer la raison du diamètre LK à son paramètre. La figure qui est ici à côté représente la construction de l'équation $yy - \frac{b}{a}xy - cy + xx - fx - ag = 0$, qui n'est différente de celle du Problème qu'en ce que $d = a$.

Maintenant ayant pris sur la ligne AB autant de parties AP , AP , &c. qu'on voudra, & mené des parallèles PM , PM , &c. à BE ; on prendra chaque PM égale à la quatrième proportionnelle à sa correspondante AP & la donnée AB . Et faisant passer une ligne courbe MAM par tous les points M ainsi trouvés, il est évident qu'elle sera le lieu de l'équation $x^3 = aay$, & par conséquent la première Parabole cubique qui par ses points d'intersection M , M , avec le cercle, servira à découvrir les racines AP , AP , de l'égalité proposée.

REMARQUE III.

413. COMME l'on a parlé souvent dans ce Livre des Paraboles de tous les degrés, & qu'on vient même d'employer la première Parabole cubique pour résoudre les égalités du cinquième & du sixième degré; je crois qu'il n'est pas hors de propos d'examiner les différentes figures qu'elles peuvent avoir. Soient donc données de position deux lignes droites indéfinies BC , DE , qui s'entrecoupent au point A , & soit dans l'angle BAD FIG. 229. une Parabole AM de tel degré qu'on voudra, dont la nature est telle qu'ayant mené d'un de ses points quelconques M une parallèle MP à DE , qui rencontre BC au point P ; & ayant nommé les indéterminées AP , x ; PM , y ; la donnée AB , 1 ; on ait toujours $x^m = y^n$ (les lettres m & n marquent les exposans des puissances de

Vu ij

x & y qui peuvent être tels nombres positifs entiers qu'on voudra ; & l'on suppose seulement que m surpasse n). Il est évident 1°. Que $AP(x)$ étant nulle ou zero, $PM(y)$ l'est aussi, & que plus $AP(x)$ croît, plus aussi $PM(y)$ augmente ; & cela à l'infini. 2°. Que la sous-tangente PT^* ($\frac{n}{m}x$) est toujours moindre que $AP(x)$, puisque l'on suppose ici que n soit moindre que m . D'où il suit que la Parabole AM de tel degré qu'elle puisse être, passera toujours par le point A ; qu'elle s'éloignera de plus en plus à l'infini de la droite BC que l'on regarde comme son diamètre ; & enfin qu'elle tournera sa convexité du côté de ce diamètre. Mais comme la ligne courbe AM qui tombe dans l'angle DAB , n'est qu'une portion de cette Parabole, il reste à examiner dans lequel des angles DAC , CAE , EAB , elle doit se continuer ; & pour cela il faut distinguer trois differens cas.

Premier cas. Lorsque l'exposant m de la puissance de x est un nombre pair, & l'exposant n de la puissance de y un nombre impair. La racine m de x^m sera $\mp x$, & la racine n de y^n sera seulement $+y$; car soit par exemple, $m = 4$, & $n = 3$, il est clair que le quarré de quarré où la puissance quatrième de $\mp x$ est toujours x^4 , & qu'il n'en est pas de même du cube de $\mp y$; puisque le cube de $+y$ est y^3 , & celui de $-y$ est $-y^3$. De là il est évident que $AP(x)$ peut être positive & negative, & $PM(y)$ toujours positive ; d'où l'on voit que la Parabole AM doit se continuer dans l'angle DAC , qui est à côté de l'angle BAD , en sorte que si par un point quelconque K de la ligne AD , on tire une parallèle à BC elle rencontrera la Parabole AM en deux points M, M' , qui seront également éloignés du point K . Telle est la Parabole ordinaire qui est le lieu de l'équation $xx = ay$, ou $xx = y$ en faisant le parametre $a = 1$.

FIG. 229.

Second cas. Lorsque les exposans m & n sont des nombres impairs. La racine m de x^m sera seulement $+x$, & de même la racine n sera $+y$; mais parce que l'équation

$-x^m = -y^n$ est la même que $x^m = y^n$, & que la racine m de $-x^m$ est $-x$, & la racine n de $-y^n$ est $-y$; il s'en suit que $AP(x)$ peut être positive & negative de même que $PM(y)$, en observant que lorsque AP est positive, PM l'est aussi, & au contraire. D'où l'on voit que la Parabole AM doit alors se continuer dans l'angle CAE opposé au sommet à l'angle BAD , dans une position toute semblable, mais renversée; en sorte que prenant AP égale à AP , & menant PM qui fasse avec AP l'angle APM égale à l'angle APM ; cette ligne PM rencontre la portion AM qui tombe dans l'angle CAE , en un point M tel que PM est égal à PM . Telle est la première Parabole cubique $x' = aay$, ou $x' = y$ en faisant $a = 1$.

FIG. 230.

Troisième cas. Lorsque l'exposant m de la puissance de x est un nombre impair, & l'exposant n de la puissance de y un nombre pair. La racine m de x^m sera toujours $+x$, & la racine n de y^n sera $\mp y$; car soit par exemple, AM une seconde Parabole cubique qui est le lieu de l'équation $x' = ayy$, ou $x' = yy$, il est clair que la racine cubique de x' est seulement $+x$, & que celle de yy est $\mp y$. D'où il suit que la Parabole AM doit se continuer dans l'angle BAE qui est à côté de l'angle BAD ; en sorte que si l'on mène par un point quelconque P de la ligne AB une parallèle à DE , elle rencontrera la Parabole entière MAM en deux points M, M , également éloignés du point P .

FIG. 231.

Or l'équation générale $x^m = y^n$ appartient toujours à l'un de ces trois cas; car si m & n étoient deux nombres pairs, on extrayeroit de part & d'autre la racine quadrée autant de fois qu'il seroit possible; ce qui la réduiroit à une équation dont l'un des exposans seroit nécessairement impair. Et l'on peut toujours supposer que m surpasse n ; car s'il étoit moindre, & qu'on eût par exemple, $aaax = y'$, on trouveroit en rapportant les points de la Parabole AM à ceux de la ligne DE , & nommant alors AK, x ; KM, y ; cette autre équation $x' = aay$

FIG. 232.

qui exprimeroit aussi la nature de la même Parabole AM , & dans laquelle l'exposant de la puissance de x est plus grand que celui de la puissance de y ; de sorte qu'on pourroit faire alors le même raisonnement par rapport à la ligne DE , qu'on vient de faire par rapport à la ligne BC . De là il est évident que toutes les Paraboles de tel degré qu'elles puissent être, auront toujours l'une des trois figures précédentes.

PROPOSITION IX.

Problème.

414. *SOIT proposée à construire l'égalité du huitième degré*
 $x^8 - bx^7 + cx^6 - dx^5 + ex^4 - fx^3 + gxx - hx + l = 0$,
dans laquelle aucun terme ne manque, par le moyen de deux lieux
geometriques; l'un du second degré, & l'autre du quatrième.

Ayant pris $xx = ay$ pour le lieu du second degré, on substituera à la place de $x^8, x^7, x^6, x^5, x^4, x^3$, & xx , leurs valeurs $a^4y^4, a^3y^3x, a^2y^2, aayyx, ayy, ayx, ay$, & en prenant la droite donnée a pour l'unité, on aura cette autre équation $y^4 - \frac{b}{a}xy^3 + cy^3 - dxyy + ayy - afxy + aagy - aahx + a'l = 0$ dont le lieu est du quatrième degré, & des plus simples; puisque l'une des inconnuës x n'étant qu'au premier degré, on pourra en déterminer tous les points en ne se servant que de cercles & de lignes droites.

Si l'on construit à présent la Parabole qui est le lieu de la première équation $xx = ay$, & qu'ayant pris pour y autant de différentes grandeurs que l'on voudra; on détermine les valeurs de x qui leur répondent dans la seconde équation; le lieu qui passera par les extrémités de toutes les y , & qui sera par conséquent celui de la seconde équation, déterminera par le moyen des points où il rencontre la Parabole, les valeurs cherchées des racines de l'équation donnée. Ce qui est visible; puisque mettant dans cette seconde équation pour y sa valeur

$\frac{x}{a}$, & pour les puissances de y les puissances de cette valeur, on trouve l'équation donnée $x^3 - b x^2 + c = 0$.

COROLLAIRE I.

415. COMME l'unité a est arbitraire, on peut supposer qu'elle est donnée, & qu'ainsi la Parabole qui est le lieu de la première équation $xx = ay$ est donnée. Or il est évident qu'on pourra toujours par le moyen de cette équation transformer toute égalité du septième ou huitième degré, en une autre équation du quatrième, dans laquelle l'inconnue x ne se trouve qu'au premier degré. D'où il suit que toute égalité du septième ou du huitième degré, dans laquelle ou tous les termes se rencontrent ou seulement une partie, se pourra toujours construire par le moyen d'une Parabole donnée & d'un lieu du quatrième degré, dans lequel l'une des inconnues ne se trouvera qu'au premier; & cela sans autre préparation que de prendre pour l'unité le paramètre a de la Parabole donnée, afin de réduire sous l'expression ac les quantités connues qui multiplient x^4 , sous l'expression aad celles qui multiplient x^3 , &c.

COROLLAIRE II.

416. ON prouvera de même que toute égalité du neuvième ou du dixième degré se pourra toujours construire par le moyen d'une Parabole donnée, & d'un lieu du cinquième degré dans lequel l'une des inconnues ne se trouvera qu'au premier degré: que les égalités de l'onzième & du douzième degré se construiront encore par le moyen d'une Parabole donnée, & d'un lieu du sixième degré; & ainsi de suite pour les autres à l'infini.

PROPOSITION X.

Problème.

417. **C**ONSTRUIRE l'égalité du neuvième degré $x^3 - bx^2 + cx + c = 0$, dans laquelle tous les termes se rencontrent excepté le second ; par le moyen de deux lieux géométriques chacun du troisième degré.

Ayant pris $x^3 = aay$ pour l'un des lieux du troisième degré, on substituera à la place de x^3, x^2, x , &c. leurs valeurs a^3y^3, a^2xyy, a^2yy , &c, & l'on aura pour l'autre lieu du troisième degré, en prenant a pour l'unité ;

$y^3 - \frac{b}{a}xyy + cyy + c = 0$ dans lequel l'inconnue x ne peut monter qu'au second degré, puisqu'on suppose que par tout où il y a x^3 dans la proposée, on substitue à sa place aay .

Or il est visible que si l'on construit ce lieu avec la Parabole cubique, qui est le lieu de l'autre équation $x^3 = aay$; leurs points de rencontre détermineront les racines de l'égalité donnée.

COROLLAIRE.

418. **T**OUTE égalité du sixième, du huitième ou du neuvième degré étant donnée, il est visible qu'après avoir fait évanouir son second terme, & l'avoir multipliée par sa racine x lorsqu'elle est du huitième degré, & par son quarré xx lorsqu'elle n'est que du septième, on la transformera toujours en un lieu du troisième degré en se servant de l'équation $x^3 = aay$ dont le lieu est une Parabole cubique donnée, & faisant la substitution comme ci-dessus : de sorte que cette maniere est generale pour toutes les égalités du septième, du huitième & du neuvième degré. On trouvera de même que toute égalité du douzième degré dont le second terme est évanoui, se transformera en un lieu du quatrième, en se servant encore de l'équation $x^3 = aay$; comme aussi celles du

du dixième & du onzième degré en les élevant au douzième.

Mais si l'on propose une égalité du seizième degré dans laquelle tous les termes se rencontrent, excepté le deuxième, on trouvera qu'en se servant du lieu du quatrième degré $x^4 = a^4 y$, on la transformera en un lieu du cinquième. On trouvera de même qu'une égalité du vingtième degré se transformera en un lieu du sixième, en se servant encore du lieu du quatrième degré $x^4 = a^4 y$; comme aussi celles du dix-septième, dix huitième & dix-neuvième degré: que les égalités du vingt-cinquième degré dans lesquelles tous les termes se rencontrent, excepté le deuxième, se transformeront en un lieu du sixième degré, en se servant du lieu du cinquième $x^5 = a^5 y$; comme aussi toutes les égalités du vingt-unième, vingt-troisième & vingt-quatrième degré. Et l'on peut continuer cette recherche autant qu'on voudra.

REMARQUE I.

419. IL est à propos de remarquer que si dans une égalité du seizième degré non seulement le second terme manquoit, mais le troisième & le sixième; le lieu du cinquième degré lequel joint avec celui du quatrième $x^4 = a^4 y$ sert à construire l'égalité se transformeroit en un du quatrième, & on peut faire des remarques semblables sur les égalités des degrés plus élevés. Mais quoiqu'il soit vrai de dire qu'une égalité du seizième degré dans laquelle il n'y a que le deuxième terme qui manque, ne se peut transformer qu'en un lieu du cinquième, si l'on employe à cet effet le lieu du quatrième $x^4 = a^4 y$ qui n'a que deux termes; on n'en doit pas conclure en general, que les lieux les plus simples pour résoudre une équation complete du seizième degré, doivent être; l'un du quatrième & l'autre du cinquième. Car au contraire, il me paroît évident que si l'on se sert d'un lieu du quatrième degré composé de plusieurs termes à la

place de $x^4 = a'y$ qui n'en a que deux, on pourra choisir ce lieu en sorte qu'il servira à transformer l'égalité complete du seizième degré en un autre lieu du quatrième. En voici la raison. Si l'on prend deux lieux du quatrième degré dans l'un desquels l'inconnue x monte au quatrième degré, & dans l'autre l'inconnue y , il est constant par les regles de l'Algebre, qu'en faisant évanouir l'inconnue y par le moyen de ces deux équations, on arrivera à une égalité dans laquelle l'inconnue x montera au seizième degré. Or comme deux lieux du quatrième degré, peuvent avoir ensemble plus de seize termes, puisque chacun en peut avoir quinze differens, il s'ensuit qu'ils peuvent contenir toutes les quantités connues de l'égalité donnée : ce qui suffit pour faire voir la possibilité de construire une égalité complete du seizième degré par deux lignes du quatrième.

On doit de même penser que les deux lieux les plus simples pour construire une égalité complete du vingtième, dix-neuvième, & dix-septième degré, seront, l'un du quatrième, & l'autre du cinquième, parce que la reduite de ces deux lieux montera au vingtième degré, & qu'ils pourront contenir ensemble plus de termes que la proposée, & renfermer par consequent toutes les quantités connues qui s'y rencontrent. Et si l'inconnue avoit 21, 22, 23, 24, ou 25 dimensions dans l'égalité proposée, il faudroit deux lieux de cinq degrés chacun. De là on forme la regle suivante, qui sert à trouver les degrés des deux lieux qui peuvent résoudre une égalité proposée ; en sorte qu'ils soient les plus simples qu'il est possible.

Il faut extraire la racine quarrée de la plus haute dimension de l'inconnue. Si elle est exacte, chacun des deux lieux doit avoir autant de degrés que cette racine contient d'unités ; & si elle ne l'est pas, ou le reste est égal, ou moindre que la racine, & alors l'un des lieux aura pour degré le nombre de la racine, & l'autre ce même nombre augmenté de l'unité : ou le reste est plus grand que la racine, & alors chacun des deux lieux aura

pour degré le nombre de la racine augmenté de l'unité.

Soit proposé, par exemple, de trouver les deux lieux les plus simples, qui peuvent résoudre une égalité, dont la plus haute dimension de l'inconnue soit de trente-sept degrés. Comme la racine quarrée de 37 est 6, & que le reste 1 est moindre que ce nombre 6, il faudra que l'un des lieux soit du sixième degré, & l'autre du septième; on trouvera la même chose, si la plus haute dimension est 38, 39, 40, 41 & 42. Mais si elle étoit 43, comme la racine quarrée de 43 est 6, & que le reste 7 est plus grand que cette racine, il faudroit deux lieux qui fussent chacun du septième degré; & il en est de même si la plus haute dimension étoit 44, 45, 46, 47, 48 & 49.

REMARQUE I I.

420. IL arrive quelquefois qu'on peut construire une égalité donnée par le moyen d'une seule & même courbe mise en deux différentes positions; & c'est ce qu'on verra clairement dans cet exemple.

Soit proposée à construire l'égalité du neuvième degré $x^9 + a^8 x - a^8 b = 0$, dans laquelle tous les termes moyens manquent excepté le penultième. Je prends l'équation $x^9 = a^8 y$, dont le lieu est une Parabole cubique MAM qui a pour parametre la ligne droite donnée $AB = a$, & pour appliquées des lignes droites $PM (y)$ qui font avec les parties correspondantes $AP (x)$ de son axe ou diametre un angle pris à volonté APM que je suppose ici droit; & en cubant chaque membre, j'ai $x^9 = a^8 y^3$: ce qui change par la substitution l'égalité proposée en cette équation $y^9 = aab - aax$, dont le lieu se construit ainsi.

Soit prise sur AP prolongée du côté de P la partie $AC = b$; & ayant mené par le point C la droite indéfinie CK parallèle à PM , soit décrite une autre Parabole cubique MCM qui ait pour axe CK , & pour appliquées des droites KM parallèles à AP , & dont le pa-
X x ij

FIG. 235.

rametre $CD=a$. Je dis qu'elle sera le lieu requis.

Car par la construction MK ou $CP=b-x$, & par la propriété de la courbe $CK'=MK \cdot \overline{CD}$, c'est à dire en termes analytiques $y'=aab-aa x$. Or il est évident 1°. Que si des points M où cette dernière Parabole cubique MCM rencontre l'autre MAM , on mène des parallèles MP à CE ; les parties AP exprimeront les racines x de l'égalité proposée $x^3 + a^3 x - a^3 b = 0$. 2°. Que les Paraboles cubiques MCM , MAM , sont précisément les mêmes; puisque leurs paramètres AB, CD , sont égaux, & que les angles APM, CKM , que font leurs appliquées avec leurs axes le sont aussi.

La situation des deux Paraboles cubiques MAM , MCM , fait connoître que l'égalité proposée $x^3 + a^3 x - a^3 b = 0$, n'a qu'une racine réelle $AP(x)$, qui est toujours vraie & moindre que $AC(b)$; de sorte que les huit autres sont imaginaires.

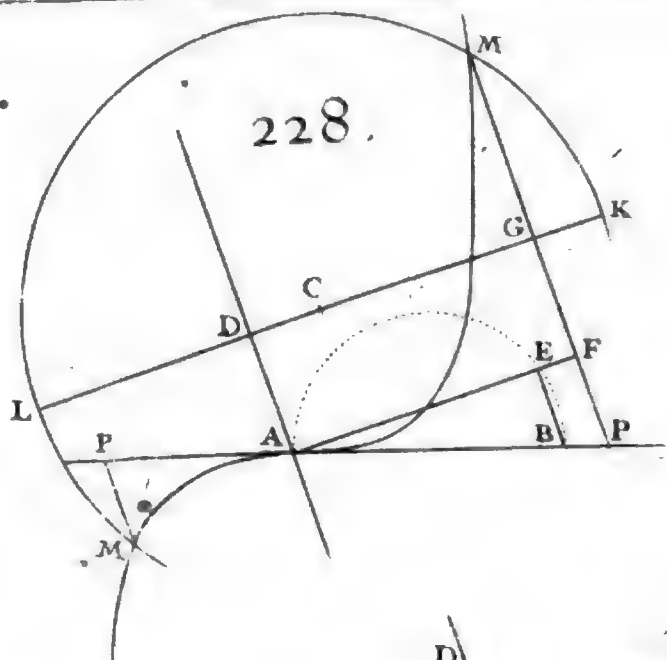
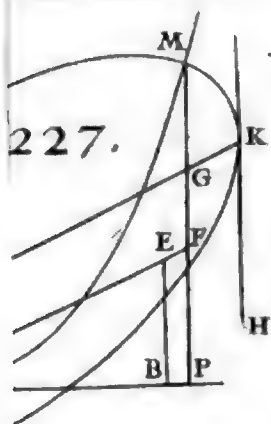
PROPOSITION XI.

Problème.

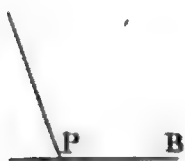
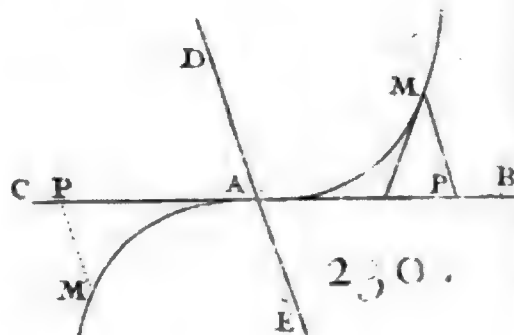
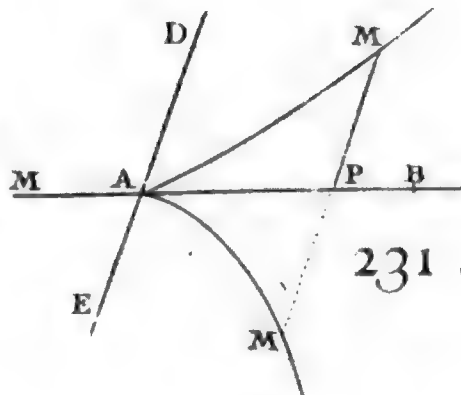
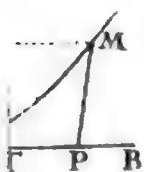
421. **C**ONSTRUIRE toute égalité de tel degré qu'elle puisse être, par le moyen d'une ligne droite, & d'un lieu du même degré, duquel lieu toutefois on puisse déterminer tous les points en n'employant que des lignes droites.

Il faut mettre le dernier terme de l'égalité proposée tout seul d'un côté en le rendant égal à tous les autres, & diviser ensuite toute l'égalité par la ligne qui fait l'office de l'unité, répétée autant de fois qu'il sera nécessaire, afin que chaque terme n'exprime que des lignes: comme si l'on proposoit $x^5 - bx^4 + acx^3 - adxx + a'ex - a^5 f = 0$, on auroit $f = \frac{x^5}{a^5} - \frac{bx^4}{a^4} + \frac{cx^3}{a^3} - \frac{dxx}{a^2} + \frac{ex}{a}$.

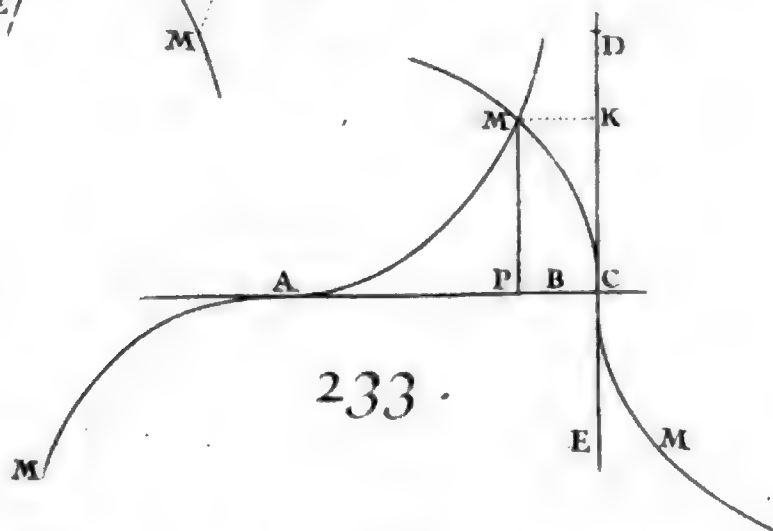
FIG. 234. Cela fait, on prendra sur une ligne droite indéfinie AB dont l'origine fixe soit au point A , une partie quelcon-



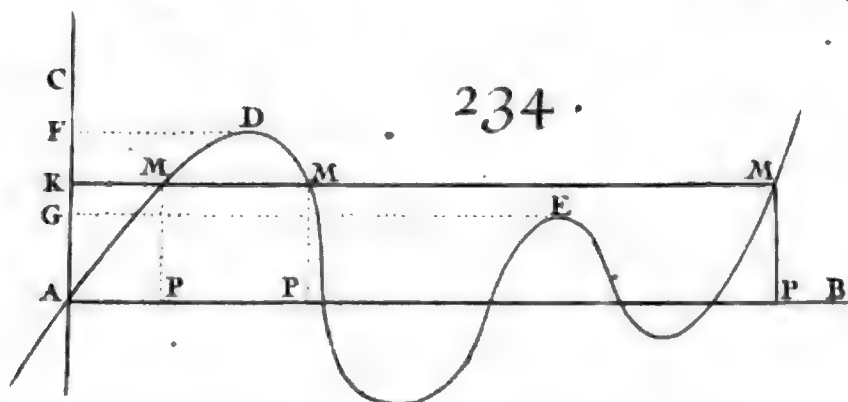
229



32.



233.



234.

que AP pour la valeur de x ; & ayant mené parallèlement à la ligne AC donnée de position une droite $PM = \frac{x^4}{a^4} - \frac{bx^4}{a^4} + \frac{cx^3}{a^3} - \frac{dxx}{a^2} + \frac{ex}{a}$ (ce qui se peut toujours faire * en n'employant que des lignes droites), son extrémité M sera l'un des points d'une ligne courbe $ADEM$; dont les intersections M, M, M , &c. avec une ligne droite KM menée parallèlement à AB par le point K tel que $AK=f$, détermineront des parties KM, KM, KM , &c. qui seront les valeurs cherchées de l'inconnue x dans l'égalité donnée.

Car menant les droites MP, MP, MP , &c. parallèles à AC , & nommant les indéterminées AP, x ; PM, y ; on aura par la propriété de la courbe $ADEM$ cette équation $PM(y) = \frac{x^4}{a^4} - \frac{bx^4}{a^4} + \frac{cx^3}{a^3} - \frac{dxx}{a^2} + \frac{ex}{a}$ qui est un lieu du cinquième degré ; & par la propriété de la droite KM cette autre $y=f$. Ce qui, en substituant pour y la valeur f , & multipliant par a^4 , donne l'égalité même proposée $x^4 - bx^4 + acx^3 - adxx + a'ex - a^4f = 0$.

Ces sortes de constructions peuvent être très-utiles pour trouver les limites des égalités. Supposons, par exemple, qu'on ait une méthode pour déterminer sur la ligne AC les parties AF, AG , telles que les droites FD, GE , parallèles à AB touchent la courbe en des points D, E ; il est clair 1°. Que si $AK(f)$ est moindre que AF & plus grande que AG , comme on le suppose dans cette figure, l'égalité proposée aura trois racines vraies KM, KM, KM , & les deux autres imaginaires ; parce que la figure de la courbe est telle que la ligne KM la rencontrera en trois points, & jamais en davantage. 2°. Que si $AK(f)$ est moindre que AG , la ligne KM coupera la courbe en cinq points ; c'est à dire que l'égalité aura cinq racines vraies. 3°. Que si AK surpasse AF , l'égalité n'aura qu'une racine vraie, & les quatre autres imaginaires. 4°. Que si $AK=AF$, l'égalité aura trois racines vraies, dont il y en aura deux

égales entr'elles ; sçavoir FD , FD . 5°. Et enfin que si $AK = AG$, l'égalité aura cinq racines vraies, dont il y en aura deux égales, sçavoir GE , GE .

La même ligne courbe $ADEM$ étant continuée du côté du point A , servira à trouver les racines de l'égalité $x^3 - bx^2 + acx^2 - aadx + a^2ex + a^2f = 0$, qui ne diffère de la précédente qu'en ce que le dernier terme a le signe $+$; ce qui fait voir qu'on doit mener alors la droite KM au dessous de AB , puisque son lieu doit être $y = -f$.

REMARQUE.

422. ON peut varier la construction précédente en différentes manieres ; car au lieu du dernier terme qu'on égale à tous les autres, on pourroit prendre tel autre des termes qu'on voudroit, ou même deux quelconques qui se suivent immédiatement, & les diviser ensuite d'une maniere convenable, afin que les égalant à l'inconnue y , le lieu de l'équation ne fût que du premier degré. Soit par exemple, l'égalité du troisième degré $x^3 - abx - aac = 0$; je fais $\frac{bx}{a} + c = \frac{x^3}{aa}$, & j'ai ces deux équations $x^3 = aay$, & $y = \frac{bx}{a} + c$, dont les lieux étant construits separement donneront les racines de l'égalité proposée. Voici comment.

FIG. 235.

Ayant pris à l'ordinaire pour inconnues & indéterminées les deux droites $AP(x)$, $PM(y)$ qui font entr'elles un angle quelconque APM , soit décrite une premiere Parabole cubique MAM qui soit le lieu de la premiere équation $x^3 = aay$. Soit menée par le point A origine des x une ligne droite parallele à PM , sur laquelle soient prises les parties $AC = b$, $AD = c$, du côté où s'étend PM ; & ayant pris sur AP prolongée du côté de A la partie $AB = a$, soit tirée par le point D une parallele infinie à BC . Je dis que si des points M où elle rencontre la premiere Parabole cubique MAM , on mene des paralleles MP à AC ; les cou-

pées AP seront les racines de l'égalité donnée $x^3 - abx - aac = 0$.

Car menant DE parallele à AP , les triangles semblables BAC , DEM , donneront $BA(a) : AC(b) :: DE(x) : EM = \frac{bx}{a}$, & par consequent $PM(y) = \frac{bx}{a} + c$, Or à cause de la premiere Parabole cubique MAM , l'on aura $x^3 = aay$. Si donc l'on met à la place de y la valeur $\frac{bx}{a} + c$, on retrouvera l'équation donnée $x^3 - abx - aac = 0$.

S'il y avoit $+b$ dans l'égalité donnée, il faudroit prendre AC du côté opposé à PM , & il en est de même de AD lorsqu'il y a $+c$: de sorte que cette construction est generale pour toute égalité donnée du troisieme degré. Car il est évident qu'après en avoir fait évanouir le deuxième terme, on peut toujours la reduire sous l'une de ces formes.

Il est visible qu'on peut se servir d'une Parabole cubique donnée, puisqu'il n'y a qu'à prendre l'unité arbitraire a égale à son parametre.

PROPOSITION XII.

Problème.

423. **A**PPROCHER de plus en plus à l'infini de la juste valeur des racines de toute égalité du troisieme & du quatrieme degré ; & des égalités qui passent le quatrieme degré lorsqu'elles n'ont que deux termes : en ne se servant que de lignes droites & de cercles.

Soit donnée l'égalité du troisieme degré $x^3 - 2apx - aaq = 0$; je la multiplie par x pour l'élever au quatrieme & transposant le terme $aaqx$, j'ai $x^4 - 2apxx = aaqx$; j'ajoute de part & d'autre $aapp$ pour faire que le premier membre soit un quarré, ce qui me donne $x^4 - 2apxx + aapp = aapp + aaqx$, & extrayant de part & d'autre la racine quarrée, il vient $xx + ap$

$= a\sqrt{pp+qx}$; transposant enfin ap , & extrayant de nouveau la racine quarrée, je trouve $x = \sqrt{+ap + a\sqrt{pp+qx}}$. Je considere à present que si au lieu de la juste valeur de la racine vraie x , je prends une grandeur qui l'excede, comme par exemple c ; il s'ensuit 1°. Que c surpasse $\sqrt{+ap + a\sqrt{pp+qc}}$. 2°. Que $\sqrt{+ap + a\sqrt{pp+qc}}$ sera encore plus grande que la juste valeur de x . Cette seconde proposition est visible, mais pour la premiere elle se prouve ainsi.

* Ce signe ainsi tourné veut dire, surpasse.

Si l'égalité du troisiéme degré a $+2apx$, il est clair que $c^3 + 2apcc^* > aaqc$, d'où il vient en ajoutant de part & d'autre le quarré $aapp$, & achevant le calcul comme ci-dessus, $c > \sqrt{-ap + a\sqrt{pp+qc}}$. Mais lorsqu'il y a $-2apx$, on aura en transposant $2apx$ & divisant par x cette égalité $xx = 2ap + \frac{aaq}{x}$, d'où il suit

que si l'on met dans $\frac{aaq}{x}$ pour x une valeur c plus grande que la racine vraie de l'égalité $x^3 - 2apx - aaq = 0$, la quantité $2ap + \frac{aaq}{c}$ sera moindre que le quarré xx (puisque $\frac{aaq}{c}$ est moindre que $\frac{aaq}{x}$) & à plus forte raison que le quarré cc . On aura donc $cc > 2ap + \frac{aaq}{c}$, & multipliant par cc , il vient $c^3 - 2apcc > aaqc$, d'où l'on tire (en operant comme l'on vient de faire) $c > \sqrt{-ap + a\sqrt{pp+qc}}$. Or ceci supposé, je forme cette suite: $\sqrt{+ap + a\sqrt{pp+qc}}$, $\sqrt{+ap + a\sqrt{pp+qf}}$, $\sqrt{+ap + a\sqrt{pp+qg}}$ &c, dans laquelle f exprime le terme $\sqrt{+ap + a\sqrt{pp+qc}}$ qui le precede immédiatement, & de même g exprime le terme $\sqrt{+ap + a\sqrt{pp+qf}}$ &c.

Il est donc évident par ce que l'on vient de démontrer, que tous les termes de cette suite seront plus grands que la juste valeur de la vraie racine x , & qu'ils en approchent

prochent toujours de plus en plus. Je dis à présent que si on la continuë à l'infini, le terme infinitieme (s'il est permis de s'exprimer ainsi) ou le dernier terme de cette suite, sera précisément égal à la valeur cherchée de l'inconnuë x . Car soit z ce dernier terme, il est certain par la nature de la suite qu'il approchera de plus près de l'inconnuë x que tous les autres termes, & qu'ainsi le

terme $\sqrt{+ap + a\sqrt{pp + qz}}$ qui le suivroit immédiatement, s'il n'étoit pas le dernier, ne peut être moindre que lui; puisque s'il étoit moindre il aprocheroit de plus près de l'inconnuë x , & seroit par conséquent le dernier terme, ce qui est contre la supposition. Or il ne peut être plus grand, car on vient de démontrer que tous les termes de la suite vont en diminuant. Il faudra donc qu'il lui soit égal, & on aura par conséquent

$z = \sqrt{+ap + a\sqrt{pp + qz}}$, c'est à dire en ôtant les incommensurables z' $+ 1apz - aaq = 0$, d'où l'on voit que $z = x$. *Ce qu'il falloit démontrer.*

On prouvera par un raisonnement semblable, que si l'on prend une grandeur c plus petite que la juste valeur de x , tous les termes de cette suite iront toujours en augmentant. en sorte que le dernier sera précisément égal à la valeur cherchée de x . Voici maintenant comment on peut construire par Geometrie cette suite, en n'employant que des lignes droites & des cercles.

Ayant mené deux lignes droites indéfinies, BD, CP , FIG. 236- qui s'entrecoupent à angles droits au point A , on pren- 237. dra sur l'une d'elles les parties $AB = a, AD = p$, du même côté du point A lorsqu'il y a $+ 1apx$, & de part & d'autre lorsqu'il y a $- 1apx$, comme on le suppose dans ces deux figures; & sur l'autre les parties $AC = q, AP = c$, toujours de part & d'autre du point A . Ayant décrit du diametre CP un demi cercle qui coupe AD en E , on prendra sur AC la partie AF égale à AE , & on portera sur AD depuis le point D vers le point A dans le premier cas, & vers le côté opposé dans le

Y. y.

second, la partie DG égale à DF . On décrira enfin du diamètre BG un demi-cercle qui coupe AP en Q , je dis que $AQ = \sqrt{ap + a\sqrt{pp + qc}}$. Car à cause du demi-cercle CEP la ligne AE ou $AF = \sqrt{qc}$, & à cause du triangle rectangle FAD l'hypothénuse FD ou $DG = \sqrt{pp + qc}$, & par conséquent $AG = p + \sqrt{pp + qc}$, & à cause du demi-cercle BQG la ligne $AQ = \sqrt{ap + a\sqrt{pp + qc}}$. Nommant à présent AQ, f ; & réitérant la même operation en se servant de AQ au lieu de AP , on trouvera $AR = \sqrt{ap + a\sqrt{pp + qf}}$, & ensuite par le moyen de AR que j'appelle g , on trouvera $AS = \sqrt{ap + a\sqrt{pp + qg}}$ en réitérant encore la même operation : de sorte que la continuant autant que l'on voudra, on trouvera des lignes AP, AQ, AR, AS , &c qui approcheront de plus en plus à l'infini de la juste valeur de la vraie racine x de l'égalité proposée $x^3 - 2apx - aaq = 0$.

Il est à remarquer que l'on peut prendre d'abord pour $AP (c)$ telle grandeur que l'on veut, car si cette grandeur se trouve plus grande que la racine x , les autres lignes AQ, AR, AS , &c. vont toujours en diminuant; & au contraire si AP est moindre que x , elles iront en augmentant : de sorte que la vraie racine est renfermée entre AP de l'une de ces deux figures & AP de l'autre, AQ & AQ, AR & AR, AS & AS . D'où l'on voit qu'en formant deux suites convergentes, dans l'une desquelles le premier terme soit plus grand que la vraie racine, & dans l'autre plus petit, l'on aura toujours en prenant les termes correspondans de ces deux suites, des limites entre lesquelles se doit trouver cette racine; de sorte que la difference de ces limites diminuë de plus en plus à l'infini.

Si l'on demandoit les deux autres racines de l'égalité proposée $x^3 - 2apx - aaq = 0$. Nommant m la racine approchée que l'on vient de trouver, on la regardera

comme étant exacte : c'est pourquoi divisant cette égalité par $x - m$, la division se fera au juste (car le reste $m^3 - 3apm - aaq = 0$, puisqu'on suppose $x = m$), & on aura pour quotient l'égalité $xx + mx + mm - 3ap = 0$, dont la résolution fournira les deux racines qu'on demande.

Toutes les égalités du troisième degré peuvent se réduire à l'un ou l'autre de ces deux formes ; car après avoir fait évanouir le second terme, s'il y avoit $+aaq$ en mettant $-aaq$, on ne feroit que changer les racines vraies en fausses & les fausses en vraies. D'où l'on voit que les constructions précédentes suffisent pour trouver les racines approchées de toute égalité donnée du troisième degré. Passons maintenant au quatrième.

Soit proposée l'égalité du quatrième degré $x^4 - 3apxx - aaqx - a'r = 0$, dont il faille trouver les racines approchées. Je cherche, comme l'on vient d'enseigner, les racines approchées de l'égalité du troisième degré

$$y^3 - 3ppy + 2p^2 = 0 \\ + 4ary + 8apr \\ - aqq$$

où l'on doit observer d'écrire $-2p^2$ lorsqu'il y a dans la proposée $+3apxx$; $-4ar$ lorsqu'il y a $+a'r$; & enfin $-8apr$ lorsque les signes des termes $3apxx$ & $a'r$ sont differens. Je regarde ensuite l'une de ces racines approchées y comme étant exacte, & ayant trouvé une

ligne $v = \sqrt{ay + 2ap}$, sçavoir $+2ap$ lorsqu'il y a $-3apxx$, & $-2ap$ lorsqu'il y a $+3apxx$; j'ai pour les quatre

racines approchées de la proposée, celles de ces deux égalités du second degré $xx - vx + \frac{ay + ap}{2} - \frac{aaq}{2v} = 0$

& $xx + vx + \frac{ay + ap}{2} + \frac{aaq}{2v} = 0$ (en observant de prendre $-ap$ lorsqu'il y a $-3apxx$ dans l'égalité proposée, & $+ap$ lorsque c'est $+3apxx$) que l'on construira aisément en n'employant que des cercles & des lignes droites. Tout ceci n'est qu'une suite de la règle que donne M. Descartes dans le troisième Livre de sa

Geometrie pour reduire toute égalité du quatrième degré à une du troisième, de laquelle connoissant une des racines, on a les quatre de la proposée; & comme cela dépend de l'Algebre pure, je pourrois le supposer ici comme démontré. En voici cependant la raison en peu de mots.

On regarde l'égalité du quatrième degré $x^4 - 3apxx - aaqx - a'r = 0$, comme le produit des deux planes $xx - vx + ab - ac = 0$ & $xx + vx + ab + ac = 0$, dans lesquelles les lettres v, a, b, c , marquent des inconnues qui doivent être déterminées dans la suite, en sorte que le produit de ces deux égalités qui est $x^4 - vvx - 2acvx + aabb - aacc = 0$, soit en effet l'égalité même proposée. Pour cela j'en compare les termes correspondans, & j'ai 1°. $c = \frac{a}{x}$. 2°. $b = \frac{v - 3ap}{2a}$. 3°. $bb - cc = -ar$, ou $bb - cc + ar = 0$; c'est à dire en mettant pour b & pour c les valeurs que l'on vient de trouver & ordonnant, l'égalité $v^4 - 6apv^2 + 9a^2ppvv - a^4qq = 0$. Et si l'on fait $vv = ay + 2ap$, on trouvera par la substitution l'égalité du troisième degré

$$y^3 - 3pp y + 2p^3 + 4ar y + 8ap r = 0, \text{ de laquelle connoissant une racine } y,$$

on aura, en prenant la racine quarrée de $ay + 2ap$, la valeur de v , & ensuite celles de b & de c , lesquelles étant mises dans les deux égalités planes que l'on a supposées d'abord, on en formera deux autres dont le produit sera l'égalité même proposée, & dont la resolution par consequent fournira les quatre racines qu'on demande. S'il n'étoit question que de trouver une racine vraie d'une égalité du quatrième degré, on pourroit la trouver immédiatement par une suite en cette sorte.

Soit $x^4 - 3apxx - aaqx - a'r = 0$, on trouvera en operant de même que pour le troisième degré $x = \sqrt{-ap + a} \sqrt{qx + pp + ar}$, ce qui donne, en faisant pour abreger $pp + ar = nn$, cette suite conver-

gente c , $\sqrt{-ap + a\sqrt{nn + qc}}$, $\sqrt{-ap + a\sqrt{nn + qf}}$, $\sqrt{-ap + a\sqrt{nn + qg}}$, &c, dont la construction n'est différente des précédentes qu'en ce qu'il faut prendre $AF = n$ & $DG = FE$.

Si l'on avoit $x^4 + 2apxx - aaqx + a'r = 0$, on trouveroit $x = \sqrt{-ap + a\sqrt{qx + pp - ar}}$, & on formeroit lorsque pp surpasse ar (en faisant $pp - ar = nn$) la même suite convergente que ci-dessus. Mais il est à remarquer que lorsqu'il y a $+2apxx$ dans l'égalité donnée, il faut que $\sqrt{qx + pp - ar}$ surpasse p afin que $\sqrt{-ap + a\sqrt{qx + pp - ar}}$ valeur de la racine x ne renferme point de contradiction; ce qui donne $x > \frac{ar}{q}$, & par conséquent il faudra prendre c plus grande que $\frac{ar}{q}$.

Si pp est moindre que ar , l'on formera alors, en faisant $ar - pp = qn$, cette suite convergente c , $\sqrt{-ap + a\sqrt{qc - qn}}$, $\sqrt{-ap + a\sqrt{qf - qn}}$, $\sqrt{-ap + a\sqrt{qg - qn}}$, &c, l'on doit remarquer que lorsqu'il y a $-2apxx$ dans l'égalité donnée, il faut que x surpasse n ou $\frac{ar - pp}{q}$ afin que $\sqrt{ap + a\sqrt{qx + pp - ar}}$ valeur de x ne renferme point de contradiction, & qu'ainsi on doit prendre c plus grand que n .

Il peut arriver lorsqu'il y a $+r$ dans l'égalité donnée que ces racines soient toutes quatre imaginaires, & alors on tombera infailliblement dans quelque contradiction en construisant la suite; car on n'a démontré qu'elle est convergente qu'en supposant qu'il y eut une racine vraie dans l'égalité donnée. Au reste la construction de la dernière suite est un peu différente des autres, mais comme elle n'est pas plus difficile, je ne m'y arrêterai pas.

Cette méthode devient embarrassée lorsqu'on la veut étendre à des égalités complètes qui passent le quatriè-

me degré ; c'est pourquoi je me contenterai de l'appliquer à une égalité du cinquième degré qui n'a que deux termes, & qui servira de méthode pour les autres plus composées qui n'ont pareillement que deux termes.

Soit $x^5 - a^4 b = 0$; multipliant par x , & transposant il vient $x^6 = a^4 b x$, & extrayant la racine quarrée on aura $x^3 = a a \sqrt{b x}$ ou $x^6 = a a x \sqrt{b x}$, & extrayant de nouveau deux fois de suite la racine quarrée, on trouvera enfin $x = \sqrt{a \sqrt{x \sqrt{b x}}}$; ce qui fournit cette suite convergente, $c, \sqrt{a \sqrt{c \sqrt{b c}}}, \sqrt{a \sqrt{f \sqrt{b f}}}, \sqrt{a \sqrt{g \sqrt{b g}}}$, &c, dont voici la construction géométrique.

FIG. 238.

Ayant mené deux lignes droites indéfinies BD, CP , qui s'entrecoupent à angles droits au point A , on prendra sur l'une d'elles la partie $AB = a$, & sur l'autre, les parties $AC = b$, $AP = c$, de part & d'autre du point A . Du diamètre PC ayant décrit un demi-cercle qui coupe BA prolongée du côté de A en D , & ayant pris sur AC la partie $AF = AD$, on décrira du diamètre PF un autre demi-cercle qui coupe AD en E . On décrira enfin du diamètre BE un troisième demi-cercle qui coupe AP en Q ; il est visible que $AQ = \sqrt{a \sqrt{c \sqrt{b c}}}$. Nommant à présent AQ, f ; & réitérant la même operation en se servant de AQ au lieu de AP , on trouvera $AR = \sqrt{a \sqrt{f \sqrt{b f}}}$, & de même $AS = \sqrt{a \sqrt{g \sqrt{b g}}}$. Et les droites AP, AQ, AR , &c. approcheront de plus en plus à l'infini de la juste valeur de l'inconnue x de l'égalité donnée $x^5 - a^4 b = 0$. Cela se prouve de la même manière que pour les égalités du troisième degré.

M. Bernoulli celebre Professeur des Mathematiques à Bâle, est l'Auteur de ces suites. On peut voir ce qu'il en dit dans les Actes de Leipzig de l'année 1689. page 455.

PROPOSITION XIII.

Problème.

424. **U**NE portion de Section conique étant donnée, trouver par son moyen les racines d'une égalité donnée du troisième ou du quatrième degré.

On a vû dans le Problème précédent qu'une égalité du quatrième degré étant donnée, on en peut toujours trouver une du troisième, de laquelle connoissant une racine on a les quatre de la proposée; en ne se servant que de lignes droites, & de cercles. On sçait de plus que toute égalité du troisième degré se peut reduire sous cette forme $x^3 \mp 2apx - aaq = 0$, dont l'une des racines est vraie, & les deux autres ou fausses ou imaginaires. Cela posé; soit $x^3 \mp 2apx - aaq = 0$, dont il faille trouver les racines, par le moyen de la portion donnée **FIG. 239.** BD d'une Parabole qui a pour axe la ligne CH dont l'origine est au point C . Des points B, D , extremités de la portion donnée ayant mené les perpendiculaires BG, DH , sur l'axe, il est manifeste que si la vraie racine étoit plus grande que BG , & moindre que DH , le cercle décrit du centre E , trouvé comme l'on a enseigné à la fin de l'article 387. pour les égalités qui n'ont point de second terme, & du rayon EC , couperoit infailliblement la portion BD en quelque point M ; d'où menant la perpendiculaire MQ sur l'axe, cette ligne MQ en seroit la vraie racine. Il est donc question lorsqu'un cercle ne coupe point la portion BD , de transformer cette égalité en une autre dont la vraie racine soit renfermée entre les limites BG, DH . Pour le faire, je nomme les données BG, f ; DH, g ; & je suppose que l'on ait deux limites m, n , entre lesquelles la vraie racine x soit resserrée (m est moindre que n , & f moindre que g). Ce qui donne x plus grand que m & moindre que n , & multipliant chaque terme par f & divisant

par m , il vient $\frac{f^x}{m}$ plus grand que f & moindre que $\frac{f^n}{m}$. Si l'on fait à présent $z = \frac{f^x}{m}$, & qu'on mette dans l'égalité $x^3 - 2apx - aaq = 0$, à la place de x sa valeur $\frac{mz}{f}$, on la transformera en celle-ci $z^3 - \frac{2apff}{mm} - \frac{aaqf^3}{m^3} = 0$, qui aura sa vraie racine $z = \frac{f^x}{m}$ plus grande que f & moindre que $\frac{f^n}{m}$. D'où il suit que si les limites m, n , étoient telles que $\frac{f^n}{m}$ fût égale ou moindre que g , il n'y auroit qu'à construire cette dernière égalité selon l'article 387. pour avoir sa vraie racine $MQ(z)$ par le moyen de la portion donnée BD . De là on tire la construction suivante,

On fera par le Problème précédent deux suites convergentes qui approcheront l'une en dessus & l'autre en dessous de la vraie racine x de l'égalité donnée $x^3 - 2apx - aaq = 0$. On choisira deux termes correspondans dans ces deux suites m, n , qui soient tels que $\frac{f^n}{m}$ soit égale ou moindre que g : ce qui se pourra toujours faire, puisque f est moindre que g , & que la différence qui est entre m & n diminuë continuellement à l'infini. Cela fait, on transformera l'égalité donnée en une autre $z^3 - \frac{2apff}{mm} - \frac{aaqf^3}{m^3} = 0$, dont l'inconnue sera $z = \frac{f^x}{m}$; & en la construisant selon la fin de l'article 387. le cercle coupera infailliblement la portion donnée BD en un point M ; duquel ayant mené sur l'axe la perpendiculaire MQ , elle sera la vraie racine z de cette seconde égalité : & faisant ensuite $x = \frac{mz}{f}$, cette ligne x sera la vraie racine de l'égalité $x^3 - 2apx - aaq = 0$.

Si l'on veut trouver les deux autres racines de cette égalité lorsqu'elles ne sont pas imaginaires, il n'y a qu'à la

DE LA CONSTRUCTION DES EGALITE'S. 361
la diviser par l'inconnuë x moins celle que l'on vient de
découvrir pour l'abaisser à une du second degré, dont
on découvrira les deux racines par le moyen d'un cercle,
en se servant de l'article 380.

Tout ceci est trop évident pour m'y arrêter davanta-
ge, je remarquerai seulement que si la portion donnée
 BD étoit d'une Ellipse ou d'une Hyperbole, il faudroit
se servir de l'article 398. ou 403. & que toute la difficulté
se reduiroit à transformer l'égalité donnée en une autre,
dont la vraie racine eut des limites données : & c'est ce
que l'on feroit comme dans la Parabole.



LIVRE DIXIÈME.

Des Problèmes déterminés.

PROPOSITION GÉNÉRALE.

425. **U**N Problème de Geometrie déterminé étant proposé, en trouver la solution.

On regardera d'abord le Problème proposé comme s'il étoit résolu, & on tirera les lignes que l'on jugera les plus propres pour faire connoître ce qui n'est que supposé. On nommera ensuite toutes ces lignes (qui sont pour l'ordinaire des triangles rectangles ou semblables) par des lettres de l'Alphabet, sçavoir les lignes qui sont connues par les premières lettres, & les lignes inconnues par les dernières lettres; & on parcourra toutes les conditions du Problème, en comparant ces lignes entr'elles dans l'ordre le plus simple & le plus naturel qu'il sera possible: ce qui doit servir à former autant de différentes égalités qu'il y a d'inconnues. On emploiera enfin les regles ordinaires de l'Algebre pour reduire ces différentes égalités à une seule dans laquelle il ne se trouve plus qu'une inconnue, & pour l'abaisser s'il se peut à un moindre degré; & l'ayant résolu par les regles prescrites dans le Livre precedent, on en tirera la solution cherchée du Problème. Ceci s'éclaircira parfaitement par les exemples qui suivent.

EXEMPLE I.

FIG. 140. 426. **L**A ligne droite AB étant donnée, trouver hors de cette ligne le point C tel qu'ayant mené les droites AC, CB ; 1°. La somme de leurs quarrés soit au triangle ACB en la raison donnée de f à g , 2°. L'angle ACB qu'elles comprennent soit égal à l'angle donné GDK .
Je suppose que le point C soit celui qu'on cherche, &

je mène CH perpendiculaire sur AB que je divise par le milieu au point E . Je nomme la donnée AE ou EB , a ; & les inconnues EH , x ; HC , y ; & j'ai $AH = a - x$, $BH = a + x$. Donc à cause des triangles rectangles AHC , BHC , les quarrés des hypothenuses $\overline{AC}^2 = aa - 2ax + xx + yy$, & $\overline{BC}^2 = aa + 2ax + xx + yy$; & par conséquent $\overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 = 2aa + 2xx + 2yy$. Or puisque le triangle $ACB = AE \times CH (ay)$, il s'en suit par la première condition du Problème que $2aa + 2xx + 2yy : ay :: f : g$; ce qui donne en multipliant les extrêmes & les moyens, & divisant par $2g$, cette équation $aa + xx + yy = \frac{af}{2g}y = 2my$ en prenant (pour ôter les fractions) une ligne $m = \frac{af}{4g}$.

Il reste maintenant à accomplir la seconde condition, sçavoir que l'angle ACB soit égal à l'angle donné GDK . Pour y réussir, je mène d'un point G pris à discretion dans la droite GD , la perpendiculaire GF sur le côté DK , prolongé, s'il est nécessaire, & du point A la perpendiculaire AL sur le côté BC prolongé aussi, s'il est nécessaire, afin d'avoir deux triangles rectangles semblables ACL , GDF , dont l'un GDF est donné. Cela fait, je nomme les données DF , b ; FG , c ; & faisant, pour abréger, $BC = n$, je trouve à cause des triangles rectangles semblables BCH , BAL , ces proportions $BC (n) : CH (y) :: BA (2a) : AL = \frac{2ay}{n}$. Et $BC (n) : BH (a + x) :: BA (2a) : BL = \frac{2aa + 2ax}{n}$. Et par conséquent CL ou $BL - BC = \frac{2aa + 2ax - nn}{n}$. Donc puisque l'angle ACL doit être égal à l'angle GDF , il faut que $CL (\frac{2aa + 2ax - nn}{n}) : AL (\frac{2ay}{n}) :: DF (b) : FG (c)$; d'où l'on tire en multipliant les extrêmes & les moyens $2aac + 2acx - cnn = 2aby$, c'est à dire, en mettant pour nn sa valeur $aa + 2ax + xx + yy$, cette seconde

équation $aac - cxx - cyy = 2aby$ qui renferme la seconde condition du Problème.

Comme l'on a trouvé autant d'égalités qu'il y avoit d'inconnuës, & que l'on a satisfait à toutes les conditions du Problème; il ne faut plus que se servir des règles ordinaires de l'Algebre, pour reduire ces égalités à une seule qui ne renferme qu'une inconnuë y ou x : & c'est ce qu'on peut faire en cette sorte. J'ai pour premiere équation $aa + xx + yy = 2my$, & pour seconde,

$$aac - cxx - cyy = 2aby \text{ ou } aa - xx - yy = \frac{2ab}{c};$$

c'est pourquoi ajoutant ensemble d'une part les deux premiers membres, & de l'autre les deux seconds, je trouve $2aa = \frac{2ab}{c} + 2my$, d'où je tire $y = \frac{aa}{m+f}$ en prenant $f = \frac{ab}{c}$.

Et mettant cette valeur à la place de y & son quarré à la place de yy dans l'une ou l'autre des équations precedentes, je trouve $xx = \frac{aam - aaf - a^2}{mm + 2mf + ff}$ & $x = \frac{a\sqrt{mm - ff - aa}}{m+f}$; d'où je connois que si mm étoit moindre que $aa + ff$ le Problème seroit impossible. En voici la construction.

FIG. 241.

Par le point E milieu de AB ayant tiré une perpendiculaire indéfinie ON à AB , on menera par le point A la ligne AM qui fasse avec AB l'angle EAM égal à l'angle DGF qui est donné. Du point M où cette ligne rencontre la perpendiculaire ON , comme centre, & du rayon MA , on décrira un arc de cercle ACB . On prendra ensuite sur EM prolongée du côté de M la partie $MN = m$; & ayant joint NA , on lui menera la perpendiculaire AO qui rencontre NO au point O , par lequel on tirera une parallèle à AB . Je dis que cette parallèle rencontrera l'arc de cercle ACB au point cherché C .

Car ayant mené CH perpendiculaire sur AB , il est clair que $CH = EO = \frac{aa}{m+f}$, puisqu'à cause des triangles rectangles semblables NEA , AEO , il vient $NE (m+f) : AE (a) :: AE (a) : EO = \frac{aa}{m+f}$. De plus à

cause du cercle $\overline{CM} = \overline{AM} = aa + ff$; & partant puisque $MO = f + \frac{aa}{m+f}$, il s'ensuit à cause du triangle rectangle MCO que \overline{CO} ou $\overline{EH} (xx) = aa + ff - ff - \frac{2aaf}{m+f} - \frac{a^4}{mm+2mf+ff} = \frac{aamm - aaff - a^4}{mm+2mf+ff}$. Donc &c.

REMARQUE.

427. LORSQU'APRÈS avoir satisfait à toutes les questions d'un Problème, on est arrivé à deux équations qui renferment chacune les deux mêmes inconnues, il n'est pas nécessaire, si l'on veut, de les réduire à une seule qui ne renferme plus qu'une inconnue, comme il est prescrit dans la proposition générale: mais l'on peut résoudre le Problème, en construisant séparément les lieux de ces deux équations, car leurs points d'intersection serviront à trouver les valeurs de ces deux inconnues. C'est ce qui se voit clairement dans cet exemple, où l'on a pris pour inconnues les droites $EH (x)$, $HC (y)$ qui font entre elles un angle droit $EH C$; & où après avoir satisfait aux conditions requises, on est arrivé à ces deux équations $aa + xx + yy = 2my$, & $aa - xx - yy = 2fy$; car les cercles qui en sont les lieux étant décrits séparément donneront par leurs intersections des points qui satisferont: voici comment.

Ayant décrit comme dans la première construction l'arc de cercle ACB , on décrira du centre A , & du rayon $AP = m$, un arc de cercle qui coupe la perpendiculaire EM en P . On prendra sur cette perpendiculaire la partie $EQ = m$ du côté de l'arc ACB , & on décrira du centre Q & du rayon $QC = EP$, un cercle qui coupera l'arc ACB en des points C qui satisferont.

Car à cause de ce dernier cercle on aura \overline{QC} ou \overline{EP} $(mm - aa) = \overline{QO} (mm - 2my + yy) + \overline{OC} (xx)$, c'est à dire la première équation $aa + xx + yy = 2my$;

Zz iij

& à cause de l'autre cercle ACB il vient \overline{MC} ou \overline{MA}
 $(ff + aa) = \overline{MO} (ff + 2fy + yy) + \overline{OC} (xx)$, c'est
à dire la seconde équation $aa - xx - yy = 2fy$. D'où
il suit que le point cherché C se doit trouver en même
temps sur ces deux cercles, c'est à dire, qu'il doit se con-
fondre avec leurs points d'intersection.

Il est visible qu'il y a deux differens points C qui satis-
font à la question, lorsque ces deux cercles se coupent en
deux points comme dans cette figure; qu'il n'y en a qu'un,
lorsqu'ils se touchent; & qu'enfin il n'y en peut avoir au-
cun, lorsqu'ils ne se coupent ni ne se touchent.

Il faut bien prendre garde qu'en resolvant un Problème
par le moyen de deux lieux, on ne tombe pas dans une
construction plus composée, que si étant arrivé à une seule
égalité qui ne renferme qu'une inconnue x , on l'eut cons-
truite selon les regles du Livre precedent. Je m'explique:
qu'il faille, par exemple, résoudre un Problème (c'est le
troisième exemple qui sera proposé) dont les conditions
soient renfermées dans ces deux équations $y = \frac{d - ex}{h}$, &

$\frac{by}{ff} = aa + xx$; si l'on se servoit des lieux de ces deux
équations, il est clair qu'il faudroit mener une ligne droi-

* Art. 306. te * qui seroit le lieu de la premiere équation, & décrire
* Art. 330. une Hyperbole * qui seroit le lieu de la seconde, pour
* 332. avoir par leurs intersections les valeurs des deux incon-
nuës x & y . Mais parce qu'en réunissant ces deux équations en une seule, on trouve l'égalité du second degré:

$xx - \frac{2ecd}{cc + ff}x + \frac{ecdd - aaff}{cc - ff} = 0$, qui se construit en n'em-
ployant que des lignes droites & des cercles; ce seroit une
faute considerable de se servir d'une Hyperbole.

EXEMPLE II.

FIG. 242. 428. LE quarré $ABCD$ étant donné; il faut mener
d'un de ses angles A la ligne droite AE , en sorte que
la partie FE comprise entre les côtés BC , CD , oppo-

sés à cet angle soit égale à une ligne donnée b .

Je suppose que le point E pris sur le côté DC prolongé, soit tel que la partie FE de la ligne AE soit égale à b , c'est à dire que je suppose la question résolue; & je nomme la donnée AB ou AD ou DC ou CB , a ; l'inconnue DE , x . Cela fait, les triangles semblables EDA , ECF , donnent $ED(x)$. $DA(a) :: EC(x-a)$. $CF = \frac{ax-a^2}{x}$, & le triangle rectangle ECF donne FE

$$= \overline{EC}^2 + \overline{CF}^2 = xx - 2ax + aa + \frac{a^2xx - 2a^3x + a^4}{xx}.$$

Mais puisque par la condition du Problème FE doit être égale à b , on aura $xx - 2ax + aa + \frac{a^2xx - 2a^3x + a^4}{xx}$

$$= bb, \text{ ou } x^4 - 2a^3x + 2aaxx - bbxx - 2a^3x + a^4 = 0.$$

D'où l'on voit que la résolution de cette égalité doit fournir pour $DE(x)$, une valeur telle que menant la droite AE , la partie FE comprise entre les côtés CB , DC , soit égale à la donnée b .

L'égalité que l'on vient de trouver étant du quatrième degré, il faudroit employer pour la résoudre une Section Conique. C'est pourquoi je dois chercher auparavant par les regles que fournit l'Algebre, si elle ne se peut point abaisser à un degré plus simple, & je trouve en effet que si l'on prend $cc = aa + bb$, elle sera le produit des deux égalités $xx + aa - ax - cx = 0$, & $xx + aa - ax + cx = 0$, qui sont chacune du second degré, de sorte que pour avoir les quatre racines de l'égalité du quatrième degré $x^4 - 2a^3x + c$, il ne faut que trouver les racines de chacune de ces deux égalités. Je ne m'arrête point à chercher les racines de l'égalité $xx + aa - xx + cx = 0$; parce que c surpassant a , la disposition des signes me fait connoître qu'elles sont toutes deux fausses: mais je trouve celles de l'autre égalité $xx + aa - ax - cx = 0$, que je connois être toutes deux vraies, de la maniere qui suit.

Soit prise sur le côté AB prolongé la partie $BG = c$, & soit décrit du diametre AG un demi-cercle qui cou-

pe en E le côté DC prolongé. Je dis que ce point sera celui qu'on cherche.

Car nommant DE, x ; & menant la perpendiculaire EH , on aura $HG = a + c - x$, & par la propriété du cercle $AH * HG (ax + cx - xx) = EH^2 (aa)$.

REMARQUE I.

429. LORSQU'APRÈS avoir satisfait aux conditions d'un Problème, on arrive à une égalité composée qui a plusieurs racines réelles, il est visible qu'il n'y a qu'une de ces racines qui exprime la valeur de l'inconnue qu'on cherche : mais on doit bien remarquer que les autres peuvent aussi servir à la résolution de la question, dans un sens qui ne peut être différent de celui qu'on s'est imaginé que dans quelques circonstances particulières. Ainsi dans cet exemple la petite racine vraie $DL(x)$ de l'égalité $xx - ax - cx + aa = 0$, donne sur le côté DC un point L tel qu'ayant mené la droite AL qui rencontre le côté BC prolongé en K , la partie LK est égale à la donnée b . De même si l'on prend $Bg = c$ sur le côté BA prolongé vers A , & qu'on décrive du diamètre Ag un demi-cercle, il coupera le côté CD prolongé vers D aux points e, l , en sorte que De , & Dl , seront les deux racines fausses de l'égalité $xx + cx - ax + aa = 0$: & si l'on mène les droites Ae, Al , qui rencontrent le côté CB prolongé aux points f, k , les droites ef, lk , seront encore chacune égale à la donnée b . De là on peut voir que quoiqu'en résolvant le Problème on n'ait eu en vûe que de trouver la valeur de DE , on est cependant arrivé à une égalité dont les racines ont fourni d'autres valeurs DL, De, Dl , qui ont toutes servi à résoudre le Problème en quelque sens.

REMARQUE II.

430. S'IL y a lieu de croire que l'égalité qui renferme les conditions d'un Problème se peut abaisser à un moindre

moindre degré, il est à propos de tenter d'autres voies que celles qu'on a suivies quand même elles paroîtroient moins naturelles; parce qu'il arrive souvent qu'elles conduisent à des égalités plus simples, & que d'ailleurs il est assez difficile d'abaisser des égalités composées. Voici deux autres manières de résoudre le Problème précédent qui pourront servir à faire comprendre cette remarque.

Ayant supposé le Problème résolu, je mène EG per Fig. 242.
pendiculaire sur AE qui rencontre le côté AB prolongé en G , & je prends pour inconnues les deux droites AF & BG que je nomme y & z . Cela fait, les triangles rectangles semblables ABF , AGE , donnent $AB (a)$. $AF (y) :: AE (y+b)$. $AG (a+z)$. Et partant $yy+by = aa+az$. Or comme j'ai deux inconnues & que le Problème est déterminé, il faut encore chercher une autre égalité. Pour la trouver, je considère que $EG=AF (y)$; car menant EH perpendiculaire sur AG , le triangle rectangle EHG est semblable au triangle rectangle ABF , & de plus égal, puisque les côtés homologues AB , EH , sont égaux entr'eux. J'aurai donc (à cause du triangle rectangle AGE) cette autre égalité $aa+az+zz=yy+by+bb+yy=2yy+2by+bb$, dans laquelle mettant à la place de $2yy+2by$ sa valeur $2aa+2az$ trouvée par le moyen de la première égalité, il vient $aa+2az+zz=2aa+2az+bb$ qui se réduit à cette égalité très-simple $z=\sqrt{aa+bb}$, qui fournit d'abord la même construction que ci-dessus.

AUTRE MANIÈRE.

La manière suivante a cela de particulier qu'elle réussit Fig. 243.
également soit que la figure $ABCD$ soit un carré, ou qu'elle soit un rhombe. Ayant mené par le point cherché F , que je regarde comme donné, la ligne FG qui fasse avec AF l'angle AFG égal à l'angle donné ACE & qui rencontre au point G la diagonale AC prolongée autant qu'il est nécessaire; on aura trois triangles ACE , AFG ,
Aaa

GCF , qui seront semblables entr'eux. Car 1°. L'angle en A étant commun aux deux triangles ACE , AFG , & les angles ACE , AFG , étant égaux par la supposition ; il est visible que ces deux triangles seront semblables 2°. Le triangle ADC étant isoscèle, l'angle DCA ou ECG sera égal à l'angle DAC ou ACF , & ajoutant de part & d'autre le même angle FCE , l'angle FCG sera égal à l'angle ACE ou AFG ; & partant puisque l'angle en G est commun, les deux triangles AGF , FGC , seront semblables. Cela posé, soient les inconnues $CE = x$, $AG = z$, & les données $DC = a$, $FE = b$, $AC = c$; on aura (à cause des parallèles AD , CF ,) cette proportion : $CE (x) . FE (b) :: CD (a) . AF = \frac{ab}{x}$. Or à cause des triangles semblables ACE , AFG , GCF , on trouvera $AC (c) . CE (x) :: AF (\frac{ab}{x}) . FG = \frac{ab}{c}$. Et $AG (z) . FG (\frac{ab}{c}) :: \frac{ab}{c} . CG (z - c)$. D'où l'on forme en multipliant les extrêmes & les moyens, l'égalité $zz - cz = \frac{aabb}{cc}$ qui fournit cette construction.

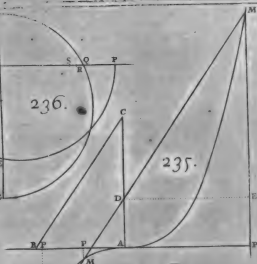
FIG. 243. Ayant mené du point A perpendiculairement sur AC la ligne $AH = \frac{ab}{c}$, on tirera par le point du milieu L de la diagonale AC la ligne HL , & on prendra sur cette diagonale prolongée du côté de C la partie LG égale à LH . On décrira ensuite du centre G & du rayon GF égal à AH , un arc de cercle qui coupera le côté BC au point cherché F . Cela est évident ; puisque par la construction $zz - cz = \frac{aabb}{cc}$, & que $GF = \frac{ab}{c}$.

EXEMPLE III.

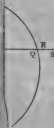
FIG. 244. 431. TROUVER sur une ligne droite indéfinie DE donnée de position, deux points D , E ; desquels ayant mené à deux points donnés O , C , hors de cette ligne, les droites DO , OE , DC , CE ; l'angle DOE soit droit



236.



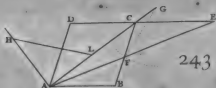
235.



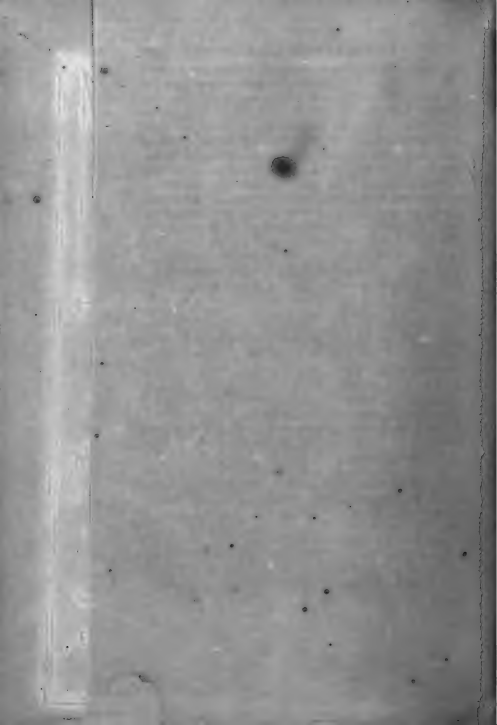
242.



241.



243.



& l'angle DCE égal à un angle donné TPS .

Supposons la chose faite, je décris du diamètre DE un demi cercle qui passera par le point O , puisque l'angle DOE est droit; & sur la corde DE je décris un arc de cercle capable de l'angle donné, lequel passera par conséquent par le point C . Du point H centre de cet arc, & des points donnés O, C , je mene sur DE les perpendiculaires HK, OA, CB , & je nomme les données OA, a ; CB, b ; AB, c ; les inconnues AK, x ; KH, y . Cela posé, il est clair par les Elemens de Geometrie, 1^o. Que le point K sera le milieu de la ligne DE , & par conséquent le centre du demi-cercle DOE . 2^o. Que si par le sommet P de l'angle donné TPS on mene une perpendiculaire PQ à l'un des côtés PT , l'angle QPS qu'elle fait avec l'autre côté PS , sera égal à l'angle KEH . Or à cause du triangle rectangle KAO le quarré KO ou $KE = aa + xx$, & à cause du triangle rectangle HKE le quarré $HE = aa + xx + yy$: mais prolongeant HK jusqu'à ce qu'elle rencontre en R une parallèle CR à DE , on aura (à cause du triangle rectangle CRH) le quarré $CH = bb + 2by + yy + cc + 2cx + xx$. Donc puisque les lignes HE, HC , sont rayons du même cercle, on formera par la comparaison de leurs valeurs analytiques cette équation $aa + xx + yy = bb + 2by + yy + cc + 2cx + xx$, qui, en effaçant de part & d'autre $yy + xx$, & pour abréger, faisant $\frac{aa - bb - cc}{2c} = d$, se réduit à celle ci; $y = \frac{cd - cx}{b}$.

Si l'on considère le chemin qu'on a suivi pour arriver à l'équation précédente, on verra qu'elle renferme cette condition, sçavoir que les cercles décrits des centres K, H , & des rayons KO, HC , se rencontrent sur la ligne DE dans les mêmes points D, E ; de sorte qu'il ne reste plus qu'à faire que l'angle KEH soit égal à l'angle QPS . Pour en venir à bout.

Ayant pris sur la ligne PQ la partie PQ égale à CB , & tiré QS parallèle au côté PT , & terminé en S par

l'autre côté PS ; il est évident que le triangle rectangle EKH doit être semblable au triangle rectangle PQS , & qu'ainsi, en nommant la donné QS , f , on aura cette proportion ; $EK(\sqrt{aa+xx}) . KH(y) :: PQ(b) . QS(f)$; d'où l'on tire $y = \frac{f}{b} \sqrt{aa+xx} = \frac{cd-cx}{b}$. Quarrant chaque membre pour ôter les incommensurables , & mettant par ordre l'égalité , on trouve $xx - \frac{2cc}{cc-ff} x + \frac{ccdd-aa ff}{cc-ff} = 0$, dont l'une des racines fournira pour $AK(x)$ une valeur telle que décrivant un cercle du centre K & du rayon KO , il coupera la ligne DE aux deux points cherchés D, E .

On peut trouver les racines de cette égalité, selon les articles 380. ou 381. (Liv. preced.) : mais quoique les methodes qu'on y explique soient tres-simples eû égard à leur generalité, il arrive néanmoins tres-souvent qu'en considerant avec attention la nature d'une question particuliere, on trouve des constructions plus faciles. Par exemple ; on peut remarquer ici, 1°. Que si par le point de milieu F de la ligne OC qui joint les deux points donnés, on mene la perpendiculaire FG qui rencontre en G la ligne DE donnée de position, on aura $AG=d$; car nommant AG , z ; les triangles rectangles GAO , GBG , donneront $GO^2 = zz + aa$ & $GC^2 = zz + 2cz + cc + bb$, & comparant ensemble ces deux valeurs qui doivent être égales entr'elles, puisque le point G est dans la perpendiculaire FG qui divise par le milieu la ligne OC , il vient $zz + aa = zz + 2cz + cc + bb$, d'où l'on tire $AG(z) = \frac{aa-bb-cc}{2c} = d$. 2°. Que l'égalité

$f\sqrt{aa+xx} = cd-cx$ qui renferme les conditions du Problème, se reduit à cette proportion ; $GK(d-x) .$

$KO(\sqrt{aa+xx}) :: QS(f) AB(c)$: de sorte que si l'on

* Art. 350. décrit * le lieu de tous les points K tels qu'ayant mené aux deux points donnés G, O , les droites KG, KO , elle soient toujours entr'elles en la raison donnée de

QS à AB ; ce lieu coupera la ligne DE au point cherché K . Ce qui donne la construction suivante qui est très simple.

Par le point de milieu F de la ligne OC qui joint les deux points donnés ayant mené la perpendiculaire FG , qui rencontre en G la ligne DE donnée de position, on divisera la ligne OG au point M , en sorte que $GM : MO :: QS : AB$. Et on la prolongera du côté de G jusqu'au point N , en sorte que $GN : NO :: QS : AB$. Du diamètre MN on décrira un cercle qui coupera la ligne DE en un point K , duquel point comme centre, & du rayon KO ayant décrit un cercle ; ce cercle rencontrera la ligne DE aux deux points cherchés D, E .

Comme le cercle qui a pour diamètre la ligne MN , coupe la droite DE non seulement au point K , mais encore en un autre point L ; il s'ensuit qu'on peut se servir du point L de même que l'on a fait du point K , pour trouver sur la ligne DE deux autres points qui satisferont également, & qu'ainsi cette question peut avoir deux différentes solutions.

Si l'angle DCE devoit être droit aussi bien que l'angle DOE , il est clair que QS (f) deviendrait nulle, & qu'ainsi l'égalité $f\sqrt{aa+xx}=cd-cx$ se changeroit en celle-ci $cd-cx=0$, d'où l'on tire $x=d$; c'est à dire que le centre K tomberoit alors sur le point G . Et si le point B tomboit sur le point A , l'égalité $f\sqrt{aa+xx}=cd-cx$ se changeroit en celle-ci $f\sqrt{aa+xx}=\frac{aa-bb}{2}$ en mettant pour cd sa valeur $\frac{aa-bb-c^2}{2}$, & effaçant ensuite les termes où c (qui devient en ce cas nul) se rencontre ; d'où l'on voit que dans ce cas, si du point O comme centre, & du rayon $OK=\frac{aa-bb}{2f}$ on décrit un arc de cercle, il coupera la ligne DE au point cherché K . Ceci s'accorde parfaitement avec les articles 66. 67. 68. du Livre second, & la construction generale peut servir à trouver tout d'un coup dans une Ellipse dont

deux diamètres conjugués sont donnés, deux autres diamètres conjugués qui fassent entr'eux un angle donné; ce qui dans l'art. 65. avoit été renvoyé ici.

EXEMPLE IV.

FIG. 245. 432. **T**ROIS points A, B, C , étant donnés, en trouver un quatrième, M , duquel ayant mené à ces points les droites MA, MB, MC ; les différences de l'une d'elles aux deux autres soient données.

Cette question est susceptible de trois différens cas. Car ou les trois lignes MA, MB, MC , sont toutes égales entr'elles; ou il y en a seulement deux qui soient égales entr'elles; ou enfin toutes les trois sont inégales entr'elles.

Premier cas. Lorsque les trois lignes MA, MB, MC , sont égales entr'elles; ou ce qui est la même chose lorsqu'elles deux différences données sont nulles. Il est clair que le point cherché M fera le centre du cercle qui passe par les points donnés A, B, C .

FIG. 246. *Second cas.* Lorsque deux des trois lignes MA, MB, MC , comme MA, MB , doivent être égales entr'elles; ou (ce qui est la même chose) lorsqu'une des différences données est nulle.

Ayant tiré du point donné C , la perpendiculaire CO sur la ligne AB qui joint les deux autres points donnés A, B ; du point M que l'on suppose être celui qu'on cherche, ayant mené les droites MP, MQ , parallèles à CO, OB ; il est clair que AP sera égale à PB , puisque AM doit être égale à MB . Nommant donc les données AP ou PB, a ; OP, b ; OC, c ; $AM - MC, f$; & les inconnues AM, z ; PM, y ; les triangles rectangles APM, MQC , donneront ces deux égalités $zz = aa + yy$, & $zz - 2fz + ff = cc - 2cy + yy + bb$; d'où en retranchant par ordre chaque membre de la seconde de ceux de la première, il vient $2fz - ff = aa - cc + 2cy - bb$, qui se réduit à cette proportion $z, y + \frac{aa - bb - cc + ff}{2c} :: c, f$. De là on tire la construction suivante.

Soit menée par le point de milieu P de la ligne AB , la perpendiculaire $PD = \frac{aa - bb - cc + ff}{2c}$. Soit divisée l'hypothénuse AD prolongée du côté qu'il sera nécessaire, aux points E, F , en sorte que $AE. ED :: c. f$, & $AF. FD :: c. f$. Du diamètre EF soit décrit un cercle; il coupera la ligne PD au point cherché M .

Car ayant mené la droite MA , il est clair par la propriété du cercle EMF , * que $AM (z)$. MD * Art. 350. $(y + \frac{aa - bb - cc + ff}{2c}) :: c. f$; & par la propriété de la perpendiculaire PM , que $zz = aa + yy$. Or comme ces deux équations renferment les conditions du Problème, il s'ensuit &c.

Si par l'autre point N , où la ligne DP rencontre la circonférence, on mène les droites NA, NB, NC ; les deux NA, NB , seront égales entr'elles, & la différence de chacune de ces deux droites à la troisième NC sera égale à la donnée f ; de sorte que le point N satisfait aussi, mais avec cette différence que NC est la plus grande des trois droites NA, NB, NC , au lieu que MC est la plus petite des trois MA, MB, MC .

On peut encore résoudre ce second cas sans aucun calcul. Je suppose comme auparavant que M soit le point cherché, & ayant tiré les droites MA, MB, MC , je décris du centre C , & du rayon $CD = MA - MC$, un cercle $DEK FH$. Du point D où la ligne MC rencontre ce cercle, je mène aux deux points donnés A, B , les droites DA, DB qui rencontrent le cercle aux points E, F ; par où je tire les rayons EC, CF , & la corde EF . Cela fait, puisque $MC + CD$ ou $MD = MA$, & que les lignes CD, CE , sont rayons d'un même cercle, les triangles DMA, DCE , seront isocèles; & par conséquent semblables parce que l'angle en D est commun: c'est pourquoi les lignes CE, MA , seront parallèles. On prouvera de même que les lignes CF, MB , seront aussi parallèles; ce qui donne $DA. DE :: DM. DC :: DB. DF$. Et de là on voit que toute la difficulté

FIG. 247.

se réduit à trouver sur la circonférence du cercle $DEK FH$, le point D tel qu'ayant mené les droites DA , DB , qui rencontrent la circonférence aux points E , F ; la corde EF soit parallèle à la ligne AB . Or cela se peut faire ainsi.

Ayant décrit du point C un cercle qui ait pour rayon une ligne $CD = AM - MC$, & tiré AC qui rencontre ce cercle aux points K , H ; on prendra sur AB la partie AG quatrième proportionnelle à AB , AH , AK , & on menera du point G la tangente GE au cercle $EDHFK$. Ayant mené par le point touchant E la ligne AE qui rencontre le cercle au point D , on tirera DC , sur laquelle on prendra le point M tel que $DM : DC :: DA : DE$. Je dis qu'il sera celui qu'on cherche.

Car par la propriété du cercle $DEK FH$ le rectangle $HA \times AK = DA \times AE$; Et par conséquent $BA : AD :: AE : AG$; c'est pourquoi les triangles DAB , GAE , qui ont l'angle A commun, & les côtés autour de cet angle réciproquement proportionnels, seront semblables. L'angle AEG sera donc égal à l'angle ABD , mais cet angle AEG étant fait par la tangente EG & par la corde DE prolongée du côté de E , a pour mesure la moitié de l'arc DE . Il sera donc égal (en tirant par le point F où la ligne DB rencontre la circonférence, la corde EF) à l'angle $D FE$; & par conséquent les lignes FE , AB , seront parallèles entr'elles. Or par la construction $DC : DM :: DE : DA :: DF : FB$. Les triangles DMA , DMB , seront donc isocèles; puisque les triangles DCE , DCF , qui leur sont semblables sont isocèles. Les lignes AM , MB , seront donc égales chacune à DM , & par conséquent entr'elles; & de plus AM où DM surpassera MC de la grandeur donnée CD . Et c'est ce qui étoit proposé.

FIG. 148. *Troisième cas.* Lorsque les trois lignes MA , MP , MC , sont inégales entr'elles. Du point donné C , je mène la perpendiculaire CO sur la ligne AB qui joint les deux autres points donnés; & du point M , que je suppose

suppose être celui qu'on demande, les perpendiculaires MP , MQ , sur les lignes AB , CO . Je nomme les données AO , a ; OB , b ; CO , c ; $AM - MB$, d ; $AM - MC$, f ; & les inconnues OP , x ; PM , y ; AM , z : ce qui donne $AP = a + x$, $BP = b - x$, $CQ = c - y$, $BM = z - d$, $CM = z - f$. Par le moyen des triangles rectangles APM , BPM , CQM , je trouve les trois équations suivantes, la première, $zz = aa + 2ax + xx + yy$; la deuxième, $zz - 2dz + dd = bb - 2bx + xx + yy$; la troisième, $zz - 2fz + ff = cc - 2cy + yy + xx$; & retranchant par ordre les membres des deux dernières de ceux de la première, je forme une quatrième, & une cinquième équation; sçavoir la quatrième, $2dz - dd = aa - bb + 2ax - 2bx$, & la cinquième, $2fz - ff = aa - cc + 2ax + 2cy$. Je mets dans la première équation à la place de yy le carré de la valeur de y trouvée par le moyen de la cinquième; & ensuite à la place de x sa valeur trouvée par le moyen de la quatrième, & à la place de xx le carré de cette valeur: ce qui donne enfin une égalité où il n'y a plus d'inconnues que la seule z qui ne monte qu'au carré. C'est pourquoi on la pourra toujours résoudre en n'employant que des lignes droites & des cercles, comme l'on a enseigné dans les articles 380, ou 382. (Liv. preced.) Or ayant la valeur de l'inconnue z , il est facile de trouver le point cherché M ; car il sera dans l'intersection de deux arcs de cercle, dont l'un aura pour centre le point A , & pour rayon la ligne AM (z); & l'autre pour centre le point B , & pour rayon la ligne BM ($z - d$).

On voit assez qu'en achevant le calcul, on seroit arrivé à une égalité du deuxième degré qui auroit renfermé dans ses termes des quantités tres composées; de sorte que pour les réunir sous des expressions simples, comme le demandent les articles 380, & 382, on auroit besoin d'un grand nombre d'operations; ce qui rendroit la construction tres-longue. C'est pourquoi on se servira de celle-ci par le moyen de laquelle on réduit ce cas au precedent.

Les deux droites AB , AC , qui joignent les points Fig. 249.
Bbb

donnés étant divisées par le milieu aux deux points D, F , & ayant mené du point M que je suppose être celui qu'on cherche, les perpendiculaires MP, MQ , sur ces deux lignes, on nommera les données $AB, 2a$; $BC, 2b$; $AM - MB, 2c$; $AM - MC, 2d$; & les inconnues DP, x ; FQ, y . Cela posé, si l'on nomme $2t$ la somme inconnue des deux droites AM, BM ; la plus grande AM sera $t + c$ & la moindre BM sera $t - c$. Or les triangles rectangles APM, BPM , donnent $\frac{PM}{AM} = \frac{AM - AP}{BM - BP}$, c'est à dire en termes analytiques $tt + 2ct + cc - aa - 2ax - xx = tt - 2ct + cc - aa + 2ax - xx$, d'où l'on tire $t = \frac{ax}{c}$; & par conséquent $AM(t + c) = \frac{ax}{c} + c$. On trouvera de même par le moyen des deux triangles rectangles AQM, CQM , que $AM = \frac{by}{d} + d$; ce qui, en comparant ensemble les deux valeurs de AM , donne cette équation $\frac{ax}{c} + c = \frac{by}{d} + d$, ou $\frac{ax}{c} = \frac{by}{d} + d - c = \frac{by}{d} + f$, en faisant pour abréger $d - c = f$. D'où il est clair que le point cherché M doit être tel qu'ayant mené les perpendiculaires MP, MQ , sur les deux droites AB, AC ; on ait cette équation $\frac{ax}{c} = \frac{by}{d} + f$, ou ce qui revient au même cette proportion $x. y + \frac{df}{b} :: b. \frac{ad}{c}$. Or cela suffit pour trouver la construction suivante.

Ayant joint les points donnés par les deux droites AB, AC , & divisé ces droites par le milieu aux points D, F ; on prendra sur AC du côté du point A la partie $FK = \frac{df}{b}$; & ayant tiré sur AB, AC , les perpendiculaires DO, KS , qui se rencontrent au point H , on mènera dans l'angle OHS la droite HM qui soit le lieu des points M , tels qu'ayant tiré de chacun d'eux

les perpendiculaires MO , MR , sur les côtés HO , HS ; la droite MO soit toujours à la droite MR , en la raison donnée de b à $\frac{a}{c}$. Ensuite l'on tirera AE perpendiculaire sur HM , & l'ayant prolongée en G en sorte que EG soit égale à AE , on trouvera par le second cas le point M , tel qu'ayant mené les droites MA , MG , MC ; les deux MA , MG , soient égales entr'elles, & la différence de MA à MC soit la donnée $2d$. Je dis qu'il satisfera à la question.

Car par la propriété de la droite HM , on aura toujours MO ou $DP(x)$. MR ou $QK(y + \frac{af}{b}) :: b.\frac{af}{b}$; & par conséquent le point M se doit trouver dans cette ligne. Il sera donc également éloigné des points A , G ; mais de plus la différence de AM à MC doit être la donnée $2d$. Donc &c.

REMARQUE.

433. Si au lieu que dans cet exemple, les deux différences de l'une de ces trois droites MA , MB , MC , aux deux autres sont données; on vouloit à présent que ce fussent les deux sommes de l'une de ces droites avec chacune des deux autres, ou bien la somme de l'une d'elles avec une autre & la différence de la même avec la troisième: la question n'en deviendrait pas plus difficile, & on pourroit toujours la résoudre par les mêmes méthodes. Ce que je n'expliquerai point en détail, afin de laisser quelque chose à l'industrie des Lecteurs.

COROLLAIRE I.

434. DE LA on voit comment on peut décrire un cercle qui touche trois cercles donnés.

Car soient les points A , B , C , les centres des cercles donnés, & le point M celui du cercle qu'on cherche, lequel touche les cercles donnés aux points D , E , F . du côté que l'on voit dans la figure. Soient les rayons Bbb ij.

FIG. 250.

des cercles donnés $AD = a$, $BE = b$, $CF = c$; & le rayon du cercle qu'on cherche MD ou ME ou $MF = z$. Cela posé, on aura $AM = z + a$, $MB = z + b$, $MC = z - c$; & partant $AM - MB = a - b$, $MB - MC = b + c$, $AM - MC = a + c$. D'où il est évident que la question se réduit à trouver un point M , duquel ayant mené aux trois points donnés A , B , C , les droites MA , MB , MC , leurs différences soient données.

COROLLAIRE II.

FIG. 251.
252.

435. **D**E-LA on tire encore la manière de décrire une Section conique qui ait pour foyer un point donné F , qui passe par deux autres points donnés B , C , & qui touche une ligne droite DE donnée de position.

On doit distinguer ici deux differens cas, dont le premier est, lorsque les trois points donnés F , B , C , tombent du même côté de la droite indéfinie DE ; & le second lorsqu'ils tombent de part & d'autre.

FIG. 251.

Premier cas. Ayant mené FD perpendiculaire sur DE , & l'ayant prolongée en A en sorte que DA soit égale à DF ; on tirera les droites FB , FC . On trouvera le point M tel que la différence de AM & BM soit égale à FB , & celle de AM & MC égale à FC . On décrira ensuite * une Section conique qui ait pour ses deux foyers les points F , M , & pour l'axe qui passe par les foyers une ligne égale à AM . Je dis qu'elle sera celle qu'on cherche.

* Def. 1. II.
§ 1. III.

Car 1°. Le point E où la ligne AM rencontre la droite DE est à la Section, puisque FE étant égale à AE , on aura dans l'Ellipse la somme des droites FE , EM , & dans l'Hyperbole la différence égale à l'axe qui passe par les foyers; & par la même raison les points B , C , seront aussi dans la Section: 2°. Par la construction les angles FED , DEA , sont égaux entr'eux; & par conséquent la ligne

* Art. 60.
§ 113.

ED est * tangente en E .

Il faut remarquer dans ce cas que lorsqu'on cherche

le foyer M du même côté du foyer donné F par rapport à la ligne DE , la Section qu'on trouve est une Ellipse ; au lieu qu'elle sera une Hyperbole ou deux Hyperboles opposées, lorsqu'on le cherchera de l'autre côté.

Second cas. Il est évident que dans ce dernier cas il ne FIG. 251. peut y avoir d'Ellipse qui satisfasse, mais seulement deux Hyperboles opposées. Pour les trouver ; ayant mené comme dans le premier cas FD perpendiculaire sur DE , & l'ayant prolongée en A en sorte que DA soit égale à DF ; on cherchera le point M tel que la somme de AM & BM soit égale à la donnée FB , & la différence de AM & MC soit égale à la donnée FC . On décrira enfin deux Hyperboles opposées qui aient pour foyers les deux points F, M , & dont le premier axe soit égal à AM . Je dis qu'elles ont les conditions requises.

Car 1°. Le point E , où la ligne AM rencontre la ligne DE , sera à l'une de ces deux Hyperboles, puisque FE étant égale à AE , la différence des droites FE, ME , sera égale à AM valeur du premier axe ; & par la même raison les points B, C , seront à ces Hyperboles. 2°. La ligne * Art. 123. DE sera * tangente en E , puisque par la construction les angles AED, DEF , sont égaux entr'eux.

Si le point C tomboit du même côté du point B par rapport à la ligne DE la somme des deux droites AM & MC seroit égale à la donnée FC ; au lieu que c'est la différence lorsque les points B, C , tombent de part & d'autre de la ligne DE , comme l'on a supposé dans cette figure.

Si l'on proposoit de décrire une Section conique qui eût pour foyer un point donné, pour tangentes deux lignes données de position, & qui passât par un autre point donné ; on trouveroit par le moyen de ces deux lignes deux points comme l'on vient de faire le point A , desquels ayant mené deux droites qui aboutissent à l'autre foyer qu'on cherche, elles doivent être égales entr'elles, & leur différence ou leur somme avec celle qui part du

B b b iij

point où doit passer la Section & qui aboutir au même foyer, sera toujours donnée : de sorte qu'on pourra toujours résoudre la question par le moyen de l'Exemple précédent & de la Remarque. Enfin s'il falloit décrire une Section qui touchât trois lignes données de position, & qui eût pour foyer un point donné ; on trouveroit par le moyen de ces trois lignes trois points, comme l'on a fait le point A par le moyen de la ligne DE dans les deux cas précédens, & le centre du cercle qui passeroit par ces trois points, seroit l'autre foyer de la Section, laquelle auroit pour premier axe une ligne égale au rayon de ce cercle.

On doit observer dans tous ces différens cas, que si le point cherché M étoit infiniment éloigné du point F ; la Section deviendrait alors une Parabole dont les diamètres seroient parallèles aux lignes, qui, continuées à l'infini, aboutiroient au point cherché.

EXEMPLE V.

FIG. 253. 436. **U**NE Parabole $NC S$ étant donnée avec un de ses arcs $M N$; trouver un autre arc $R S$ qui soit à l'arc $M N$, en raison donnée de nombre à nombre.

Ayant prolongé l'axe de la Parabole du côté de son origine C jusques en A , en sorte que CA soit égal à la moitié de son paramètre, & décrit une Hyperbole équilatère $E A F$ qui ait pour centre le point C & pour la moitié de son premier axe la ligne CA ; on menera parallèlement à l'axe CA les droites MB , NE , KD , SF , qui rencontrent le second axe aux points H , L , K , O , & l'Hyperbole aux points B , E , D , F , desquels on tirera sur les Asymptotes les perpendiculaires BP , EQ , DG , FI . Cela fait, il est visible que le rectangle $AC * MN$ ou * le Trapeze hyperbolique $H B E L$ est égal au Secteur hyperbolique $C B E$ plus le triangle $C L E$ moins le triangle $C H B$; & de même que $AC * RS = C D F + C O F - C K D$. Or supposant que la raison donnée de l'arc $M N$ à l'arc $R S$ soit comme m est à n , les lettres m & n expliquent des nombres entiers quel-

conques) on aura par la condition du Problème $AC \times MN$ ou $CBE + CLE - CHB$. $AC \times RS$ ou $CDF + COF - CKD :: m.n$, & par conséquent $nCBE + nCLE - nCHB = mCDF + mCOF - mCKD$. Si donc l'on nomme les données CP, b ; CQ, c ; l'inconnue CG, x ; & qu'on prenne $CI = x \sqrt{\frac{c}{b}}$, il est clair * que le Secteur hyper- * *Art. 223.*
bolique CBE . $CDF :: m.n$, & qu'ainsi $nCBE = mCDF$; d'où l'on voit que l'égalité précédente se change en celle-ci $nCLE - nCHB = mCOF - mCKD$ qui ne renferme plus d'espaces hyperboliques, mais seulement des triangles rectangles dont il s'agit maintenant de trouver les valeurs analytiques.

Les droites CP, HB , forment en s'entrecoupant au point V deux triangles rectangles VHC, VPB , qui sont semblables; puisque les angles en V étant opposés au sommet sont égaux; ce qui donne $HV.CV :: VP.VB$, & en multipliant les extrêmes & les moyens $HV \times VB = CV \times VP$. De plus à cause de l'Hyperbole équilatère EAF , l'angle VCA ou CVH * est demi * *Def. 16.*
droit, & par conséquent le triangle rectangle CHV III. est isoscèle, aussi-bien que son semblable VPB , ce qui donne $VP = PB, CH = HV$, & $\overline{CV} = \overline{CH} + \overline{HV} = 2\overline{HV}$. Donc le quadruple du triangle rectangle CHB , c'est à dire $2CH \times HB = 2HV \times HV + VB$
 $= 2\overline{HV} + 2HV \times VB = \overline{CV} + 2CV \times VP = \overline{CV} + 2CV \times VP + \overline{VP} - \overline{VP} = \overline{CP} - \overline{PB}$, puisque $\overline{CV} + 2CV \times VP + \overline{VP}$ est le carré de $CV + VP$ ou de CP . Et par conséquent le triangle $CHB = \frac{1}{4}\overline{CP} - \frac{1}{4}\overline{PB}$. On prouvera de même que le triangle $CLE = \frac{1}{4}\overline{CQ} - \frac{1}{4}\overline{QE}$, que le triangle $CKD = \frac{1}{4}\overline{CG} - \frac{1}{4}\overline{GD}$, & enfin que le triangle $COF = \frac{1}{4}\overline{CI} - \frac{1}{4}\overline{IF}$. C'est pourquoi nommant aa la puissance de l'Hyperbole, on aura le triangle $CHB = \frac{1}{4}bb - \frac{a^2}{4bb}$, le triangle

$CLE = \frac{1}{4}cc - \frac{a^4}{4cc}$, le triangle $CKD = \frac{1}{4}xx - \frac{a^4}{4xx}$, le
 * Art. 101. triangle $COF = \frac{xx}{4} \sqrt{\frac{c^{1n}}{b^{1n}}} - \frac{a^4}{4xx} \sqrt{\frac{b^{1n}}{c^{1n}}}$; puisque * PB
 $= \frac{a^4}{b}$, $QE = \frac{a^4}{c}$, $IF = \frac{a^4}{x} \sqrt{\frac{b^1}{c^n}}$: & mettant ces valeurs
 à la place des triangles qu'elles expriment dans l'égalité
 $nCLE - nCHB = mCOF - mCKD$, on en formera
 celle ci $\frac{1}{4}n \times cc - \frac{a^4}{cc} - bb + \frac{a^4}{bb} = \frac{1}{4}m \times xx \sqrt{\frac{c^{1n}}{b^{1n}}} - \frac{a^4}{xx} \sqrt{\frac{b^{1n}}{c^{1n}}}$
 $- xx + \frac{a^4}{4xx}$ qui se réduit, en operant selon les regles
 ordinaires de l'Algebre, à cette égalité du deuxième de-
 gré $x^4 - \frac{n \times a^4 - nbbccncc - bb \times \sqrt{b^{1n}}}{m \times bbbccn \sqrt{c^{1n}} - \sqrt{b^{1n}}} xx + a^4 \sqrt{\frac{b^{1n}}{c^{1n}}} = 0$, dont
 la resolution doit fournir pour $CG(x)$ une valeur telle
 qu'en prenant $CI = x \sqrt{\frac{c^n}{b^n}}$, & tirant les perpendiculai-
 res GD, IF , qui rencontrent l'Hyperbole équilatera aux
 points D, F ; l'arc RS que les paralleles DR, FS à l'axe
 coupent sur la Parabole, sera à l'arc MN en la raison
 donnée de n à m .

Il est à propos de remarquer, 1°. Que le second terme
 de cette égalité est toujours negatif, parce que $CQ(c)$
 surpasse $CP(b)$; & qu'ainsi ces deux racines seront toutes
 deux vraies ou toutes deux imaginaires, selon que la moi-
 tié de la grandeur connue au second terme est plus gran-
 de ou moindre que $aa \sqrt{\frac{b^n}{c^n}}$ racine quarrée du dernier
 terme: ce qui est une suite de la resolution des égalités
 du second degré. 2°. Que $\overline{CG^2}(xx)$ étant une des ra-
 cines de cette égalité, $\overline{IF^2}$ en sera l'autre. Car puisque
 * Art. 101. $CI = x \sqrt{\frac{c^n}{b^n}}$, il s'ensuit * que $IF = \frac{a^4}{x} \sqrt{\frac{b^n}{c^n}}$. Or on sçait
 que le dernier terme d'une égalité, est le produit de ses
 racines. Si donc on divise le dernier terme $a^4 \sqrt{\frac{b^{1n}}{c^{1n}}}$ de
 l'égalité

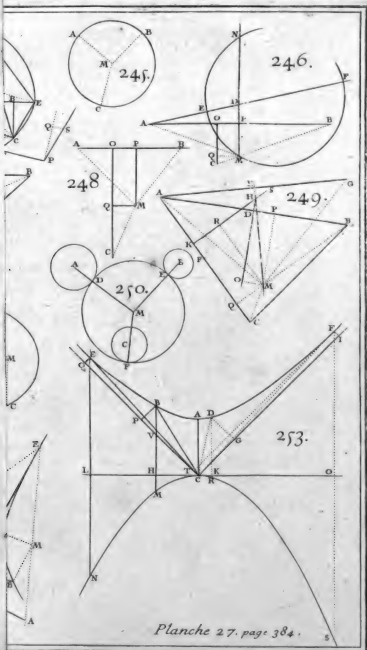
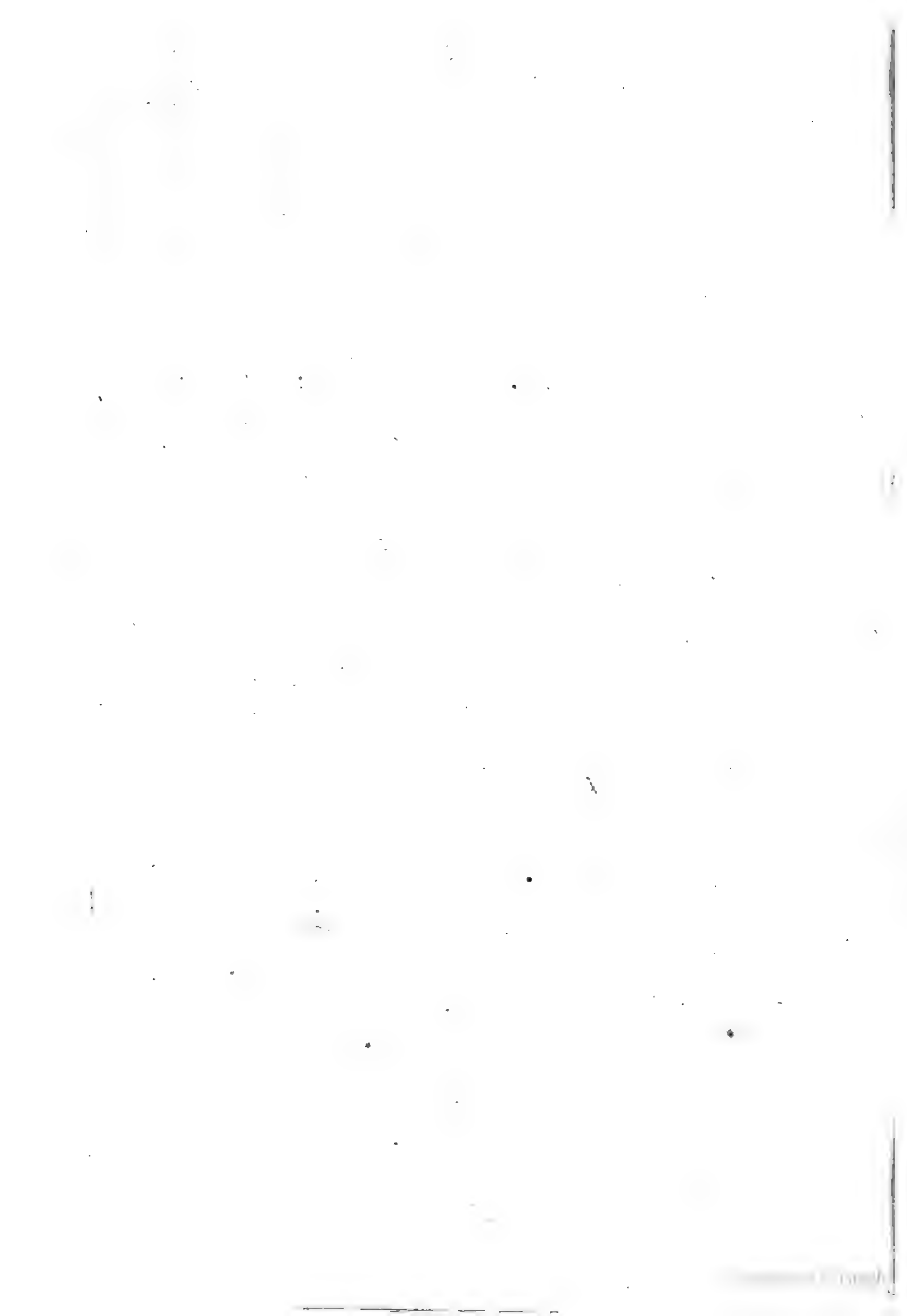


Planche 27. page 384.



l'égalité précédente, par le quarré \overline{CG} (xx) que l'on suppose être l'une de ses deux racines; l'autre sera $\frac{a^4}{xx} \sqrt{\frac{bb}{c^{2n}}}$ qui est le quarré de FI . D'où l'on voit que si l'on prend sur les deux Asymptotes les parties CG, CT , égales aux deux racines de l'égalité précédente; & qu'ayant tiré les paralleles GD, TF , aux Asymptotes, on mene par les points D, F , où elles rencontrent l'Hyperbole équilatère EAF , les paralleles DR, FS , à l'axe: elles couperont sur la Parabole l'arc cherché RS .

Si $m = n$, l'équation generale se changera en celle-ci $x^4 - \frac{bbcc - a^4}{cc} xx + \frac{a^4 bb}{cc} = a$, dont les deux racines fourniront $CG(x) = b = CP$, & $CT(x) = \frac{a^2}{c} = QE$, d'où il suit qu'on trouve par leur moyen un arc RS , semblablement posé de l'autre côté de l'axe, par rapport à l'arc MN . Or comme l'on sçait d'ailleurs* que les deux arcs RS, MN , * Art. 86. étant semblablement posés de part & d'autre de l'axe sont égaux entr'eux, cela sert à confirmer les raisonnemens que l'on vient de faire. De là il est aisé de conclure qu'un arc parabolique MN étant donné, on n'en peut trouver aucun autre RS qui soit plus proche ou plus éloigné de l'origine C de l'axe & qui lui soit égal; sans supposer la quadrature de quelque Secteur hyperbolique, ou (ce qui revient au même) la rectification de quelque arc parabolique.

Si $m=1$ & $n=2$, on aura $x^4 - \frac{2a^4 bb - 2cc b^4}{c^4 + b b c c} xx + \frac{a^4 b^4}{c^4} = 0$, & si $m=2$ & $n=3$, ou, ce qui est la même chose, si l'arc RS doit être à l'arc MN comme 3 est à 2, on trouvera $x^4 - \frac{3a^4 - 3bbcc + bcc - b^4}{2c^4 - 2cc b^4} xx + \frac{a^4 b^4}{c^4} = 0$; & la resolution de ces égalités fournira celle du Problème. Il en est de même des autres valeurs de m & n .

M. Bernoulli, celebre Professeur des Mathematiques à Groningue, a resolu le premier ce Problème d'une maniere differente de celle ci. On peut voir ce qu'il en dit dans les Actes de Leipzig de l'année 1698. p. 161.

FIG. 254.

437. UN angle BAC étant donné avec un point D au dedans de cet angle, décrire un cercle qui passe par le point donné D , qui touche le côté AB en quelque point P , & qui coupe sur l'autre côté AC une partie OC égale à une ligne donnée $2a$.

Ayant supposé le Problème résolu, on mènera du point donné D , la ligne DA qui passe par le sommet A de l'angle donné, la ligne DP qui passe par le point touchant P & rencontre en H le côté AC prolongé, la ligne DE parallèle à AC , & la perpendiculaire DB sur le côté AB : & ayant divisé la partie interceptée OC ($2a$) par le milieu en Q , on nommera les inconnues AP, x ; AQ, z ; DH, t ; & les données AE, m ; AB, g ; BD, b ; DE, f ; AD, n .

Cela fait, on aura par la propriété du cercle $AP^2 (xx) = CA \times AO$ ou $AQ^2 (zz) - QO^2 (aa)$, & partant $zz = xx + aa$. De plus les triangles semblables PED, PAH , donnent $AE (m). AP (x) :: DH (t). HP = \frac{tx}{m}$. Et PE

$$(m-x). ED (f) :: AP (x). AH = \frac{fx}{m-x}. \text{ Donc } HQ = z + \frac{fx}{m-x} \text{ \& } CH \times HO \text{ ou } \overline{HQ} - \overline{QO} = zz + \frac{2fxz}{m-x} + \frac{f^2x^2}{(m-x)^2} - aa = xx + \frac{2fxz}{m-x} + \frac{f^2x^2}{(m-x)^2} \text{ (en mettant}$$

pour zz sa valeur $xx + aa$) $= DH \times HP (\frac{t^2x}{m})$ par la propriété du cercle; c'est à dire qu'en divisant par x , on aura cette égalité $x + \frac{2fz}{m-x} + \frac{fx}{(m-x)^2} = \frac{t^2}{m}$. Or

PD ou $DH - HP = \frac{mt-tx}{m}$; & (à cause du triangle rectangle DBP) son carré $\frac{mb^2 - 2mbx + t^2x^2}{m^2} = xx - 2gx + gg + bb = xx - 2gx + nn$ en mettant pour $bb + gg$ sa valeur nn ; d'où l'on tire $\frac{t^2}{m} = \frac{mxx - 2gmx + mnn}{m-x} = x$

$+ \frac{2fz}{m-x} + \frac{fx}{(m-x)^2}$, & multipliant par $m-x$, &

transposant le terme $\frac{ffx}{m-x}$, il vient $mx - xx + 1fz$

$$= \frac{mxx - 2gmx - ffx + mnn}{m-x} = \frac{mxx - mnx - nxx + mnn}{m-x}, \text{ puisque}$$

à cause du triangle rectangle DEB on trouve $ff = bb + gg - 2gm + mm = nn - 2gm + mm$: c'est à dire, parce que la division se fait au juste, $mx - xx + 1fz = -mx + nn$ ou $1fz = xx - 1mx + nn$. Quarrant enfin chaque membre, & mettant pour zz la valeur $xx + aa$ on aura cette égalité

$$\begin{aligned} x^4 - 4mx^3 + 4mmxx - 4mnnx + n^4 &= 0 \\ - 4ff & - 4aaff \\ + 1nn & \end{aligned}$$

qui est du quatrième degré, & dont les racines que l'on trouvera par le moyen d'un cercle & d'une Parabole donnée ou de telle autre Section conique qu'on voudra doivent fournir pour $AP(x)$ des valeurs telles que menant PM perpendiculaire sur AP , tirant PD , & faisant l'angle $PD M$ égal à l'angle $DP M$, le point M , où se rencontrent les côtés DM , PM du triangle isocelle $DP M$, soit le centre du cercle cherché, qui aura pour rayon la droite MP ou MD . Ou bien si l'on prend sur le côté AB la partie $AP = x$, & sur l'autre côté AC la partie $AQ = \sqrt{xx + aa}$, & qu'on mene sur ces côtés les perpendiculaires PM , QM ; le point M où elles se rencontrent, sera le centre du cercle qu'on demande.

Comme rien n'est plus propre à donner de l'ouverture à l'esprit, que de faire voir les differens chemins qu'on peut suivre pour arriver à la connoissance de la même verité; je vais donner une autre maniere de resoudre cette question, qui me paroît encore plus naturelle que la precedente.

Ayant supposé que le point M soit le centre du cercle cherché, on menera les perpendiculaires MP , MQ , sur les côtés de l'angle donné BAC , & les paralleles MF , MG , à ces côtés; & du point donné D , on tirera les paralleles DB , DE , DK , à MP , MF , AB . On nommera ensuite les données DB , b ; BE , e ; DE , f ; AB , g ;

Ccc ij

$AE, m; AD, n;$ & les inconnues $AP, x; PM$ ou $MD, y;$ & on aura PB ou $DK = g - x, MK = y - b$: ce qui donne (à cause du triangle rectangle MKD) l'équation $yy = gg - 2gx + xx + yy - 2by + bb$, d'où l'on tire $y = \frac{xx - 2gx + bb + gg}{2b} = \frac{xx - 2gx + nn}{2b}$ en mettant pour $bb + gg$ sa valeur nn . Or à cause des triangles semblables DBE, MPF , on a cette proportion $DB(b) : BE(c) :: PM(y) : PF = \frac{cy}{b}$, & partant AF ou $MG = \frac{bx - cy}{b}$; & à cause des triangles semblables $DBE, MQG, DE(f)$. $DB(b) :: MG(\frac{bx - cy}{b}) : MQ = \frac{bx - cy}{f}$; Donc puisque par les conditions du Problème, il faut que QC moitié de la partie interceptée OC soit égale à la ligne donnée a , & que les droites MC & MP soient rayons d'un même cercle cherché; il vient $MC^2 = \frac{bbxx - 2bcxy + ccyy}{ff} + aa = MP^2 (yy)$, & multipliant par ff on aura $bbxx - 2bcxy + ccyy + aaff = ffyy = bbyy + ccyy$, en mettant pour ff sa valeur $bb + cc$, c'est à dire $ffxx + aaff = ccxx + 2bcxy + bbyy$, en effaçant de part & d'autre $ccyy$, & mettant pour $bbxx$ sa valeur $ffxx - ccxx$; ce qui donne par l'extraction de la racine quarrée, $f\sqrt{xx + aa} = cx + by = \frac{xx - 2gx + nn}{2b}$ en mettant pour y sa valeur $\frac{xx - 2gx + nn}{2b}$, & enfin si l'on met pour $g - c$ sa valeur m , on trouvera la même égalité que ci-dessus $2f\sqrt{xx + aa} = xx - 2mx + nn$.

* Art. 1.

Voici encore une nouvelle maniere de résoudre cette question, qui donne d'abord une construction fort aisée, mais qui demande la description de deux Paraboles. 1°. Je cherche le lieu des points M , tels qu'ayant mené de chacun de ces points au point donné D une ligne droite MD , & sur la ligne AB donnée de position la perpendiculaire MP ; ces deux lignes MD, MP , soient toujours égales entr'elles: & je vois sans aucun calcul que c'est la Parabole qui a pour foyer le point D , & pour direc-

trice la ligne AB . 2^o. Je cherche le lieu des points M , tels qu'ayant décrit de chacun de ces points un cercle qui passe par le point donné D ; ce cercle coupe sur la ligne AL donnée de position, la partie QC égale à une ligne donnée $2a$. Je mène à cet effet du point donné D la perpendiculaire DZ sur AL , & d'un des points cherchés M que je regarde comme donné, les perpendiculaires MR , MQ , sur DZ , AL , & ayant nommé les inconnues & indéterminées DR , x ; RM , y ; qui font entr'elles un angle droit DRM , & la connue DZ , b , j'ai à cause du triangle rectangle MRD le quarré $\overline{MD} = xx + yy$, & à cause du triangle rectangle MQC le quarré $\overline{MC} = \overline{MQ} (bb - 2bx + xx) + \overline{QC} (aa)$. Or les lignes MD , MC , étant rayons du même cercle sont égales entr'elles, & par conséquent $xx + yy = bb - 2bx + xx + aa$, ou $yy = bb + aa - 2bx$. Si donc l'on construit la Parabole qui est le lieu de cette équation, il est visible qu'elle passera par le centre M du cercle qu'on demande: mais la Parabole qui a pour foyer le point D & pour directrice la ligne AB devant aussi passer par ce centre, il s'ensuit que le centre du cercle cherché se trouvera dans l'intersection de ces deux Paraboles.

EXEMPLE VII.

438. UN cercle qui a pour centre le point A & pour rayon la droite AM , étant donné, avec deux points E , F , sur le même plan; trouver sur la circonférence au dedans de l'angle EAF , le point M tel qu'ayant mené les droites AM , EM , FM , les deux angles AME , AMF , soient égaux entr'eux.

Si les lignes AE , AF , étoient égales entr'elles, il est visible que la ligne qui diviserait par le milieu l'angle EAF , couperait la circonférence dans le point qu'on demande. C'est pourquoi on supposera que ces deux lignes sont inégales, & même pour éviter la confusion

que c'est la ligne AE qui est moindre que la ligne AF . Or cela posé, je résouds ce Problème en deux différentes manières.

PREMIÈRE MANIÈRE.

Ayant supposé que le point M soit celui qu'on cherche, on mènera les droites MB , MD , qui fassent sur AF , AE , des angles MBA , MDA , égaux aux angles AMF , AME , & par conséquent entr'eux; & à cause des triangles semblables AFM , AMB , & AEM , AMD , on aura ces deux proportions $AF. AM :: AM. AB$. Et $AE. AM :: AM. AD$. Donc puisque les lignes AF , AE , sont données avec le rayon AM , les parties AB , AD , des droites AF , AE , le seront aussi. Maintenant, si l'on mène les droites MP , MQ , parallèles à AE , AF ; les triangles BPM , DQM seront semblables, puisque les angles APM , AQM , sont égaux, comme aussi les angles PBM , QDM , compléments à deux droits des angles égaux, MBA , MDA ; & partant si l'on nomme les données AB , a ; AD , b ; & les inconnues AP ou QM , x ; PM ou AQ , y ; on aura $BP (x-a). PM (y) :: DQ (y-b). QM (x)$ ce qui donne (en multipliant les extrêmes & les moyens) cette équation $xx - ax = yy - by$, ou $yy - by - xx + ax = 0$, dont le lieu * Art. 336. est * une Hyperbole équilatère qui se construit ainsi.

Soient prises sur les lignes AF , AE , les parties AB , AD , troisièmes proportionnelles à AF , AM , & à AE , AM : soit tirée par le point C milieu de BD une ligne droite indéfinie CH parallèle à AB , sur laquelle soit prise la partie $CK = \sqrt{\frac{1}{4}bb - \frac{1}{4}aa}$ (la ligne $AD (b)$ sera plus grande que $BA (a)$, puisqu'on a supposé que AE est moindre que AF): soit décrite une Hyperbole équilatère qui ait pour centre le point C , & pour la moitié d'un second diamètre la droite CK , dont les ordonnées HM soient parallèles à AD . Je dis qu'elle rencontrera la circonférence du cercle donné, au point cherché M .

Car menant CL parallèle AD ; il est clair que les

lignes CH , CL , diviseront par le milieu les droites AD , AB , aux points O , L ; puisque le point C coupe en deux parties égales la ligne BD , & qu'ainsi CH ou $AP - AL = x - \frac{1}{2}a$, HM ou $PM - AO = y - \frac{1}{2}b$. Or par la propriété de l'Hyperbole équilatère, $\overline{HM} = \overline{CH} + \overline{CK}$, c'est à dire en termes analytiques $yy - by + \frac{1}{4}bb = xx - ax + \frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}bb - \frac{1}{4}aa$; d'où l'on tire l'équation $yy - by = xx - ax$, qui étant réduite en proportion, donne $BP (x - a). PM (y) :: DQ (y - b). QM (x)$. Donc puisque les angles BPM , DQM , sont égaux, & que les côtés autour de ces angles sont proportionnels, les triangles BPM , DQM , seront semblables, & par conséquent l'angle MBP sera égal à l'angle MDQ , & leurs compléments à deux droits ABM , ADM , seront égaux. Mais puisque $AB. AM :: AM. AF$, & $AD. AM :: AM. AE$, les triangles ABM , AMF , & ADM , AME , seront semblables. L'angle ABM sera donc égal à l'angle AMF , & l'angle ADM à l'angle AME ; & par conséquent les angles AMF , AME , seront égaux entr'eux, puisqu'on vient de prouver que les angles ABM , ADM , le sont.

On prouvera de même que l'Hyperbole opposée à celle ci coupera la circonférence au dedans de l'angle opposé au sommet à l'angle EAF , en un point M tel qu'ayant mené les droites AM , ME , MF ; les angles AME , AMF , seront égaux entr'eux: comme aussi que ces deux Hyperboles équilatères opposées couperont la circonférence au dedans des angles qui sont à côté de ces deux ci, chacune en un point M tel qu'ayant mené les droites MA , ME , MF ; l'angle AME sera égal au complément à deux droits de l'angle AMF .

Si l'on prend sur CL la partie CG égale à CK , il est clair * que CG sera la moitié du premier diamètre conjugué à CK , & qu'ainsi * l'une des Asymptotes de ces deux Hyperboles sera parallèle à KG . Or dans le triangle isoscèle GCK , l'angle externe GCO ou son égal BAD vaut les deux internes opposés, c'est à dire le dou-

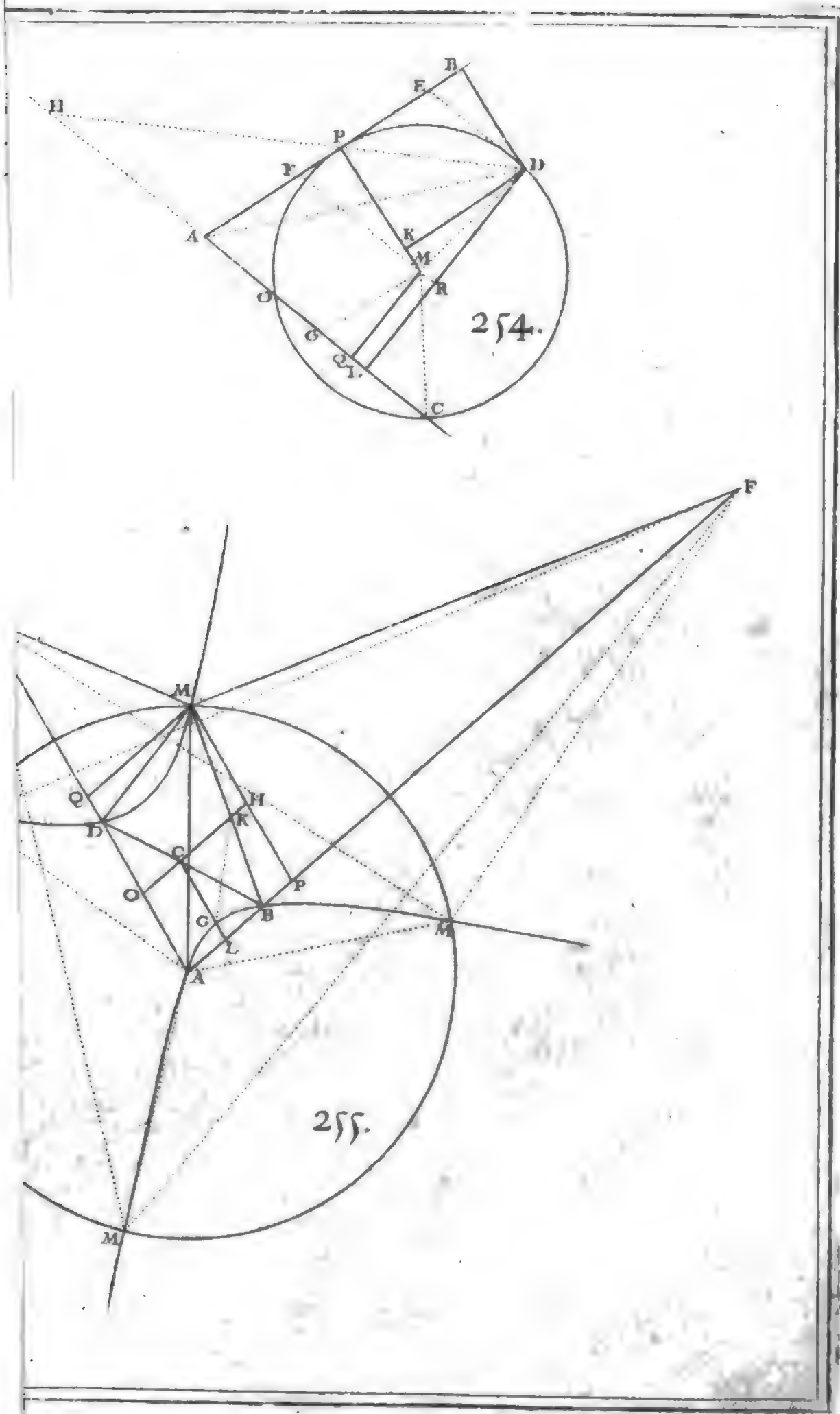
* Def. 16.
III.

* Art. 114.

ble de l'angle CGK . Donc puisque les lignes CG , AD , sont parallèles, il s'ensuit que la ligne KO & par conséquent l'une des Asymptotes sera parallèle à la ligne qui divise par le milieu l'angle DAB . De plus il est évident que la ligne AD est une double ordonnée au second diamètre CK , puisque \overline{OD} ou \overline{OA} $(\frac{1}{4}bb) = \overline{CO}$ $(\frac{1}{4}aa) \rightarrow \overline{CK}$ $(\frac{1}{4}bb - \frac{1}{4}aa)$; & qu'ainsi l'une des Hyperboles équilatères opposées passé par le point D , & l'autre par le point A . Ces deux remarques donnent lieu à une nouvelle construction qu'il est plus simple que la précédente : la voici.

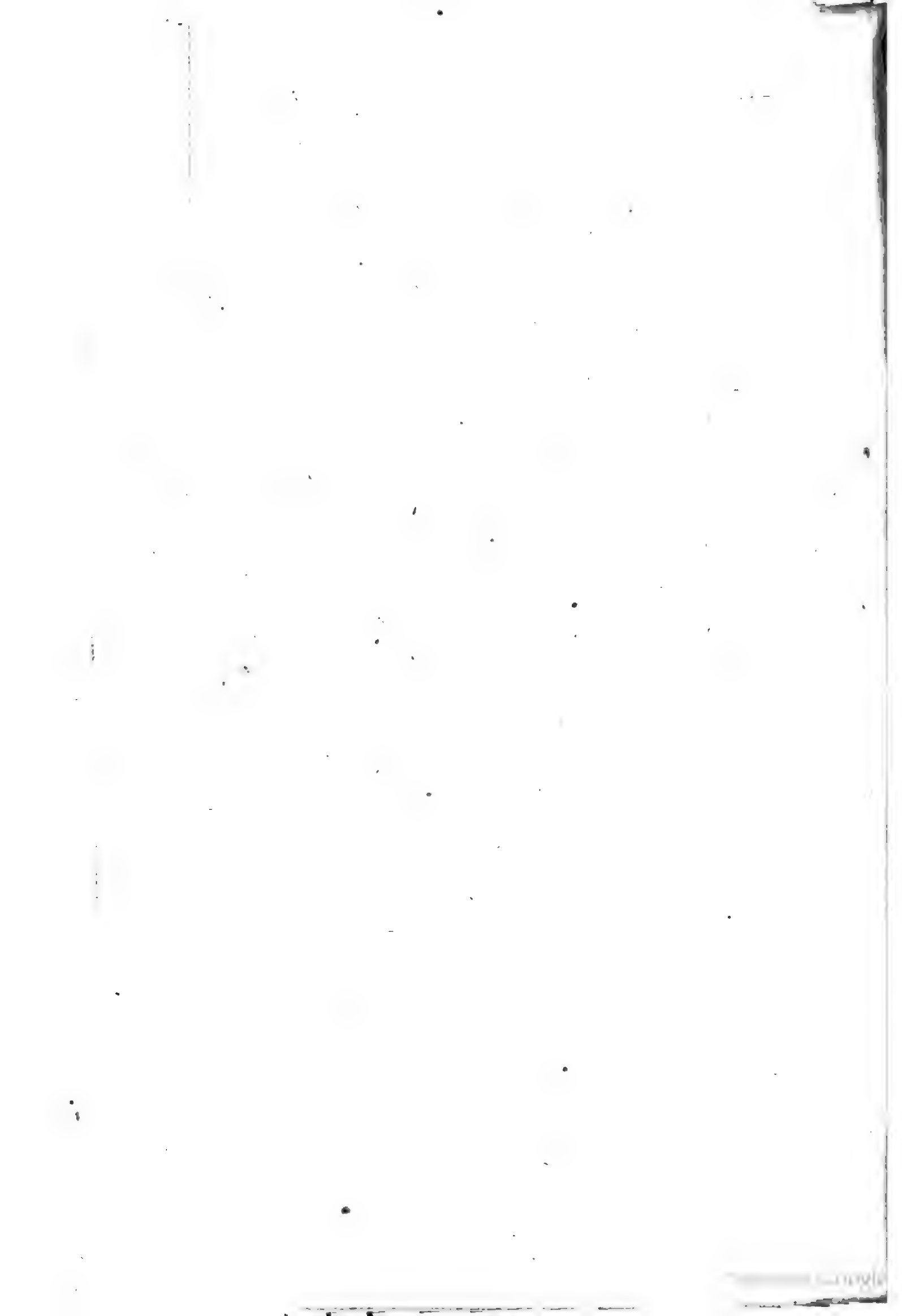
FIG. 256. Ayant pris sur les lignes AF , AE , les parties AB , AD , troisièmes proportionnelles à AF , AM , & à AE , AM ; on menera par le point de milieu C de la ligne BD deux droites indéfinies CH , CK , l'une parallèle & l'autre perpendiculaire à la ligne AP , qui divise par le milieu l'angle donné EAF . On décrira ensuite entre ces deux lignes comme Asymptotes, par les points D , A , deux Hyperboles opposées, qui couperont la circonférence du cercle donné en des points M tels qu'ayant mené les droites MA , ME , MF ; les deux angles AME , AMF , seront égaux entr'eux lorsque le point d'intersection M tombe dans l'angle EAF ou dans son opposé au sommet; & l'angle AME sera égal au complément à deux droits de l'angle AMF lorsqu'il tombe dans l'un ou dans l'autre des angles à côté.

On n'est arrivé à cette dernière construction qu'en supposant la première qui est fondée sur le calcul, & en faisant ensuite des remarques qui sont assez recherchées. Il est cependant facile de la démontrer tout d'un coup, si l'on fait attention à une propriété de l'Hyperbole équilatère qui se trouve dans l'article 361. (Liv. VIII.) & qui d'ailleurs se peut aisément prouver. Car si l'on mène du point M où l'Hyperbole équilatère DM rencontre la circonférence du cercle donné, aux deux extrémités B , D , du premier diamètre BD , les droites BM , DM ,



254.

255.



BM , DM , qui rencontrent l'Asymptote CH aux points O , L , & la ligne AP qui lui est parallèle aux points S , R ; il est clair selon cet article, que MO est égal à ML , & qu'ainsi l'angle $MO L$ ou MSR ou BSA est égal à l'angle MLO ou $DR A$. Mais par la construction l'angle BAS est égal à l'angle DAR , puisque la ligne AP divise par le milieu l'angle EAF . Partant les angles restans ABM , ADM , dans les deux triangles ABS , ADR , seront égaux entre eux; d'où il suit que les angles AMF , AME , le sont aussi. Et c'est ce qui étoit proposé.

On peut trouver facilement par le moyen de cette dernière construction, une égalité très-simple qui ne renferme qu'une seule inconnue, & dont la construction qui se pourra faire par telle Section conique qu'on voudra suivant les règles prescrites dans le Livre précédent, fournira la résolution du Problème. Soit menée à cet effet du point M la ligne MP parallèle à l'Asymptote CK , & qui rencontre l'autre Asymptote CH au point H ; & soient nommées les données AM , a ; AK , b ; CK , c ; & les inconnues AP , x ; PM , y . Cela posé, on aura par la propriété du cercle l'équation $xx + yy = aa$, & par la propriété des Hyperboles opposées * l'autre équation $CH * HM (xy - cx - by + bc) = CK * KA (bc)$; ce qui donne $xy - cx - by = 0$, d'où l'on tire $y = \frac{cx}{x-b}$. Mettant le carré de cette valeur à la place de yy dans la première équation $xx + yy = aa$, & opérant à l'ordinaire on formera cette égalité du quatrième degré $x^4 - 2bx^3 + bbxx + 2aabbx - aabb = 0$.

$$+ cc$$

$$- aa$$

Or si l'on mène du centre C des Hyperboles, perpendiculairement à AC , la ligne CG qui rencontre la circonférence au point G ; les triangles rectangles ACG , AKC , donneront $\overline{CG} = \overline{AG} - \overline{AC} = \overline{AM} (aa) - \overline{AK} (bb) - \overline{CK} (cc)$. C'est pourquoi nommant la donnée CG , m ,

D d d

on changera l'égalité précédente en celle-ci $x^2 - 2bx^2 - mmxx + 2aabbx - aabb = 0$, dans laquelle les données sont le rayon AM (a), les lignes AK (b), CK (c), CG (m), & l'inconnue x exprime des valeurs de AP telles que menant les perpendiculaires PM , elles rencontreront la circonférence aux points cherchés.

Pour distinguer entre les deux points où chaque perpendiculaire PM coupe la circonférence du cercle, celui qui sert à la question présente; il faut observer de mener PM du côté où l'on a supposé que tomboit le point M par rapport à la ligne AP en faisant le calcul, lorsque sa valeur $\frac{cx}{x-b}$ qu'on a trouvé ci-dessus est positive, c'est à dire, lorsque x est en même temps vraie & plus grande que b , ou bien lorsqu'elle est fautive; & au contraire il la faut mener du côté opposé, lorsque sa valeur est négative, c'est à dire, lorsque x est en même temps vraie & moindre que b .

SECONDE MANIÈRE.

FIG. 257. Ayant mené par le point cherché M que l'on regarde comme donné la droite MD perpendiculaire au rayon AM , & par le point D où elle rencontre AF la droite GH parallèle à AM , laquelle rencontre en H la ligne MF , & en G la ligne EM prolongée qui coupe en C la droite AF ; on aura à cause des triangles semblables FAM , FDH , cette proportion: $AM. DH :: AF. FD$. Et à cause des triangles semblables CAM , CDG , cette autre, $AM. DG :: AC. CD$. Or la ligne DG est égale à DH , puisque par la condition du Problème les angles AME , AMF , devant être égaux, les angles DMH , DMG , le seront aussi. Donc $AF. FD :: AC. CD$, & $AF + FD. AF :: AC + CD$ ou $AD. AC$. Cela posé, soient menées EB , MP , perpendiculaires sur AF , & MQ perpendiculaire sur EB ; & soient nommées les données AM , a ; AB , b ; EB , c ;

AF, d ; & les inconnues AP, x ; PM, y . Les triangles rectangles semblables APM, AMD , donneront $AP(x). AM(a) :: AM(a). AD = \frac{a^2}{x}$. Et partant $FD = d - \frac{a^2}{x}$; & les triangles semblables EQM, MPC , donneront EQ ou $EB - MP(c - y)$. QM ou $AP - AB(x - b) :: MP(y)$. $PC = \frac{xy - by}{c - y}$. Donc AC ou $AP + PC = \frac{cx - by}{c - y}$, & mettant dans la proportion précédente $AF + FD$. $AF :: AD$. AC à la place de ces lignes leurs valeurs analytiques, on formera (en multipliant les moyens & les extrêmes) cette équation $2cdxx - aacx - 2bdxy + aaby + aady = aadc$, qui se réduit en divisant par $2cd$, & en faisant (pour abréger) $b + d = f$, à cette autre $xx - \frac{b}{c}yx - \frac{a^2}{2d}x + \frac{a^2f}{2cd}y - \frac{1}{2}aa = 0$, dont le lieu qui est une Hyperbole entre ses Asymptotes étant construit selon l'article 339. (Liv. VII.) coupera la circonférence du cercle au point cherché M .

Si l'on veut avoir une égalité qui ne renferme que l'inconnue x , on se servira de l'équation au cercle $xx + yy = aa$, dans laquelle mettant à la place de yy le carré de y trouvé par le moyen de l'équation précédente, on arrivera à une égalité du quatrième degré qui ne renfermera que l'inconnue x , & dont l'une des racines exprimera la valeur de la cherchée AP .

EXEMPLE VIII.

439. UN cercle qui a pour centre le point A étant Fig. 258. donné avec deux autres points E, F ; trouver sur la circonférence le point M tel qu'ayant mené les droites AM, MF, ME ; le sinus droit de l'angle AMF soit au sinus droit de l'angle AME , en la raison donnée de m à n .

Je résous cette question en trois différentes manières.

D d d ij.

PREMIERE MANIERE.

Ayant pris sur les droites données AF , AE , les parties AB , AD , troisièmes proportionnelles à AF , AM , & à AE , AM ; on menera du point cherché M que l'on regarde comme donné les droites MB , MD , les perpendiculaires MG , MH , sur AF , AE , & les parallèles MP , MQ , à AE , AF . Ayant pris sur BM la partie BK égale à DM , on tirera du point K les droites KO , KL , parallèles à MG , MP , & du point donné D la perpendiculaire DC sur AF . Cela fait, les triangles semblables BMG , BKO , donnent $BM.BK$ ou $DM::MG.KO$. Or par la condition du Problème $m.n::KO.MH$; puisque prenant DM pour rayon ou sinus total, les droites KO , MH , seront les sinus droits des angles MBF , MDE , ou de leurs complemens à deux droits $MB A$, $MD A$, égaux par la construction aux angles AMF , AME . Donc en multipliant par ordre les antecédens & les conséquens de ces deux proportions on aura $m \times BM.n \times MD::MG \times KO.KO \times MH::MG.MH::MP.MQ$ à cause des triangles semblables MPG , MQH . Cela posé.

On nommera les données AD, a ; AC, b ; CD, c ; AB, d ; AM, r ; & les inconnues AP ou MQ, x ; PM ou AQ, y ; & les triangles semblables ADC , PMG , QMH donneront $PG = \frac{by}{a}$, $MG = \frac{c^2}{a}$, $QH = \frac{bx}{a}$, $HM = \frac{cx}{a}$, $AG = x + \frac{by}{a}$, GB ou $AB - AG = d - x - \frac{by}{a}$, DH ou $AQ + QH - AD = y + \frac{bx}{a} - a$; & à cause des triangles rectangles BGM , DHM , on aura \overline{BM} ou $\overline{BG} + \overline{GM} = xx + \frac{2b}{a}xy + \frac{b^2yy}{a^2} - 2dx - \frac{2bd}{a}y + dd + \frac{c^2yy}{a^2} = xx + \frac{2b}{a}xy + yy - 2dx - \frac{2bd}{a}y + dd$ en mettant pour $bb + cc$ sa valeur aa à cause du triangle rectangle ACD ; & de même

$\overline{DM}^2 = yy + \frac{2b}{a}xy + xx - 2ay - 2bx + aa$. Or

par la propriété du cercle, le carré $\overline{AM}^2 (rr) = \overline{AG}^2$
 $(xx + \frac{2b}{a}xy + \frac{b^2yy}{aa} + \overline{GM}^2 (\frac{ccyy}{aa})) = xx + \frac{2b}{a}xy$
 $+ yy$ en mettant pour $bb + cc$ la valeur aa . Si donc
 l'on substitue dans les valeurs de \overline{BM}^2 & de \overline{DM}^2 à la
 place de $yy + \frac{2b}{a}xy + xx$ cette valeur rr , & que
 pour abréger on fasse $rr + dd = ff$ & $rr + aa =$

gg , on trouvera $BM = \sqrt{ff - 2dx - \frac{2bd}{a}y}$, & $DM =$

$\sqrt{gg - 2ay - 2bx}$. Substituant enfin ces valeurs à la
 place de BM & de DM dans la proportion $m : BM$
 $n : DM :: MP (y)$. $MQ (x)$ que l'on a trouvée
 ci-dessus ; & multipliant les extrêmes & les moyens, on
 formera cette équation $mx \sqrt{ff - 2dx - \frac{2bd}{a}y} = ny$

$\sqrt{gg - 2ay - 2bx}$ de laquelle quarrant chaque mem-
 bre, & faisant évanouir l'inconnue y par le moyen de
 l'équation au cercle $xx + \frac{2b}{a}xy + yy = rr$, on arrive-
 ra à une égalité du sixième degré qui ne renfermera
 plus que l'inconnue x , & qui étant résoluë selon les re-
 gles du Livre précédent, donnera pour $AP (y)$ une
 valeur telle que menant PM parallèle à AE , le point
 M où cette ligne rencontrera la circonférence, sera ce-
 lui qu'on cherche.

Si l'on suppose que $m = n$, il est évident que les an-
 gles MBF , MDE , seront égaux ; & qu'ainsi les angles
 ABM , ADM , ou AMF , AME , le seront aussi.
 D'où l'on voit que le Problème précédent n'est qu'un
 cas particulier de celui-ci.

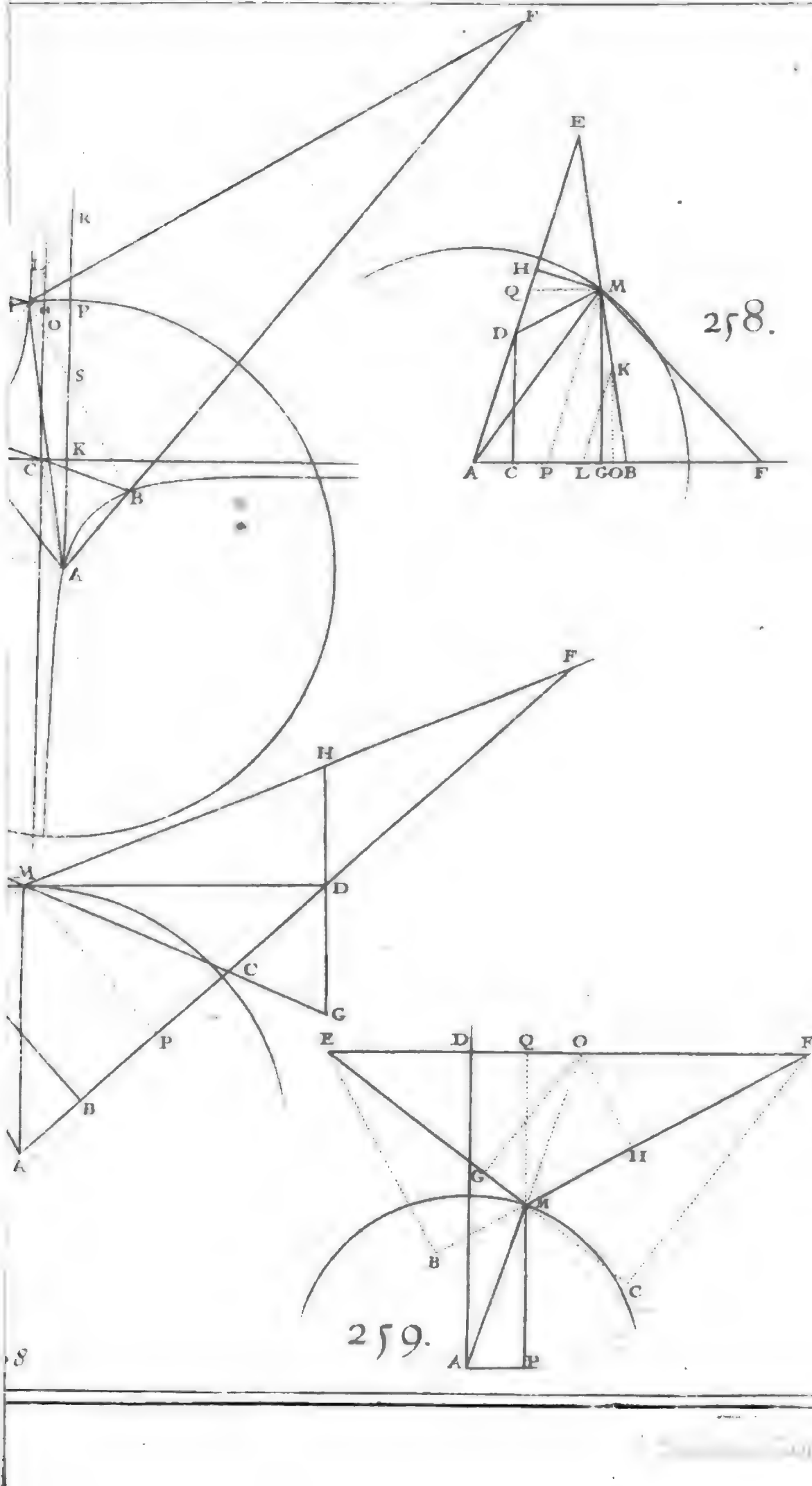
SECONDE MANIÈRE.

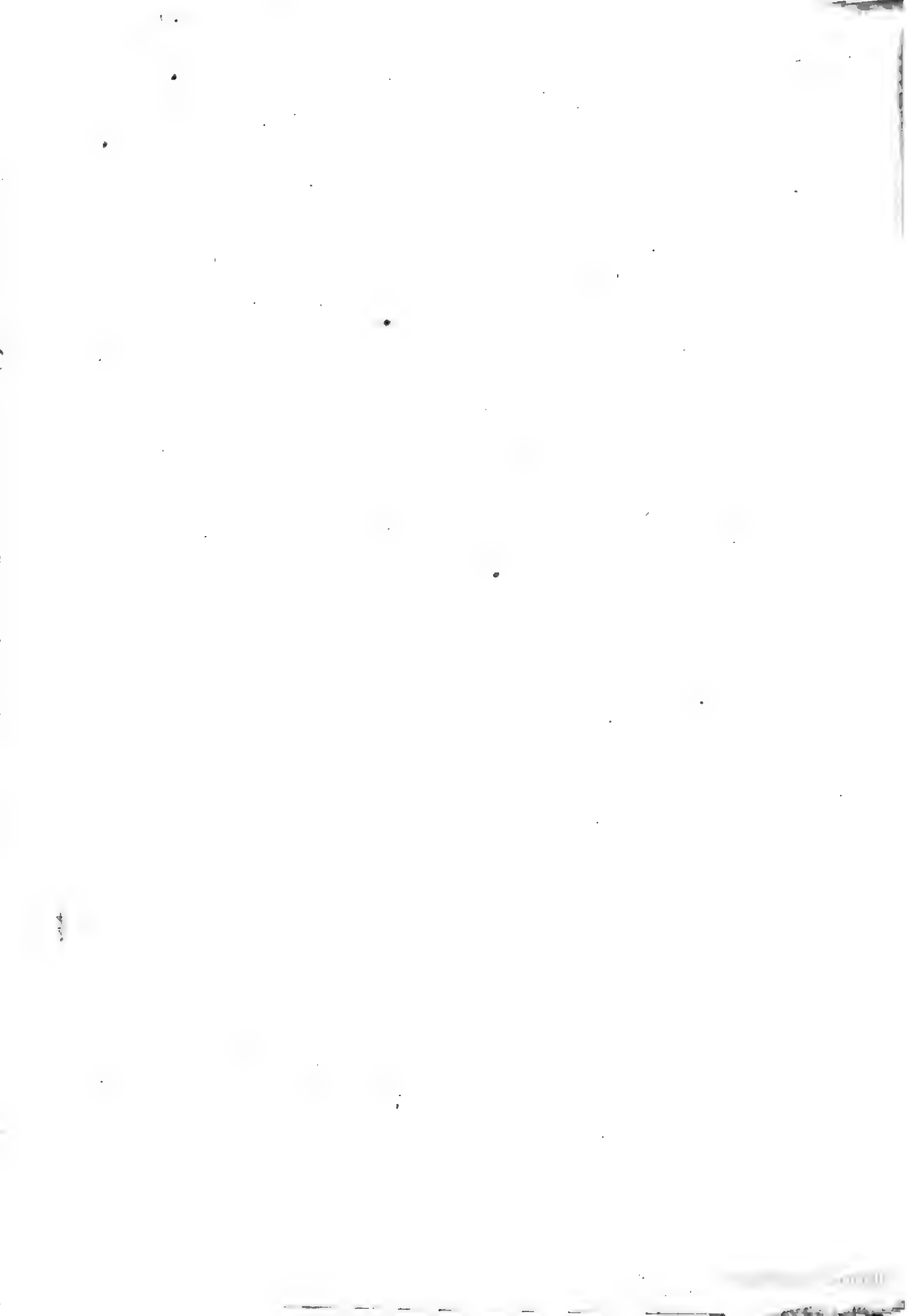
Ayant joint les deux points donnés E , F , par une **Fig. 159.**

D d d iij

ligne droite, on tirera du centre donné A les droites AD , AP , l'une perpendiculaire & l'autre parallèle à cette ligne, & par le point cherché M que l'on regarde comme donné la parallèle PQ à AD , on menera aussi du même point M , le rayon AM qui rencontre EF en O , & les droites EM , FM , sur lesquelles on abaissera des points O , F , E , les perpendiculaires OG , OH , & FC , EB . Cela fait, les triangles semblables EOG , EFC , & FEB , FOH , donneront $EO.EF :: OG.FC$. Et $EF.FO :: EB.OH$, & partant $EO * EF.EF * FO$ ou $EO.FO :: OG * BE.CF * OH$, c'est à dire, en raison composée de OG à OH , ou de m à n (puisque en prenant MO pour le rayon ou sinus total, les droites OG , OH , sont les sinus droits des angles EMO , FMO , complemens à deux droits des angles AME , AMF), & de BE à CF ou de EM à MF à cause des triangles rectangles semblables BME , CMF . On aura donc $EO.FO :: m * EM.n * MF$. Cela posé.

On nommera les données AD ou PQ , a ; ED , b ; DF , c ; AM , r ; & les inconnues AP , x ; PM , y ; & on aura à cause des triangles semblables APM , ADO , cette proportion, MP (y). AP (x) :: AD (a). $DO = \frac{ax}{y}$. Et partant $EO = \frac{by + ax}{y}$, $FO = \frac{cy + ax}{y}$. Or les triangles rectangles EMQ , FMQ , donnent $\overline{EM}^2 = \overline{EQ}^2$ ($bb + 2bx + xx$) + \overline{MQ}^2 ($aa - 2ay + yy$) = $ff + 2bx - 2ay$ (en mettant pour $xx + yy$ la valeur rr à cause du triangle rectangle APM , & faisant pour abréger $aa + bb + rr = ff$) & de même $\overline{FM}^2 = \overline{FQ}^2$ ($cc - 2cx + xx$) + \overline{MQ}^2 ($aa - 2ay + yy$) = $gg - 2cx - 2ay$ en mettant pour $xx + yy$ la valeur rr , & faisant pour abréger $aa + cc + rr = gg$. Si dans la proportion précédente $EO.FO :: m * EM.n * MF$, on met à la place de ces lignes les valeurs analytiques que l'on vient de trouver, & qu'on multiplie les extrêmes & les moyens,





on formera cette équation $\sqrt{bny + anx} \sqrt{gg - 2cx - 2ay} = mc y - max \sqrt{ff + 2bx - 2ay}$, de laquelle quarant chaque membre & faisant évanouir l'inconnuë y par le moyen de l'équation au cercle $xx + yy = rr$, on arrivera encore à une égalité du sixième degré, dont la résolution fournira pour $AP(x)$ une valeur telle que menant la perpendiculaire PM , elle ira couper la circonférence au point cherché M .

C'est à peu près de cette façon que M. Descartes résout cette question dans la soixante cinquième de ses Lettres, Tom. 3. Elle lui avoit été proposée par M. de Roberval, d'une manière qui paroît différente de celle-ci, mais qui dans le fond revient à la même chose.

TROISIÈME MANIÈRE.

Soient décrits des diamètres AE , AF , deux cercles FIG. 160.
 ART , AST , sur lesquels soient portées depuis le point A deux cordes quelconques AR , AS , qui soient toujours entr'elles en la raison donnée de m à n ; & soient tirées les droites ER , FS , qui s'entrecoupent au point M . Je dis que la ligne courbe AM , qui est le lieu de tous les points M ainsi trouvés, coupera le cercle donné (dont le centre est en A) au point cherché M .

Car tirant AM & le prenant pour rayon ou sinus total, il est clair que la corde AR est le sinus droit de l'angle AME , & la corde AS le sinus droit de l'angle AMF .

Il est à propos de remarquer 1°. Que cette construction a cela de particulier, qu'elle ne réussit pas seulement lorsqu'il s'agit de trouver le point M sur la circonférence d'un cercle dont le centre est en A , mais encore sur telle ligne courbe qu'on voudra. 2°. Qu'ayant trouvé deux points de ce lieu de la manière que l'on vient d'enseigner, les plus proches que l'on pourra de la ligne courbe donnée, il suffit d'en tracer la portion qui joint ces deux points; ce qui rend la pratique de

cette construction fort aisée. 3°. Que le lieu de tous les points M ainsi trouvés est du quatrième degré, comme il est facile de voir par le calcul de la seconde manière, en observant de ne point substituer dans les valeurs de EM & FM à la place de $xx + yy$ le carré rr que l'on trouve par le lieu au cercle ce qui donnera pour l'équation de ce lieu $\sqrt{nb y + na x} \sqrt{c - x + a - y} = mcy - max$. $\sqrt{b + x + a - y}$, dont les inconnues x & y montent au quatrième degré, lorsqu'elle est délivrée d'incommensurables. 4°. Que ce n'est pas une faute légère en Geometrie, selon M. Descartes, d'employer une ligne courbe trop composée pour résoudre un Problème; de sorte que selon lui, on doit preferer à cette dernière solution les deux précédentes, où les deux lieux qu'on a trouvés, & qui détermineroient par leur intersection avec la circonférence donnée, le point cherché, ne sont que du troisième degré. Il me paroît néanmoins que la facilité d'une construction & sa simplicité peuvent récompenser en quelque sorte ce défaut, & c'est ce qu'on verra encore dans l'Exemple qui suit.

EXEMPLE IX.

FIG. 161. 440. **D**IVISER un triangle scalene donné ABC en quatre parties égales, par deux lignes droites DE, FG , qui s'entrecoupent à angles droits au point H .

Si l'on fait attention sur la nature de ce Problème, on verra 1°. Que deux des extrémités D, F , des deux droites DE, FG , se trouvent nécessairement sur l'un des côtés AC du triangle donné ABC , & que leurs deux autres extrémités E, G , se trouvent chacune sur chacun des deux autres côtés BC, BA . 2°. Que les deux points cherchés D, F , doivent avoir deux conditions, dont la première est que les lignes DE, FG , qui divisent chacune le triangle ABC en deux parties égales, s'entrecoupent à angles droits en un point H ;

H ; & la seconde qu'elles forment avec les deux autres côtes du triangle donné, un quadrilatère $BGHE$ qui soit la quatrième partie du triangle ABC . Cela posé.

Soient menées sur le côté AC les perpendiculaires GI , BK , EL , & soient nommées les données AC , $2a$; BK , b ; AK , c ; KC , d ; & les inconnues AF , x ; CD , y . Puisque le triangle AGF , ou $GI \propto \frac{1}{2} AF$ doit être la moitié du triangle ABC (ab), il s'ensuit que $GI = \frac{ab}{x}$; & par la même raison $EL = \frac{ab}{y}$. Or les triangles semblables CBK , CEL , & ABK , AGI , donnent BK (b). EL ($\frac{ab}{y}$) :: CK (d). $CL = \frac{ad}{y}$. Et BK (b). GI ($\frac{ab}{x}$) :: AK (c). $AI = \frac{ac}{x}$. Et partant DL ou $CD - CL = y - \frac{ad}{y}$, FI ou $AF - AI = x - \frac{ac}{x}$. Mais les triangles rectangles DEL , FGI , sont semblables entr'eux ; puisque chacun d'eux est semblable au même triangle FDH , qui est rectangle en H selon la condition du Problème qui demande que les deux lignes DE , FG , s'entrecoupent à angles droits. On aura donc EL ($\frac{ab}{y}$). LD ($y - \frac{ad}{y}$) :: FI ($x - \frac{ac}{x}$). IG ($\frac{ab}{x}$) ; ce qui donne, en multipliant les extrêmes & les moyens, cette équation $xxyy - acyy - adxx + aacd = aabb$, ou $xx - acxyy - ad = aabb$, qui renferme la première condition du Problème ; de sorte qu'il ne reste plus qu'à accomplir la seconde ; sçavoir que le trapèze $BGHE$ soit le quart du triangle donné ABC .

Pour en venir à bout. Du point d'intersection H des deux droites DE , FG , soient menées aux trois angles du triangle ABC , les lignes HA , HC , HB , & on aura 1°. FD ($x + y - 2a$). AF (x) :: FHD ($\frac{1}{2}ab$). $FHA = \frac{abx}{4x + 4y - 8a}$. Et partant le triangle AHG ou le triangle FGA moins le triangle $FHA = \frac{1}{2}ab - \frac{abx}{4x + 4y - 8a}$.

Ecc

$$2^o. AI \left(\frac{ac}{x} \right). IK \left(\frac{cx-ac}{x} \right) :: AG. AGB :: HG \left(\frac{abx+2aby-4aab}{4x+4y-8a} \right).$$

$$GHB = \frac{bx^2-5abx+2bxy-2aby+4aab}{4x+4y-8a}. \text{ On trouvera par}$$

$$\text{un raisonnement semblable que le triangle } HEB = \frac{by^2-5aby+2bxy-2abx+4aab}{4x+4y-8a}.$$

Maintenant si l'on ajoute ensemble les triangles HGB, HEB , on formera le quadrilatere $HGBE$ qui doit être égal à la quantité $\frac{1}{4}ab$ quatrième partie du triangle ABC : ce qui donne pour la seconde équation $xx + yy + 4xy - 8ax - 8ay + 10aa = 0$.

Si l'on fait évanouir par le moyen de ces deux équations l'inconnue y , on arrivera à une égalité de huitieme degré qui renfermera toutes les conditions du Problème, & dans laquelle il n'y aura plus qu'une seule inconnue x ; de sorte que toute la difficulté est reduite à trouver les racines de cette égalité. Et c'est ce qu'on peut faire par le moyen de deux lieux du troisieme degré, comme l'on a enseigné dans les articles 417, & 418 (Liv. preced) Mais comme la construction de ces lieux devient fort embarrassée & d'une longueur insupportable dans la pratique, à cause de la multitude des termes de leurs équations, il est beaucoup plus naturel de construire séparément les lieux des deux équations que l'on vient de former, quoique l'un d'eux soit du quatrième degré & par consequent plus composé, car l'autre n'étant que du second récompense ce défaut, & d'ailleurs la facilité de la construction doit déterminer en sa faveur : voici comment elle se fait.

Fig. 161. Ayant mené deux lignes droites indéfinies AB, AC , qui font entr'elles un angle droit BAC ; on prolongera BA en E , en sorte que $AE = \sqrt{ac}$, & CA en F , en sorte que $AF = \sqrt{ad}$. Ayant pris sur AC une partie quelconque AP , on décrira du centre E de l'intervalle AP un arc de cercle qui coupe AC en G ; & ayant pris AH , en sorte que le rectangle $HA \cdot AG$ soit égal au triangle donné BAC , on prendra sur AB la partie

$AQ = FH$. On menera ensuite les droites PM , QM , parallèles à AB , AC , lesquelles s'entrecoupent en un point M ; & ayant trouvé en la même sorte une infinité d'autres points tels que M , on fera passer par tous ces points une ligne courbe KML . Cela fait, on prendra sur la diagonale AD du quarré $ABCD$, qui a pour côté la ligne AC égal au côté AC du triangle donné ABC , les parties $AT = \frac{1}{3}AD$, & $DS = \frac{2}{3}AD$; & on décrira du premier axe TS qui soit à son parametre comme 1 est à 3, une Hyperbole OSR . Je dis à present que si l'on mene du point M où je suppose qu'elle rencontre la ligne courbe KML au dedans du quarré $ABCD$, la perpendiculaire MP sur AC , & qu'on prenne sur le côté AC du triangle ABC , les parties $AF = AP$, & $CD = PM$; les points F , D , seront tels qu'ayant mené (ce qui est facile) les deux droites FG , DE , qui divise chacune le triangle ABC en deux parties égales; elles s'entrecouperont à angles droits & le partageront en quatre parties égales.

Car nommant AP , x ; PM , y ; on aura à cause des triangles $AE G$, FAH , rectangles en A , le quarré $\overline{AG} = \overline{EG} (xx) - \overline{AE} (ac)$, & le quarré $\overline{AH} = \overline{FH} (yy) - \overline{AF} (ad)$. Or puisque par la construction le rectangle $HA \times AG$ est égal au triangle donné $BAC (ab)$, il s'ensuit que $\overline{HA} \times \overline{AG} (yy - ad \times xx - ac) = aabb$. La ligne courbe KML sera donc le lieu de cette équation qui est la premiere des deux que l'on vient de trouver; & par consequent la propriété sera telle que si l'on mene d'un de ses points quelconques M pris au dedans du quarré $ABDC$, une perpendiculaire MP sur AC & qu'on prenne sur le côté AC du triangle donné ABC , les parties $AF = AP$, & $CD = PM$; les droites FG , DE qui divise chacune par le milieu le triangle ABC , s'entrecouperont à angles droits au point H .

De plus si d'un point quelconque M de l'Hyperbole OSR , on mene la perpendiculaire MV sur son premier

axe TS , & qu'on prolonge PM jusqu'à ce qu'elle rencontre la diagonale AD au point X ; les triangles rectangles & isocèles APX , MVX , donneront 1. $\sqrt{2} :: AP$ ou PX (x) $AX = x\sqrt{2}$, & $\sqrt{2}.1 :: MX$ ($x-y$). MV ou $VX = \frac{x-y}{\sqrt{2}}$; & partant AV ou $AX - XV = \frac{x+y}{\sqrt{2}}$. Or par la construction $AD = 2a\sqrt{2}$ puisque $AC = 2a$, & par conséquent TS ou $DT - DS = \frac{2}{3}a\sqrt{2}$. On aura donc TV ou $AV - AT = \frac{x+y-1}{\sqrt{2}}$, & VS ou $TV - TS = \frac{3x+1y-10a}{3\sqrt{2}}$, & par la propriété de l'Hyperbole $TV \cdot VS = \left(\frac{3xx+6xy+1yy-16ax-16ay+10aa}{6} \right) \cdot \overline{MV}^2$ ($\frac{xx-2xy+yy}{2}$) :: 1. 3, c'est à dire, comme le premier axe TS est à son paramètre: ce qui donne en multipliant les extrêmes & les moyens cette équation $xx + yy + 4xy - 8ax - 8ay + 10aa = 0$. L'Hyperbole OSR en sera donc le lieu, & jouira par conséquent de cette propriété; sçavoir que si l'on mène d'un de ses points quelconques M pris au dedans du carré $ABDC$, une perpendiculaire MP sur AC , & qu'on prenne sur le côté AC du triangle donné ABC , les parties $AF = AP$, & $CD = PM$; les droites FG , DE , qui divisent chacune par le milieu le triangle ABC , le couperont en quatre parties égales.

Maintenant puisque le point M se trouve en même temps sur la ligne courbe KML , & sur l'Hyperbole OSR ; il s'entuit que les points D , F , pris sur le côté AC du triangle donné, auront aussi en même temps les deux conditions requises. Et c'est ce qui étoit proposé.

S'il arrivoit que les deux courbes OSR , KML , ne se rencontraient point au dedans du carré $ABDC$, ce seroit une marque infailible qu'on auroit fait une supposition fautive, sçavoir que les deux extrémités D , F , se rencontrent sur le côté AC . C'est pourquoi il faut

droit les supposer sur l'un des deux autres côtés, & recommencer le calcul, en faisant des raisonnemens semblables aux précédens, pour avoir une construction par rapport à ce nouveau côté. Mais si l'on fait les trois remarques suivantes, il sera aisé de prévoir lequel des trois côtés on doit prendre pour celui sur lequel tombent les deux extrémités D , F , afin d'avoir sûrement une solution, & de n'être pas obligé de recommencer.

La première est que $\overline{CL}^2 = \frac{aabb}{4aa-ac} + ad$, & $\overline{BK}^2 = \frac{aabb}{4aa-ad} + ac$; ce qui se voit en mettant dans $yy = \frac{aabb}{xx-ac} + ad$ à la place de $AP(x)$ la valeur $AC(2a)$, & dans $xx = \frac{aabb}{yy-ad} + ac$ à la place de $AQ(y)$ la valeur $AB(2a)$. La seconde consiste en ce que $CR = \sqrt{2aa} = BO$; ce qui se trouve en mettant dans l'autre équation $xx + yy + 4xy - 8ax - 8ay + 10aa = 0$ dont le lieu est l'Hyperbole OSK , d'abord à la place de $AP(x)$ la valeur $AC(2a)$, & ensuite à la place de $AQ(y)$ la valeur $AB(2a)$. La troisième se tire de ce qu'en supposant $AK(c)$ moindre que $CK(d)$ comme on le fait ici, il s'ensuit que $\overline{BK}^2 \left(\frac{aabb}{4aa-ad} + ac \right)$ est moindre que $\overline{CL}^2 \left(\frac{aabb}{4aa-ac} + ad \right)$. Or cela posé, si l'on veut que $\overline{BK}^2 \left(\frac{aabb}{4aa-ad} + ac \right)$ soit moindre que $\overline{BO}^2(2aa)$, on trouvera en mettant pour d sa valeur $2a - c$ & opérant à l'ordinaire que $bb + cc$ doit être moindre que $4aa$, c'est à dire, que le côté AB du triangle donné ABC doit être moindre que le côté AC : & si l'on veut que le carré $\overline{CL}^2 \left(\frac{aabb}{4aa-ac} + ad \right)$ soit plus grand que $\overline{CR}^2(2aa)$, on trouvera en mettant pour c sa valeur $2a - d$ & opérant à l'ordinaire que le côté $BC(\sqrt{bb + dd})$ doit surpasser le côté $AC(2a)$. Mais il est visible que BA étant moindre que BO & CL plus grande que CR , les deux lignes courbes KML , OMR ,

se coupent nécessairement au dedans du quarré $ABDC$. D'où il suit que si le triangle donné ABC a tous les angles aigus, & qu'on prenne pour le côté AC sur lequel on suppose que les deux points F, D , se rencontrent, celui des trois dont la grandeur est moyenne entre les deux autres & pour le côté AB le plus petit, le Problème aura toujours nécessairement une solution, puisqu'alors (*fig 261.*) le point K se trouvera entre les points A, C , & que AK est moindre que AC , comme l'on a supposé en faisant le calcul sur lequel tout ce raisonnement est fondé. On trouvera en la même sorte que si le triangle donné est rectangle ou obtus angle, & qu'on prenne pour le côté AC sur lequel doivent tomber les deux extrémités D, F , le côté moyen, on aura toujours une solution; de sorte que cette remarque est generale pour toutes sortes de triangles.

On voit dans la figure 262. que l'Hyperbole OSR & la courbe KML se coupent non seulement dans un point M , au dedans du quarré $ABDC$, comme le demande le Problème; mais encore en un autre point M au dehors de ce quarré. Or si l'on veut sçavoir quelle peut être l'utilité de cet autre point, on trouvera qu'il donne une des résolutions du Problème suivant, dont celui-ci n'est qu'un cas particulier.

FIG. 263. Trouver sur le côté AC du triangle donné ABC , deux points F, D , tels qu'ayant mené les droites FG, DE , qui font avec les deux autres côtés AB, BC , les triangles FGA, DEC , égaux chacun à la moitié du triangle ABC : les lignes FG, DE , s'entrecoupent à angles droits au point H , & le quadrilatere $BGHE$ soit égal au quart du triangle ABC .

FIG. 263. & 262. Car lorsque le point d'intersection M tombe au dedans du quarré $ABDC$, il est clair que les lignes AP, PM seront chacune moindre que le côté AC , & qu'ainsi les points F, D , qu'elles déterminent tomberont tous deux entre les points A, C ; ce qui résoud le Problème énoncé comme l'on a fait au commencement. Mais

lorsque le point M tombe au dehors du quarré, comme alors l'une des lignes AP , PM est moindre que son côté AC , & l'autre plus grande; il s'ensuit que l'un des points F , D , tombe sur le côté AC du triangle donné, & l'autre sur ce même côté prolongé, ce qui donne une autre solution du Problème énoncé comme l'on vient de faire en dernier lieu. FIG. 262. & 263.

EXEMPLE X.

441. UNE Section conique MAN étant donnée, avec un point S hors de son plan pour le sommet du cone dont elle est la Section, on demande la position du cercle MAN qui en est la base.

Je distingue cette question en deux differens cas, dont le premier est lorsque la Section donnée est une Parabole, & le second lorsque c'est une Ellipse ou une Hyperbole.

Premier cas. La question se reduit à trouver sur la Parabole, le point A tel qu'ayant mené de ce point le diametre AP avec la ligne AS ; du point S la ligne SD parallele à AP ; & d'un point quelconque P du diametre AP , une ordonnée PM à ce diametre dans le plan de la Parabole, & une perpendiculaire aD à cette ordonnée dans le plan du triangle DSA , qui rencontre les côtés SA , SD , aux points a , D : le quarré de PM soit égal au rectangle $aP \times PD$. Car décrivant dans le plan aPM un cercle qui ait pour diametre aD , il est clair qu'il passera par le point M , puisque l'angle APM est droit, & que $PM^2 = aP \times PD$, qui est la propriété essentielle du cercle; c'est pourquoi menant le diametre PA ; & tirant de l'extremité D , du diametre Da du cercle une parallele DS à PA , qui rencontre aA menée de son autre extremité a par l'origine A du diametre AP , en un point S , le cone qui'a pour sommet ce point, & pour base le cercle MAN , formera * par sa rencontre avec le plan APM la Parabole même don- FIG. 264. * Art. 269.

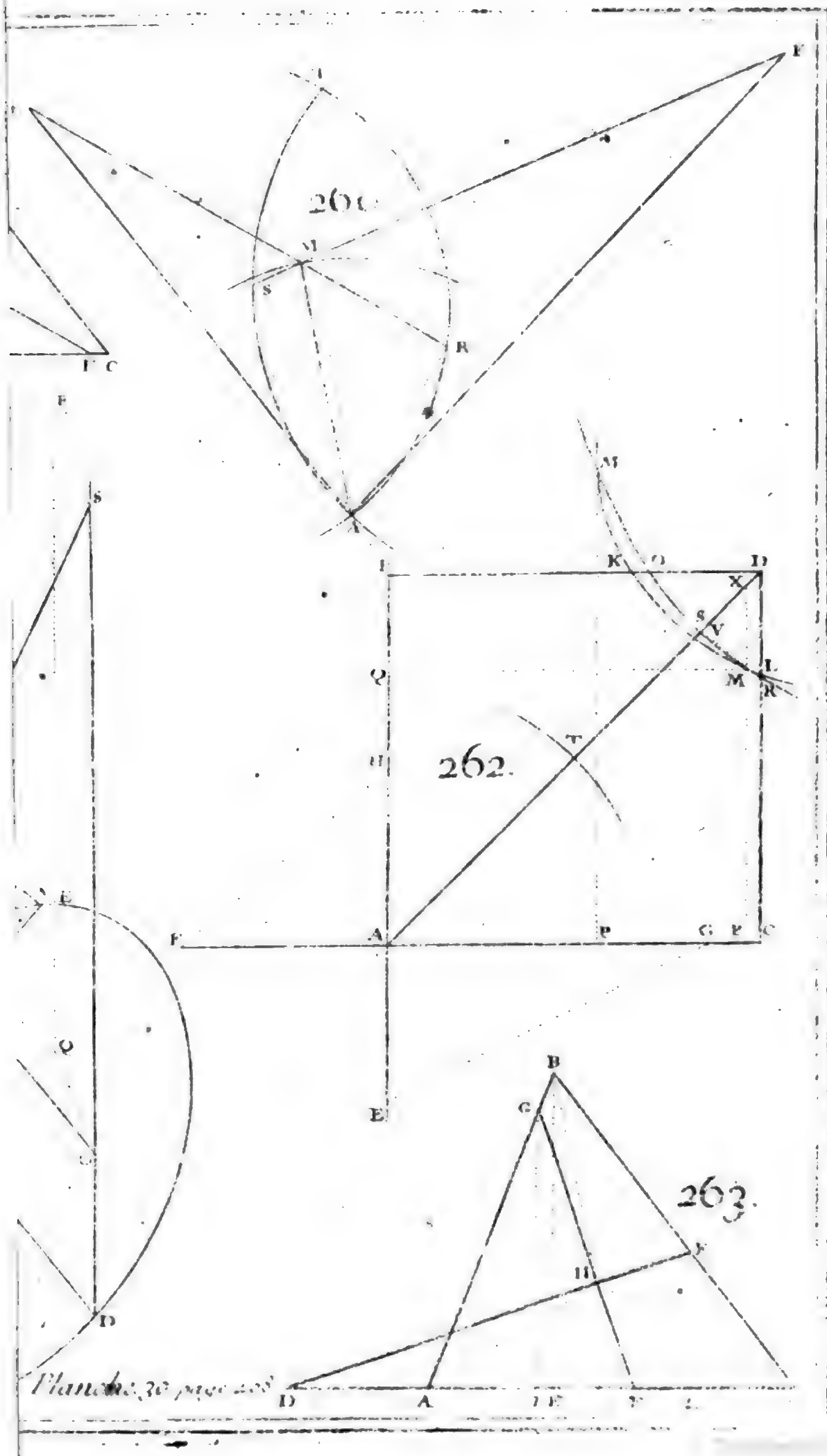
née MAN . Voici comment on peut trouver le point A .

Soit v le parametre inconnu du diametre AP , & l'on aura par la propriété de la Parabole, $\overline{PM}^2 = AP \times v$; mais pour satisfaire au Problème, il faut que $\overline{PM}^2 = aP \times PD$. Donc $aP \times PD = AP \times v$; ce qui donne cette proportion $AP. Pa :: PD. v$, qui se change en menant AO parallele à Da en cette autre $SO. AO :: PD$ ou $AO. v$, & partant $SO \times v = \overline{AO}^2$.

Maintenant pour trouver les valeurs analytiques de ces lignes, je mene du point donné S sur le plan de la Parabole la perpendiculaire SF , & du point F où elle rencontre ce plan, sur l'axe BG la perpendiculaire FG , qui rencontre le diametre AP en H . Je tire du point A l'ordonnée AK à l'axe, & la perpendiculaire AQ à la tangente AL , lesquelles rencontrent en E & Q la ligne FQ menée par le point F parallelement à l'axe. J'éleve enfin du point Q une perpendiculaire QO sur le plan de la Parabole, qui rencontrera SD dans le même point O , où la ligne AO parallele à aD la rencontre. Car la tangente AL étant parallele à l'ordonnée PM qui est perpendiculaire sur aD , l'angle LAO sera droit aussi bien que l'angle LAQ , & ainsi le plan QAO sera perpendiculaire sur AL , & sur le plan de la Parabole qui passe par cette ligne; c'est pourquoi la ligne QO perpendiculaire à ce plan se trouvera dans le plan QAO & rencontrera par consequent la ligne SD dans le même point O , où le plan QAO , c'est à dire, la ligne AO parallele à aD la rencontre. Il est à remarquer que toutes ces lignes excepté les deux FS , QO , sont dans le plan de la Parabole. Cela posé.

Je nomme les données SF ou QO , a ; FG , ou KE , b ; GB , c ; le parametre de l'axe, p ; & les inconnues BK , x ; KA ou GH , y ; & j'ai à cause des triangles semblables AKT , AEQ , cette proportion $AK (y). KT (\frac{1}{2}p) :: AE (b + y). EQ = \frac{b^2}{2y} + \frac{1}{2}p$; ce qui donne à

cause





cause des triangles AEQ , AQO , rectangles en E & Q , le quarré AO ou $AE + EQ + QO = \frac{bbpp}{4yy} + \frac{b^2p}{2y} + \frac{1}{4}pp + bb + 2by + yy + aa$. Or le parametre du diametre AP ſçavoir $v = p + 4x = p + \frac{4yy}{p}$, en mettant pour x * *Art. 17.*

la valeur $\frac{yy}{p}$; & SO ou FQ ou $GB + BK + EQ = c + x + \frac{bp}{2y} + \frac{1}{4}p = c + \frac{yy}{p} + \frac{bp}{2y} + \frac{1}{4}p$. Mettant donc ces valeurs analytiques à la place des lignes qu'elles expriment dans l'égalité $AO = SO \cdot v$, on trouvera $\frac{bbpp}{4yy} + \frac{b^2p}{2y} + \frac{1}{4}pp + bb + 2by + yy + aa = cp + yy + \frac{b^2p}{2y} + \frac{1}{4}pp + \frac{4cyy}{p} + \frac{4y^4}{p^2} + 2by + 2yy$, c'est à dire en effaçant de part & d'autre les quantités qui ſe trouvent les mêmes, ſubſtituant pour yy la valeur px , & operant enſuite à l'ordinaire;

$$\begin{aligned} x^2 + cxx + \frac{1}{4}cp x - \frac{1}{16}bbp &= 0 \\ + \frac{1}{4}p &- \frac{1}{4}aa \\ &- \frac{1}{4}bb \\ &+ \frac{1}{16}pp \end{aligned}$$

dont la vraie racine que l'on peut trouver par le moyen * * *Art. 387.* de la Parabole même donnée, exprimera la valeur de l'inconnue BK , qui ſert à déterminer le point A tel qu'on le demande.

Second cas. Toute la difficulté conſiſte à trouver ſur *Fig. 165.* l'Hyperbole donnée MAN , le point A tel qu'ayant mené le diametre AB avec les lignes Saa , BSb ; & par un de ſes points quelconques P , du diametre AB une ordonnée PM dans le plan de l'Hyperbole, & une perpendiculaire ab à cette ordonnée dans le plan du triangle aSb : on ait le quarré PM égal au rectangle $aP \cdot Pb$. Cela ſe prouve de même que dans la Parabole, & voici ce qu'il faut faire pour trouver le point A .

Soit v le diametre conjugué au diametre AB , & ſoient menées dans le plan du triangle aSb , les lignes AO parallele à ab , & OZ parallele à AB qui rencon-

Eff.

tre SA en Z ; & l'on aura $AP \times PB$ à \overline{PM} ou (à cause du cercle) à $AP \times Pb$, en raison composée de AP à Pa , ou ZO à OA , & de PB à Pb , ou de BA à AO ; c'est à dire, comme $ZO \times AB$ est à \overline{AO} . Or par la propriété de l'Hyperbole, $AP \times PB. \overline{PM} :: \overline{AB}. vv$; & partant $ZO \times AB. \overline{AO} :: \overline{AB}. vv = \frac{AB \times \overline{AO}}{ZO}$. Ce qui donne $OZ. AB$, ou $OS. SB :: \overline{AO}. vv$.

Maintenant pour trouver les valeurs analytiques, tant de la raison de OS à SB , que des quarrés \overline{AO} & vv ; je mene du point donné S , la ligne SF perpendiculaire sur le plan des Hyperboles; du point F où elle rencontre ce plan, la perpendiculaire FG à l'axe DK qui est donné de position & de grandeur, puisque les Hyperboles sont données; & du point cherché A , l'ordonnée AK à l'axe, & la perpendiculaire AT à la tangente AL , lesquelles rencontrent la ligne BF aux points E, Q . Je tire enfin BH parallèle à l'axe qui rencontre GF en X , TV parallèle à BF qui rencontre AE en V , & BD, QR , perpendiculaires sur l'axe; & ayant élevé QO perpendiculaire sur le plan de l'Hyperbole, on prouvera comme dans la Parabole qu'elle rencontrera la ligne BS au même point O , où la ligne AO parallèle à ab la rencontre. Il est à remarquer que toutes ces lignes excepté les deux FS, QO , sont dans le plan des Hyperboles. Cela posé.

Soient nommées $SF = a, FG = b, CG = c$, le premier axe $= 2d$, le second $= 2f$, les inconnues CK ou $CD = x, AK$ ou BD ou GX ou $KH = y$; & l'on aura DK ou $BH = xx, DG$ ou $BX = c + x, GK = x - c, TK = \frac{fx}{dd}$, & AT ou $\sqrt{TK^2 + AK^2} = \sqrt{yy + \frac{f^2xx}{d^2}} = \frac{f}{dd} \sqrt{ddxx + ffxx - a^2}$ en mettant pour yy la valeur $\frac{fx}{dd} - ff$. Or les triangles semblables BXF, BHE, TKV donnent $BX (c + x). XF (b - y) :: BH (2x).$

* Art. 81.

$$HE = \frac{2bx - 2xy}{c + x} :: TK \left(\frac{ffx}{dd} \right). KV = \frac{bffx - ffxy}{cdd + ddx}; \text{ \& partant}$$

$$AE \text{ ou } AK + KH + HE = \frac{2bx + 2cy}{x + c}, \text{ \& } AV \text{ ou } AK$$

$$- KV = \frac{cddy + ddx + ffx - bffx}{cdd + ddx}; \text{ mais à cause des triangles}$$

semblables AVT , AEQ , & ATK , QTR , il vient

$$AV. AT :: AE. AQ = \frac{2bfx + 2cfy}{ddxy + ffx - bffx + cddy} \sqrt{ddxx + ffx - d^2}, \text{ \&}$$

$$AT. TK :: QT. TR :: AT + TQ \text{ ou } AQ. KT + TR \text{ ou}$$

$$KR = \frac{2bffxx + 2cffxy}{ddxy + ffx - bffx + cddy}. \text{ Donc } \frac{GR \text{ ou } GK + KR}{DG}$$

$$= \frac{ddxy + ffx + bffx - cddy}{ddxy + ffx - bffx + cddy}, \frac{DR \text{ ou } DK + KR + FS}{DG} =$$

$$= \frac{2addxy + 2affxy}{ddxy + ffx - bffx + cddy} = QO, \text{ puisque } DG. DR ::$$

$$BF. BQ :: FS. QO; \text{ \& à cause du triangle rectan-}$$

$$\text{gle } AQO, \text{ le quarré } AO^2 \text{ ou } AQ^2 + QO^2 =$$

$$= \frac{2bfx + 2cfy}{ddxy + ffx - bffx + cddy} \sqrt{ddxx + ffx - d^2} + \frac{2addxy + 2affxy}{ddxy + ffx - bffx + cddy}.$$

$$\text{De plus } SO. SB :: FQ. FB :: G. GD, \text{ \& } vv = 4xx + \text{Art. 125.}$$

$$+ 4yy + 4ff - 4dd \text{ ou } 4xx - 4dd + \frac{4ffxx}{dd}.$$

Si donc l'on met dans la proportion $SO. SB :: AO^2$.

vv , à la place tant de la raison de SO à SB ou GR à

GD , que des quarrés AO^2 & vv , les valeurs analyti-

ques que l'on vient de trouver, on formera en mul-

tipliant les extrêmes & les moyens cette égalité:

$$\frac{2bfx + 2cfy}{ddxy + ffx - bffx + cddy} \sqrt{ddxx + ffx - d^2} + \frac{2addxy + 2affxy}{ddxy + ffx - bffx + cddy} =$$

$$\frac{ddxy + ffx + bffx - cddy}{ddxy + ffx - bffx + cddy} \sqrt{ddxx + ffx - d^2} + \frac{2addxy + 2affxy}{ddxy + ffx - bffx + cddy} =$$

$$4xx + \frac{4ffxx}{dd} - 4dd, \text{ dans laquelle tous les termes où}$$

y se rencontrera au premier degré s'effaceront, & mettant

à la place du quarré yy sa valeur $\frac{ffxx}{dd} - ff$, on trouvera

$$bbd^2x^2 + 2bbddfxx + bbf^2x^2 - bbd^2xx - cca^2xx -$$

$$-bbffd^2xx - ccf^2d^2xx + ccf^2a^2 + cca^2 = ddx^2$$

$$+ ffx - d^2 - aadd - ccd d \sqrt{ddx^2 + 2ffx^2 + \frac{f^4}{dd}x^2 - d^2xx}$$

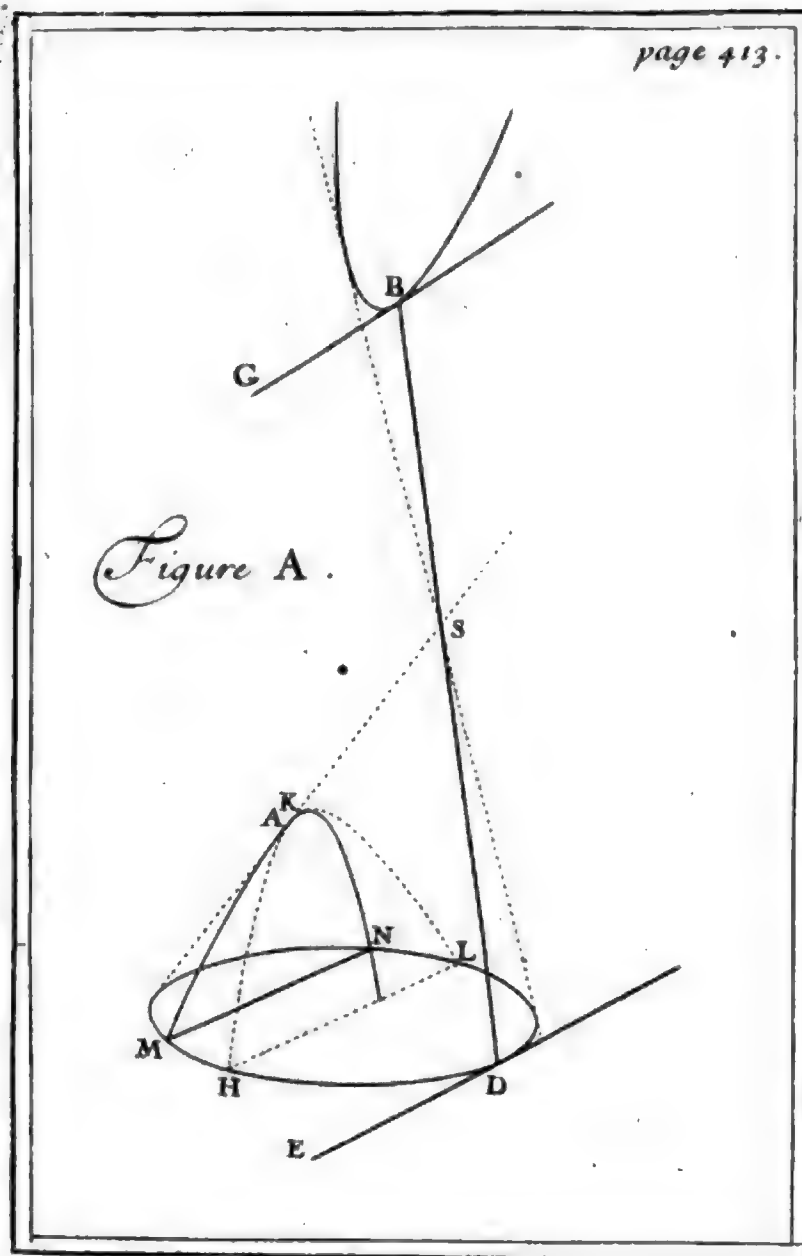
$-2ddffxx - f^4xx$ qui se change en faisant pour abréger $dd + ff = mm$, $bb + cc = nn$, $aa + dd + cc = rr$, en cette autre $bbm^4x^4 - mmnn a^4xx + ccmmd^4 = mmxx - ddr r \times \frac{m^4}{dd} x^4 - m^4xx$ qui se réduit enfin en faisant $xx = dz$ à cette égalité du troisième degré.

$$\left. \begin{array}{l} -d \\ z^3 - \frac{dr r}{mm} \\ -\frac{dbb}{mm} \end{array} \right\} z^3 + \frac{ddr r}{mm} \left. \begin{array}{l} + \\ + \frac{nn d^4}{m^4} \end{array} \right\} z - \frac{cc d^4}{m^4} = 0;$$

dont l'une des racines ; sçavoir celle qui est plus grande que d , est telle que prenant une moyenne proportionnelle entre cette racine & d moitié du premier axe ; cette moyenne proportionnelle exprime la valeur de CK qui sert à déterminer le point cherché A . On pourra se servir de l'Hyperbole même donnée pour trouver les racines de cette égalité , par le moyen des articles 396 & 399. du Livre precedent.

Lorsque $CG(c) = 0$, c'est-à-dire , lorsque le point F tombe sur le second axe ; il est visible que cette égalité se change en une autre du second degré , puisque le dernier terme étant nul , elle se divise par z . Mais lorsque $FG(b) = 0$, ce qui arrive lorsque le point F tombe sur le premier axe ; le terme $\frac{dbbz}{mm}$ s'efface dans l'égalité precedente , & un qui est $bb + cc$ devient cc ; ce qui fait qu'elle se peut diviser par $z - d$, & qu'elle se réduit par conséquent à celle-ci $zz - \frac{dr r}{mm}z + \frac{cc d^4}{m^4} = 0$, qui n'est encore que du second degré. Enfin si l'on fait dans cette dernière égalité $c = 0$, ce qui doit arriver lorsque le point F tombe sur le centre C , puisqu'alors les lignes b & c deviennent chacune nulles ; on aura $z = \frac{dr r}{mm}$, & partant dz ou $xx = \frac{ddr r}{mm}$, &

$$x = \frac{dr}{m} = d \sqrt{\frac{aa + dd}{dd + ff}}.$$



Il est inutile d'avertir que le Problème se résoud par la même voie dans l'Ellipse, n'y ayant de changement que dans quelques signes. Mais on peut toujours rapporter, si l'on veut, ce second cas au premier, de la manière qui suit.

Ayant mené par un point quelconque B de l'une des Hyperboles données, une tangente BG ; & ayant fait passer par cette tangente, & par le sommet donné S , un plan GBS : soit mené par tout où l'on voudra, un autre plan HKL parallèle à celui-ci. Je dis qu'il formera dans la surface conique, décrite par une ligne droite indéfinie attachée en S , & muë autour de l'Hyperbole opposée MAN , une ligne courbe HKL qui sera une Parabole; de sorte que toute la difficulté est réduite au cas précédent. Car supposant que le cercle $DHMNL$ soit la base du cône, qui a pour sommet le point S , & pour Section l'Hyperbole MAN avec son opposée; il est clair que le plan GBS touchant les deux surfaces coniques opposées qui ont pour base ce cercle, dans le côté BSD , formera dans le plan de la base, une ligne droite DE qui touchera cette base en un point D . Or comme cette ligne est la directrice par rapport à la Section HKL , il s'ensuit selon la définition dixième du Livre VI. que cette Section sera une Parabole.

Ce Problème a été très-célèbre du temps de M. Descartes, & l'on en a trouvé une solution parmi ses Manuscrits, qui est imprimée à la fin de la 75^e Lettre du 3^e tome. Si l'on veut se donner la peine de comparer sa solution avec la mienne, on verra que non seulement elle est moins naturelle, puisqu'elle ne va pas droit au but, mais encore qu'elle est beaucoup plus embarrassée. Aussi ne donne-t-il point l'analyse du cas où la Section est une Ellipse ou une Hyperbole; & il se contente d'assurer que l'égalité qui renferme les conditions du Problème, ne doit pas passer le quatrième degré.

LEMME I.

FIG. 266. 442. **267. 268.** *Si par l'extrémité B d'un diamètre AB, l'on mène une corde quelconque BD qui termine l'arc AD moindre que la demie circonférence ; & qu'ayant pris par tout où l'on voudra deux arcs contigus EF, FG, égaux chacun à l'arc AD, on tire les cordes BE, BF, BG : je dis que la corde du milieu BF est à la somme ou à la différence de ses deux voisines BE, BG, comme le rayon CB est à la corde BD : sçavoir à la somme lorsque l'origine commune B des cordes BD, BE, BF, BG, ne tombe sur pas un des deux arcs EF, FG ; & au contraire à la différence, lorsqu'il tombe sur l'un ou l'autre de ces deux arcs.*

Car soit du centre F, & du rayon FB, décrit un arc de cercle qui coupe la corde BG prolongée, s'il est nécessaire, au point H, pour avoir une triangle isocèle BFH, qui sera semblable au triangle isocèle BCD ; puisque l'angle FBH a pour mesure la moitié de l'arc FG égal à l'arc AD, dont la moitié est aussi la mesure de l'angle CBD. On aura donc $FB. BH :: CB. BD$, de sorte qu'il ne reste qu'à démontrer que la ligne BH est la somme des deux cordes BE, BG, dans le premier cas, & leur différence dans le second. Pour le faire.

FIG. 266. Soient tirées les cordes EF, FG, & on aura deux triangles BEF, FHG, qui seront semblables & égaux. Car dans le premier cas l'angle FHB ou FHG, est égal à l'angle FBH qui vaut l'angle FBE, puisque les arcs FG, FE, sont égaux ; & de plus l'angle BEF est égal à l'angle FGH, puisqu'ils ont chacun pour mesure la moitié du même arc BF ; & partant l'angle GFH est égal à l'angle EFB. Or les côtés FE, FG, & FB, FH, sont égaux entr'eux. Le côté GH sera donc égal au côté BE. Donc &c.

FIG. 267. 268. On prouvera à peu près de même dans le second cas que les triangles FHG, FBE, sont semblables & égaux ; & qu'ainsi la ligne BH est la différence des deux cordes BG, BE.

LEMME II.

443. SOIT une Table dont le premier rang parallele renfermant le nombre 2, & le second la lettre x ; le troisième $xx - 2$ soit le produit du second par x , moins le premier; le quatrième $x^3 - 3x$ soit le produit du troisième par x , moins le second, le cinquième $x^4 - 4xx + 2$ soit le produit du quatrième par x , moins le troisième, & ainsi de suite à l'infini. Soit de plus un arc de cercle quelconque AR divisé en autant de parties égales qu'on voudra, aux points D, E, F, G , &c. FIG. 269. Je dis que si le premier rang 2 de la Table exprime la valeur 270. du diametre BA , & le second rang x celle de la premiere corde BD , le troisième rang $xx - 2$ exprimera la valeur de la seconde corde BE , le quatrième rang $x^3 - 3x$ celle de la troisième corde BF , & ainsi de suite jusqu'à la dernière BR : en observant que ces cordes deviennent negatives, lorsqu'elles passent de l'autre côté du point B .

1 ^{er}	2	Table pour la division des arcs de cercle en parties égales.	
2 ^e	x		
3 ^e	$xx - 2$		
4 ^e	$x^3 - 3x$		
5 ^e	$x^4 - 4xx + 2$		
6 ^e	$x^5 - 5x^3 + 5x$		
7 ^e	$x^6 - 6x^4 + 9xx - 2$		
8 ^e	$x^7 - 7x^5 + 14x^3 - 7x$		
9 ^e	$x^8 - 8x^6 + 20x^4 - 16xx + 2$		
10 ^e	$x^9 - 9x^7 + 27x^5 - 30x^3 + 9x$		
11 ^e	$x^{10} - 10x^8 + 35x^6 - 50x^4 + 25xx - 2$		
12 ^e	$x^{11} - 11x^9 + 44x^7 - 77x^5 + 55x^3 - 11x$		
13 ^e	$x^{12} - 12x^{10} + 54x^8 - 112x^6 + 105x^4 - 36xx + 2$		
14 ^e	$x^{13} - 13x^{11} + 65x^9 - 156x^7 + 182x^5 - 91x^3 + 13x$		

Car 1^o. Lorsque l'arc AR est moindre que la demie FIG. 269. circonference ADB ; si l'on multiplie une corde quelconque BF par x ; & qu'on retranche de ce produit la corde BE qui la precede, on aura la corde BG qui la suit immédiatement, puisque selon le Lemme prece-

dent $CB(1)$. $BD(x) :: BF.BE + BG \equiv x.BF$, & partant $BG \equiv x.BF - BE$. Donc &c.

FIG. 270. 2°. Lorsque l'arc AR est plus grand que la demie circonférence ADB ; il est visible que l'origine commune B de toutes les cordes se trouvera nécessairement sur l'une des parties égale comme GH , dans lesquelles l'arc AR est divisé. Or l'on prouvera comme dans le premier cas que le troisième rang de la Table exprime la valeur de BE , le quatrième celle de BF , & ainsi de suite jusqu'à BG : mais il reste à démontrer que le rang qui suit celui qui exprime la corde BG , n'exprimera point la valeur de $+BH$, mais celle de $-BH$; & de même que le rang qui suit ce dernier exprime la valeur de $-BI$, & ainsi de suite jusqu'à $-BR$.

Selon la formation de la Table, le rang qui suit celui qui exprime BG est $x.BG - BF$. Or par le Lemme $CB(1)$. $BD(x) :: BG.BF - BH$, & partant $-BH \equiv x.BG - BF$; c'est à dire que $-BH$ vaut le rang parallèle de la Table qui suit immédiatement celui qui exprime la valeur de BG . Mais selon la formation de la même Table, le rang qui suit celui qui vaut $-BH$ est $-x.BH - BG$ valeur de BI , puisque selon le Lemme $x.BH \equiv BI - BG$: & de même le rang qui suit celui qui vaut $-BI$ est selon la formation de cette même Table $-x.BI + BH$ valeur de la corde négative $-BL$, puisque selon le Lemme $x.BI \equiv BL + BH$. Or il est visible qu'il en est de même de toutes les cordes qui suivent BL jusqu'à BR ; & c'est ce qui restoit à démontrer.

COROLLAIRE I.

FIG. 269.
270.

444. **D**E-LA il est évident que si l'arc AR est divisé en cinq parties égales, le sixième rang de la Table $x' - 5x' + 5x$ exprimera la valeur de la corde BR qui soutend l'arc BR différence de l'arc AR & de la demie circonférence ADB ; que s'il étoit divisé en sept parties égales, le huitième rang seroit la valeur de BR ; &

& en general qu'il faut augmenter d'une unité le nombre des parties égales, afin d'avoir le rang de la Table qui vaut BR : en observant que le rayon $CB \equiv 1$, que la première corde $BD \equiv x$, & que la dernière corde BR est négative lorsque l'arc AR est plus grand que la demi-circonférence.

COROLLAIRE II.

445. **O**N voit par la composition de cette Table, 1°. Que le nombre 2 est le premier terme de chaque rang perpendiculaire. 2°. Que les coefficients de tous les autres termes du premier rang perpendiculaire sont égaux à l'unité. 3°. Que le coefficient d'un terme quelconque de tel rang perpendiculaire qu'on voudra, est toujours égal au coefficient d'un pareil terme dans le rang perpendiculaire à gauche, plus au coefficient du terme qui est au dessus de lui : c'est à dire, par exemple, que le coefficient 14. du quatrième terme $14x^3$ du troisième rang perpendiculaire, est égal au coefficient 5 du quatrième terme $5x^3$ du deuxième rang perpendiculaire qui est le rang à gauche, plus au coefficient 9 du terme $9xx$ qui est au dessus du terme $14x^3$.

REMARQUE.

446. **S**I l'on continuoît à diviser la circonférence FIG. 270. en parties égales aux arcs AD , DE , &c. au-delà du point R ; il est clair que les rangs parallèles de la Table qui suivent celui qui exprime $—BR$ continueroient à exprimer par ordre toutes les cordes négatives qui suivroient BR , jusqu'à ce que repassant le point B elles deviendroient encore négatives; & ainsi de suite alternativement positives & négatives, autant de fois qu'elles passeroient le point B jusqu'à l'infini.

EXEMPLE I.

447. **C**OUPER un arc de cercle donné AR , en autant de parties égales AD, DE, EF, FG , &c. qu'on voudra.

FIG. 269.

270.

voyez
explication de l'algebre
à l'algèbre par
quiesme &c. Paris. 1722.
quillon. page 206.

Ayant mené le diamètre AB & la corde BR , & nommé le rayon donné CA ou CB , 1; la corde donnée BR , a ; on formera une égalité dont le premier membre sera le rang parallele de la Table qui surpasse d'une unité le nombre des parties égales, & le second sera $\overline{+}a$; sçavoir $+a$ lorsque l'arc AR est moindre que la demie circonference, & $-a$ lorsqu'il est plus grand. Or il est visible, selon l'article 443. que la résolution de cette égalité doit fournir pour l'une de ses racines x , une valeur BD telle qu'ayant décrit du point B comme centre & de l'intervalle BD un arc de cercle, il coupera sur l'arc donné AR la premiere des parties égales cherchées AD .

Qu'il faille, par exemple, diviser l'arc donné AR en trois parties égales; on trouvera $x^3 - 3x = \overline{+}a$, dont l'une des racines BD terminera la premiere des trois parties égales qu'on demande. S'il falloit diviser l'arc AR en cinq parties égales, on auroit $x^5 - 5x^3 + 5x = \overline{+}a$; & de même, s'il falloit diviser en sept, il viendrait $x^7 - 7x^5 + 14x^3 - 7x = \overline{+}a$: de sorte que toute la difficulté se réduit à trouver les racines de ces égalités. Or c'est ce qu'on a enseigné dans le Livre precedent. Donc &c.

Il est à remarquer que ces égalités sont les plus simples qu'il est possible, lorsque le nombre des parties égales est un nombre premier. Mais lorsqu'il est composé de deux ou plusieurs nombres premiers, on divisera d'abord l'arc donné en autant de parties égales que l'un de ces nombres a d'unités, & ensuite la premiere de ces parties en autant de parties égales que l'un des nombres restans a d'unités, & ainsi de suite jusqu'à ce qu'on ait épuisé tous les nombres premiers, dont le produit for-

me le nombre donné ; ce qui donnera enfin la première des parties égales qu'on cherche : si l'on veut, par exemple, diviser l'arc AR en trente parties égales, il faudra d'abord le diviser en cinq, ensuite la première de ces cinq parties en trois, & enfin la première de ces trois en deux, pour avoir la trentième partie qu'on demande, & cela parce que $30 = 5 \times 3 \times 2$.

REMARQUE I.

448. DEUX points donnés A, R , sur la circonférence d'un cercle en déterminent non seulement deux arcs, dont l'un AR est moindre que la demie circonférence, & l'autre ABR plus grand ; mais encore une infinité de portions, dont les unes sont la circonférence entière plus l'arc AR , deux fois la circonférence plus l'arc AR , trois fois la circonférence plus l'arc AR &c. & les autres sont la circonférence entière plus l'arc ABR , deux fois la circonférence plus l'arc ABR , trois fois la circonférence plus l'arc ABR &c ; dont la raison est que la circonférence d'un cercle rentrant en elle-même, on peut considérer cette ligne courbe comme faisant une infinité de revolutions autour d'elle-même. Si donc l'on nomme l'arc AR , d ; la circonférence entière c ; l'arc ABR sera $c - d$ & l'on aura ces deux suites,

1^e. $d, c+d, 2c+d, 3c+d, 4c+d, 5c+d, 6c+d, 7c+d, 8c+d, \&c.$

2^e. $c-d, 2c-d, 3c-d, 4c-d, 5c-d, 6c-d, 7c-d, 8c-d, \&c.$

qui expriment par ordre toutes les portions de circonférences terminées par les deux points A, R . Cela posé.

Si l'arc AD est une aliquote quelconque de l'arc AR moindre que la demie circonférence ; & qu'ayant inscrit dans le cercle un polygone $DEFGH$ &c. d'un pareil nombre de côtés à commencer par le point D , on tire de l'extrémité B du diamètre AB aux angles du polygone les cordes $BD, BF, BG, BH, \&c.$

G g g ij

je dis qu'elles terminent des aliquotes pareilles de tous les termes de ces deux suites, dont l'origine fixe est toujours au point *A*.

FIG. 271. Car soit pour fixer les idées l'arc $AD = \frac{1}{5}d$; il est clair que l'arc $ADE = \frac{c+d}{5}$, l'arc $ADEF = \frac{2c+d}{5}$, l'arc $ADEFG = \frac{3c+d}{5}$ l'arc $ADEFGH = \frac{4c+d}{5}$ qui sont les 5^{es} parties ou les aliquotes pareilles des cinq premiers termes de la premiere suite. Or si l'on divise tel autre de ses termes qu'on voudra par 5, il est visible que le quotient renferme au juste un certain nombre de fois la circonference entiere plus une des cinq fractions precedentes. Donc puisque la corde qui termine un arc, dont l'origine est en *A*, est la même que celle qui termine cet arc plus la circonference repetée autant de fois qu'on veut, il s'ensuit que les cordes *BD*, *BE*, *BF*, *BG*, *BH*, terminent les cinquiemes parties de tous les termes de la premiere suite. On prouvera de la même maniere que les arcs *AH*, *AHG*, *AHGF*, *AHGFE*, *AHGFED* sont les cinquiemes parties des cinq premiers termes de la seconde suite, & qu'ainsi les cordes *BH*, *BG*, *BF*, *BE*, *BD*, terminent les cinquiemes parties de tous les termes de la seconde suite. Mais il est visible que cette démonstration se peut appliquer à telle autre aliquote qu'on voudra de l'arc *AR*. Donc &c.

FIG. 273. Delà il suit que si l'on réunit les deux suites precedentes en une seule $d, c \overline{+} d, 2c \overline{+} d, 3c \overline{+} d$ &c; les deux cordes voisines de part & d'autre de la plus grande ou premiere *BD* qui termine l'aliquote *AD* de l'arc *AR* moindre que la demie circonference, termineront des aliquotes pareilles du second terme $c \overline{+} d$ de la suite; que les deux cordes voisines de celles-ci termineront des aliquotes pareilles du troisieme terme $2c \overline{+} d$ de la suite; & ainsi à l'infini de deux en deux jusqu'aux dernieres lorsque l'aliquote est impaire, & jusqu'à la dernière lorsqu'elle est paire. Ainsi lorsque l'arc $AD = \frac{1}{5}AR$, les cordes *BE*, *BH*, terminent des deux arcs *ADE*, *AH*,

cinquièmes parties du second terme $c \overline{+} d$ de la suite, c'est à dire de la circonference plus l'arc AR , & de la circonference moins cet arc ; les deux cordes BF , BG , voisines de celles-ci termineront deux arcs $ADEF$, AHG , qui sont les cinquièmes parties du troisième terme $2c \overline{+} d$ de la suite : & de même lorsque l'arc $AD = \frac{1}{2} AR$; les deux cordes BE , BK , voisines de part & d'autre de la première ou plus grande BD terminent les deux arcs ADE , AK , qui sont les sixièmes parties du second terme $c \overline{+} d$; les deux cordes BF , BH , voisines de ces deux-ci terminent les deux arcs $ADEF$, AKH , sixièmes parties du troisième terme $2c \overline{+} d$; & enfin la dernière corde BG termine les deux arcs $ADEFG$, $AKHG$, sixièmes parties du quatrième terme $3c \overline{+} d$.

On entend dans les remarques suivantes par *cordes impaires*, celles qui étant prises de part & d'autre de la première ou plus grande BD , se trouvent dans les lieux impairs à commencer par cette plus grande ; & par *cordes paires*, celles qui étant prises de part & d'autre de la même BD , se trouvent dans des lieux pairs. Ainsi lorsque l'arc $AD = \frac{1}{2} AR$; les cordes BD , BF , BG , sont des cordes impaires, & les cordes BE , BH , des cordes paires : & de même lorsque l'arc $AD = \frac{1}{3} AR$; les cordes BD , BF , BH , sont des cordes impaires, & les côtés BE , BK , BG , sont des cordes paires.

REMARQUE II.

449. SI l'arc AD est une aliquote quelconque de l'arc AR moindre que la demie circonference ARB , & qu'ayant inscrit dans le cercle à commencer par le point D , un polygone $DEFGH$ &c. d'un pareil nombre de côtés, on tire de l'extrémité B du diamètre AB aux angles du polygone les cordes BD , BE , BF , BG , BH &c : je dis que les cordes impaires lorsque l'arc AD est une aliquote impaire de l'arc AR , & leurs quar-

Ggg iij

rés lorsqu'il en est une aliquote paire, expriment les racines vraies de l'égalité qu'on trouve en égalant à la grandeur positive $+a$, le rang parallele de la Table dont l'exposant surpasse d'une unité le nombre des côtés du polygone ; & que les cordes paires dans le premier cas, & leurs quarrés dans le second, expriment les racines vraies de l'autre égalité qu'on trouve en égalant à la grandeur negative $-a$, le même rang parallele de la Table.

FIG. 271. Soit, par exemple, l'arc $AD = \frac{1}{3} AR$; je dis que les
273. cordes impaires BD, BF, BG , sont les racines vraies

FIG. 272. de l'égalité $x^3 - 5x^2 + 5x = a$, & que les cordes paires
274. BE, BH , sont les racines vraies de l'autre égalité $x^3 - 5x^2 + 5x = -a$. Si l'arc $AD = \frac{1}{6} AR$; les quarrés des cordes impaires BD, BF, BH , seront les racines vraies de l'égalité $x^6 - 6x^4 + 9xx - 1 = a$, & les quarrés des cordes paires BE, BK, BG , seront les racines vraies de l'autre égalité $x^6 - 6x^4 + 9xx - 1 = -a$.

Car si l'on propose de diviser la circonference entiere repetée un certain nombre de fois plus ou moins l'arc AR , en parties égales dont la premiere soit moindre que la demie circonference, il est clair selon l'article 444 qu'on formera la même Table que pour la division de l'arc AR : en observant que les cordes doivent changer necessairement une fois de signe (avant que d'arriver à la derniere BR) lorsque la circonference n'est repetée qu'une fois, par ce que l'origine commune B de toutes se trouve sur l'une des parties égales ; que les cordes doivent changer deux fois de signes, lorsque la circonference est repetée deux fois, parce que l'origine B se trouve necessairement sur deux des parties égales ; qu'elles doivent changer trois fois, lorsque la circonference est repetée trois fois, parce que l'origine B se trouve sur trois parties égales, & ainsi de suite. La corde BR sera donc positive lorsqu'il s'agit de diviser en parties égales l'arc AR & la circonference repetée un nombre pair de fois plus ou moins l'arc AR ; & negative lorsque la circonfere-

ce est répétée un nombre impair de fois : c'est à dire que dans le premier cas on doit égaler le rang parallele de la Table à la grandeur positive $+a$. Et par conséquent les cordes impaires ou leurs quarrés seront les racines vraies de l'autre égalité dont l'un des membres est $-a$. *Ce qu'il falloit , &c.*

REMARQUE III.

450. **L**es mêmes choses étant posées , si l'arc AD FIG. 271. est une aliquote impaire de l'arc AR ; il est clair par l'inf- 273. pection de la Table , que tous les termes pairs , c'est à dire , le deuxième , quatrième , sixième , &c , excepté le dernier terme a , manquent toujours dans les deux égalités qu'on trouve selon la remarque precedente. Or l'on sçait en Algebre , qu'en changeant de signes les termes pairs d'une égalité , on ne fait qu'en changer les racines vraies en fausses & les fausses en vraies. D'où il suit que les cordes paires qui sont des racines vraies de l'égalité dont l'un des membres est $-a$, deviendront des racines fausses de l'autre égalité dont l'un des membres est $+a$. Par exemple , si l'arc $AD = \frac{1}{5} AR$; les cordes impaires BD , BF , BG , seront les racines vraies de l'égalité $x^5 - 5x^3 + 5x = a$, & les cordes paires BE , BH , en seront les racines fausses.

On peut tirer de ces deux dernieres Remarques plusieurs Theorèmes la plûpart entierement nouveaux , touchant l'inscription des poligones reguliers ; si l'on fait attention que la grandeur connuë du second terme d'une égalité renferme la somme de ses racines , que celle du troisième terme renferme la somme des plans alternatifs de ses racines , que celle du quatrième terme renferme la somme des solides alternatifs &c , & enfin que le dernier terme est égal au produit de toutes les racines les unes par les autres. J'en mettrai ici quatre des principaux , après avoir fait la Remarque suivante qui peut être de quelque utilité.

REMARQUE. IV.

FIG. 271.
273.

451. LES mêmes choses étant posées que dans la Remarque precedente, où l'on veut que l'aliquote AD de l'arc AR soit impaire ; je dis qu'entre les cordes renfermées dans la demie circonference ARB qui contient l'arc AR , la dernière ou plus petite BF soutend un arc BF qui est à l'arc BR , en même raison que l'arc AD à l'arc AR .

Car soit l'arc AD la cinquième partie de l'arc AR , & par conséquent l'arc DE la cinquième partie de la circonference ; il est clair que la demie circonference ARB contiendra deux fois & demie l'arc DE , c'est à dire, deux fois l'arc DE ou bien l'arc DEF plus la cinquième partie de la demie circonference. Donc l'arc AD plus l'arc BF vaut la cinquième partie de la demie circonference ARB . Donc puisque AD est la cinquième partie de l'arc AR , il s'en suit que BF sera aussi la cinquième partie de l'arc BR complement à deux droits de l'arc AR . Mais ce que l'on vient de démontrer subsiste avec la même force, soit que l'arc AD soit la cinquième partie de l'arc AR , ou bien une autre aliquote quelconque impaire. On a donc eu raison de dire en general &c.

De là on voit que si l'on nomme b la corde BR d'un arc quelconque BR moindre que la demie circonference, dont le rayon est 1 ; & que l'on forme une égalité dont l'un des membres soit b , & l'autre le rang parallele de la Table qui surpasse d'une unité le nombre des parties égales dans lesquelles l'arc BR doit être divisé : cette égalité aura pour l'une de ses racines la corde BF de la première de ses parties, & par conséquent pour une autre de ses racines, la corde BG de la première d'un pareil nombre de parties égales de l'arc BAR complement à quatre droits de l'arc BR .

THEOR. I

THEOREME I.

452. Si l'on inscrit au dedans d'un cercle un polygone régulier quelconque $DEFGH$ &c. d'un nombre impair de côtés ; & qu'on tire d'un point quelconque B de la circonférence à tous les angles du polygone des cordes $BD, BE, BF, BG, BH,$ &c : je dis ,

Fig. 271.

1°. Que la somme des cordes impaires BD, BF, BG &c, à commencer par la plus grande BD sera toujours égale à la somme des cordes paires BE, BH &c ; c'est à dire que la plus petite corde $BF - BE + BD - BH + BG$ &c $= 0$.

Car menant le diamètre BA , & prenant l'arc AR qui contienne l'arc AD autant de fois que le polygone a de côtés, il est clair comme l'on vient de voir que si l'on nomme la corde BR, a ; & le rayon CA ou CB, r ; les cordes impaires BD, BF, BG &c, seront les racines vraies, & les cordes paires BE, BH &c, les racines fausses de l'égalité qui a pour l'un de ses membres $+a$. Or puisque le second terme, qui selon qu'on démontre en Algebre contient la somme des racines, manque toujours dans cette égalité ; il s'ensuit &c.

2°. Que si l'on mene le diamètre BA , & qu'ayant pris l'arc AR qui contienne l'arc AD autant de fois que le polygone a de côtés, on tire la corde BR : le produit $BD * BE * BF * BG * BH$ &c de toutes les cordes BD, BE, BF, BG, BH &c les unes par les autres, sera toujours égal au produit de la corde BR par une puissance du rayon CA qui ait pour exposant le nombre des cordes -1 .

Car ce dernier produit vaut le membre a ; puisque $BR = a$, & qu'on prend dans la Table pour l'unité le rayon CA . Or comme le terme a est toujours le dernier terme de l'égalité qui a pour ses racines toutes les cordes BD, BE, BF, BG, BH &c, & que le dernier terme d'une égalité contient toujours selon ce qu'on démontre en Algebre le produit de toutes ses racines : il s'ensuit &c.

H h h.

THEORESME II.

FIG. 673.

453. Si l'on divise une demie circonference AEB en un nombre quelconque impair de parties égales, dont les deux premières soient l'arc AE, les quatre premières l'arc AEF, & ainsi de suite de deux en deux jusqu'à la dernière; & qu'on tire les cordes BE, BF &c: je dis,

1°. Que la première de ces cordes BE, moins la seconde BF, plus la troisième, moins la quatrième &c. jusqu'à la dernière inclusivement; est toujours égale au rayon.

2°. Que le produit BE \times BF &c. de toutes les cordes les unes par les autres, est égal à une puissance convenable du rayon. Ainsi dans cet exemple où le nombre des divisions est 5, & où il n'y a par conséquent que deux cordes BE, BF; on aura

$$1^\circ. BE - BF = CA. \quad 2^\circ. BE \times BF = CA^2.$$

Car inscrivant dans le cercle entier le poligone regulier EFGH dont le nombre des côtés soit égal au nombre des divisions à commencer par le point A; & tirant de l'autre extrémité B du diametre AB à tous les angles de ce poligone des cordes BD, BE, BH, BF, BG, &c; il est clair 1°. Que la plus grande de ces cordes BD est égale au diametre BA, & qu'ainsi l'arc AD étant nul ou zero, l'arc AR le sera aussi; d'où l'on voit que la corde BR sera aussi égale au diametre BA. 2°. Que les cordes BE, BH, BF, BG &c, étant prises deux à deux sont égales entr'elles. Or cela posé, si l'on applique le Theorème precedent à ce cas particulier on en verra naître celui-ci. Donc &c.

THEORESME III.

FIG. 272.

454. Si l'on inscrit au dedans d'un cercle un poligone regulier quelconque DEFGHK &c, dont le nombre des côtés soit pair; & que d'un point quelconque B de la circonference, on tire à tous les angles de ce poligone des cordes BD, BE, BF, BG, BH, BK &c. : je dis,

1°. Que la somme tant des quarrés des cordes impaires BD,

BF, BH , que des cordes paires BE, BG, BK , est égale au quarré du rayon CB pris autant de fois que le poligone a de côtés.

Car menant le diametre BA , & prenant l'arc AR qui contienne l'arc AD autant de fois que le poligone a de côtés; il est clair* qu'en nommant la corde BR, a ; * *Art. 449.* & le rayon CA ou $CB, 1$; les quarrés des cordes impaires BD, BF, BH &c, seront les racines vraies de l'égalité dont l'un des membres est $+a$; & que les quarrés des cordes paires BE, BK, BG &c, seront les racines vraies de l'autre égalité dont l'un des membres est $-a$. Or le coëfficient du second terme de chacune de ces deux égalités qui contient la somme de leurs racines, est toujours égal au quarré du rayon pris autant de fois que le poligone a de côtés, comme l'on voit dans la Table. Donc &c.

2°. Que si l'on mene le diametre BA ; & qu'ayant pris l'arc AR qui contienne autant de fois l'arc AD que le poligone a de côtés, on tire la corde BR : le produit $\overline{BD} \cdot \overline{BF} \cdot \overline{BH}$ &c. des quarrés des cordes impaires, est égal au produit de $BA + BR$ par une puissance convenable du rayon, sçavoir $BA + BR$ lorsque le nombre des côtés du poligone est simplement pair, & $BA - BR$ lorsqu'il est parement pair, c'est à dire, divisible par 4; & le produit $\overline{BE} \cdot \overline{BG} \cdot \overline{BK}$ &c. des cordes paires, est égal au produit de $BA + BR$ par la même puissance du rayon, sçavoir $BA - BR$ dans le premier cas & $BA + BR$ dans le second.

Car nommant BR, a ; & le rayon $CA, 1$, il est clair que les quarrés des cordes impaires BD, BF, BH &c, sont les racines d'une égalité qui a toujours pour dernier terme $2 + a$, c'est-à-dire $BA + BR$; & de plus que les quarrés des cordes paires BE, BG, BK &c, sont les racines de l'autre égalité qui a toujours pour dernier terme $2 - a$, c'est-à-dire $BA - BR$. Or comme le dernier terme d'une égalité contient toujours le produit de toutes ses racines, il s'ensuit &c.

H h h ij

COROLLAIRE.

455. **D**E-LA il est evident 1°. Que la somme des quarrés de toutes les cordes tant paires qu'impaires, est egal au quarré du rayon multiplié par le double du nombre des côtés du polygone, c'est à dire ici que $\overline{BF} + \overline{BE} + \overline{BD} + \overline{BK} + \overline{BH} + \overline{BG} = 12 \overline{CA}$. 2°. Que la difference des quarrés des cordes impaires avec les quarrés des cordes paires, est toujours egale à zero, c'est à dire, que $\overline{BF} - \overline{BE} + \overline{BD} - \overline{BK} + \overline{BH} - \overline{BG} = 0$. 3°. Que le produit des quarrés des cordes impaires plus celui des quarrés des cordes paires, est egal au quadruple d'une puissance pareille du rayon; c'est à dire, que $\overline{BF} \times \overline{BD} \times \overline{BH} + \overline{BE} \times \overline{BK} \times \overline{BG} = 4 \overline{CA}$. 4°. Que la difference de ces deux produits, est egale au double de la corde BR multipliée par une puissance convenable du rayon; en observant que le produit du quarré des cordes impaires, surpasse celui des quarrés des cordes paires, lorsque le nombre des côtés du polygone est simplement pair, & au contraire qu'il est moindre, lorsqu'il est parement pair: c'est à dire ici, que $\overline{BF} \times \overline{BD} \times \overline{BH} - \overline{BE} \times \overline{BK} \times \overline{BG} = 2 \overline{BR} \times \overline{CA}$. 5°. Que le produit des quarrés de toutes les cordes tant paires qu'impaires les uns par les autres sera toujours egal au produit de $\overline{BA} - \overline{BE} = \overline{BA} + \overline{BR} \times \overline{BA} + \overline{BR} = \overline{AR}$ à cause de l'angle droit ARB , par une puissance convenable du rayon: c'est à dire en extrayant de part & d'autre les racines quarrées, que le produit de toutes les cordes est egal au produit de la corde AR par une puissance du rayon moindre d'une unité que le nombre des cordes; par exemple ici, $\overline{BF} \times \overline{BE} \times \overline{BD} \times \overline{BK} \times \overline{BH} \times \overline{BG} = \overline{AR} \times \overline{CA}$.

THEOREME IV.

FIG. 275. 456. **S**I l'on divise une demie circonference ADB en un nombre quelconque pair de parties égales, dont la premiere

Soit l'arc AD , les trois premieres l'arc ADE , les cinq premieres l'arc $ADEF$, & ainsi de suite de deux en deux jusqu'à la dernière ; & qu'on tire les cordes BD , BE , BF &c: je dis,

1°. Que la somme des quarrés de ces cordes est égale au quarré du rayon pris autant de fois qu'il y a de divisions. C'est à dire ici, où le nombre des divisions est 6, que $\overline{BD} + \overline{BE} + \overline{BF} = 6 \overline{CA}$.

2°. Que le produit des quarrés de ces cordes les uns par les autres, vaut le double de la puissance convenable du rayon. Ainsi $\overline{BD} \times \overline{BE} \times \overline{BF} = 2 \overline{CA}^3$, & par consequent $BD \times BE \times BF = CA^3 \times \sqrt{2}$.

Car inscrivant dans le cercle entier un poligone regulier $DEFGHK$, dont le nombre des côtés soit égal au nombre des divisions, à commencer par la premiere D ; & tirant de l'extremité B du diametre AB , à tous les angles de ce poligone, des cordes BD , BK , BE , BH , BF , BG : il est clair que les cordes BD , BK , BE , BH , BF , BG , &c. étant prises deux à deux sont égales entr'elles ; & partant que si l'on applique les articles premier & troisieme du Corollaire precedent à ce cas particulier, on en verra naître ce Theorème.

EXEMPLE XII.

457. **INSCRIRE** dans un cercle donné, un poligone regulier quelconque, dont le nombre des côtés soit donné. FIG. 175.

On peut regarder ce Problème, comme n'étant qu'un cas particulier de l'Exemple precedent. Car si l'on suppose que la corde BR devienne nulle ou zero, il s'ensuit que l'arc AR qu'elle termine deviendra la demie circonference. Or si l'on propose de diviser la circonference entiere en un nombre quelconque de parties égales ; il est évident qu'en divisant la demie circonference dans ce même nombre, & prenant la seconde corde au

H h h iij

FIG. 276.

lieu de la première, elle terminera la première des parties demandées. Par exemple, si l'on divise la demi-circonférence ADB en sept parties égales $AD, DE, EF, FG, GH, HI, IB$; la seconde corde BE terminera l'arc AE qui est la septième partie de la circonférence entière. D'où l'on voit qu'en égalant à zéro le rang parallèle de la Table qui surpasse d'une unité le nombre des côtés du polygone, on formera une égalité dont la plus grande des racines x exprimera la valeur de la corde BD qui termine l'arc AD moitié de l'arc cherché AE . Mais * $CB(1). BD(x) :: BD(x). BE \rightarrow BA$, & par conséquent si l'on nomme la seconde corde BE , z ; on aura $xx = z + 1$. Si donc l'on fait évanouir par le moyen de cette égalité l'inconnue x dans la précédente, on en formera une nouvelle dont la plus grande racine z exprimera la corde BE qui termine l'arc cherché AE . Ainsi dans notre exemple, en égalant à zéro le huitième rang parallèle & divisant par x , je trouve cette égalité $x^6 - 7x^4 + 14xx - 7 = 0$, dans laquelle mettant à la place de xx sa valeur $z + 1$, à la place de x^4 le carré de cette valeur &c. je la change en cette autre $z^3 - 2z - 1 = 0$, dont la plus grande des racines z exprime la valeur de la corde BE qui termine l'arc AE septième partie de la circonférence entière.

* Art. 442.

Voici maintenant une manière générale de trouver immédiatement toutes ces égalités lorsque le nombre des côtés du polygone est impair qui est le seul cas nécessaire; puisque s'il étoit pair, on le réduiroit toujours en le divisant par 2, autant de fois qu'il seroit possible, en un nombre impair dans lequel ayant partagé la circonférence, on auroit par la bisection d'une des parties égales, réitérée autant qu'il seroit nécessaire, l'arc qu'on demande.

Soit construite une Table dans laquelle le premier rang parallèle étant 1, & le second $z - 1$; le troisième $zz - z - 1$ soit égal au produit du second par z , moins le premier; le quatrième $z^3 - 2z - 1$ soit égal au pro-

duit du troisième par z , moins le second ; & ainsi à l'infini. Soit formée une égalité dont l'un des membres étant zero, l'autre soit le rang parallele de la Table , qui ait pour exposant la plus grande moitié du nombre des côtés du polygone. Je dis que la plus grande des racines z de cette égalité , terminera un arc qui aura pour corde, le côté cherché du polygone.

1 ^{er} 1		<i>Table pour l'inscription des polygones reguliers dans le cercle.</i>	
2 ^e	$z - 1$		
3 ^e	$z^2 - z - 1$		
4 ^e	$z^3 - z^2 - 2z + 1$		
5 ^e	$z^4 - z^3 - 3z^2 + 2z + 1$		
6 ^e	$z^5 - z^4 - 4z^3 + 3z^2 + 3z - 1$		
7 ^e	$z^6 - z^5 - 5z^4 + 4z^3 + 6z^2 - 3z - 1$		
8 ^e	$z^7 - z^6 - 6z^5 + 5z^4 + 10z^3 - 6z^2 - 4z + 1$		
9 ^e	$z^8 - z^7 - 7z^6 + 6z^5 + 15z^4 - 10z^3 - 10z^2 + 4z + 1$		
10 ^e	$z^9 - z^8 - 8z^7 + 7z^6 + 21z^5 - 15z^4 - 20z^3 + 10z^2 + 5z - 1$		

Qu'il faille , par exemple , inscrire dans un cercle un heptagone. Je prends le quatrième rang parallele de la Table , parce que 4 est la plus grande moitié de 7 , & l'égalant à zero j'ai $z^4 - z^3 - 3z^2 + 2z + 1 = 0$, dont la plus grande racine z exprimera la valeur de la corde BE , qui termine l'arc AE septième partie de la circonference entiere ; pour le prouver.

Soit un arc de cercle AR moindre que la demie circonference divisé en un nombre quelconque impair , de parties égales aux points D, E, F, G &c : & soient menées de l'extrémité B du diametre BA , les cordes BD, BE, BF, BG &c , jusqu'à la dernière BR . Ayant pris l'arc AS égal à l'arc AD , soit tirée la corde BS , & soient nommées la premiere corde BD ou BS , x ; & la seconde BE , z . Cela posé , on aura selon le Lemme $CB(1)$. $BE(z) :: BD(x)$. $BF + BS$. Et par consequent $BF = xz - x$. De même $CB(1)$. $BE(z) :: BF$. $BD + BH$. Et par consequent $BH = zBF - BD$; de

FIG. 175.

même encore $CB (1)$. $BE (2) :: BH$. $BF + BR$, & partant $BR = 2BH - BF$: c'est-à-dire, que la cinquième corde BH est égale au produit de la troisième BF par 2, moins la première BD ; que la septième BR est égale au produit de la cinquième BH par 2, moins la troisième BF ; & ainsi à l'infini de toutes les cordes impaires. D'où l'on voit que si l'on construit une Table dont le premier rang étant x , & le second $xz - x$; le troisième $xz^2 - xz - x$ soit égal au produit du second par z , moins le premier ; le quatrième $xz^3 - xz^2 - 2xz + 1$ soit égal au produit du troisième par z moins le second ; & ainsi à l'infini : les rangs de cette Table exprimeront par ordre toutes les cordes impaires BD, BF, BH, BR , de l'arc AR . Or les rangs de cette Table n'étant autres que ceux de la précédente multipliez chacun par x , il s'en suit qu'en supposant que la dernière corde BR devienne nulle ou zero (ce qui arrive lorsque l'arc AR devient la demie circonference,) & faisant ce qu'on vient de prescrire, on aura une égalité dont l'inconnue z exprimera la seconde corde BE qui termine l'arc AE qui est contenu autant de fois dans la circonference entière, que l'arc AD qui en est la moitié, l'est dans la demie circonference.

Fig. 276.

Il faut remarquer 1°. Que les égalités qu'on trouve de cette manière sont les plus simples qu'il est possible, lorsque le nombre des côtés du polygone est un nombre premier : mais que lorsqu'il est composé de deux ou de plusieurs nombres premiers, il faudra diviser d'abord la circonference entière en autant de parties égales que le plus grand de ces nombres a d'unités, & ensuite une de ces parties en autant de parties égales que l'un des nombres restans a d'unités, & continuer jusqu'à ce que tous les nombres premiers qui composent le nombre donné des côtés du polygone soient épuisés. 2°. Qu'entre les cordes qui partent du point B , & qui sont renfermées dans la demie circonference AEB , les impaires à commencer par la plus grande BE sont les racines vraies,

vraies, & les paires les fausses des égalités qu'on trouve par cette methode : ainsi les cordes BE , BI , sont les deux racines vraies de l'égalité $z' - 2z - 2z + 1 = 0$, & la corde BG en est la fausse. 3°. Qu'entre les racines de ces sortes d'égalités, la plus petite est la corde d'un arc qui est la moitié de celui qu'on cherche : c'est à-dire dans cet exemple, que la plus petite racine BI de l'égalité $z' - 2z - 2z + 1 = 0$, est la corde d'un arc BI qui est la quatorzième partie de la circonference.

REMARQUE.

458. IL est visible dans cette dernière Table, que tous les termes du premier & du second rang perpendiculaire ont chacun pour coefficient l'unité ; que ceux du troisième & du quatrième rang ont pour coefficients les nombres naturels 1, 2, 3, 4 &c, qui se forment par l'addition continue des unités ; que ceux du cinquième & du sixième rang ont pour coefficients les nombres triangulaires 1, 3, 6, 10 &c qui se forment par l'addition continue des nombres naturels ; que ceux du septième & du huitième rang ont pour coefficients les nombres pyramidaux 1, 4, 10 &c, qui se forment par l'addition continue des triangulaires ; & ainsi à l'infini de deux en deux des nombres d'un ordre supérieur qui se forment par l'addition continue de ceux du dernier ordre.

LEMME I.

459. S'IL y a sur un demi cercle AEB deux arcs égaux **FIG. 277.**
 AD , EF , dont l'un AD ait son commencement en l'une des extrémités A du diamètre AB , & l'autre EF soit pris par tout où l'on voudra ; & qu'on tire les cordes BD , BE , BF , & AD , AE , AF : je dis, 1°. Que $AB \times BF = BD \times BE - AD \times AE$. 2°. Que $AB \times AF = BD \times AE + AD \times BE$.

Car les trois triangles rectangles ADG (le point G est ici le point d'intersection des cordes BD , AF), AEB ;

Iii

BFG sont semblables entr'eux ; puisque l'angle AGD ou BGF ayant pour mesure la moitié des deux arcs BF , AD , est égal à l'angle BAE qui a aussi pour mesure la moitié des deux arcs BF , AE , ou AD . Si donc l'on nomme le diamètre AB , 1 ; les cordes BD , x ; AD , y ; BE , v ; AE , z ; on aura 1°. $BE(v).EA(z)::AD(y).DG=\frac{yz}{v}$, & partant BG ou $BD-DG=x-\frac{yz}{v}$. 2°. $AB(1).BE(v)::BG(x-\frac{yz}{v}).BF=vx-yz$ c'est à dire (puisque $AB=1$) que $AB \times BF = BD \times BE - AD \times AE$. Ce qu'il falloit demontrer en premier lieu.

Maintenant $BE(v).BA(1)::AD(y).AG=\frac{y}{v}$. Et $AB(1).AE(z)::BG(x-\frac{yz}{v}).GF=xz-\frac{yz^2}{v}$; & partant $AG+GF$ ou $AF=xz-\frac{yz^2}{v}+\frac{y}{v}=xz+\frac{y}{v}$, puisqu'à cause du triangle rectangle AEB on trouve $1-zz=vv$; c'est à dire que AF ou $AB \times AF = BD \times AE + AD \times BE$. Et c'est ce qui restoit à démontrer.

LEMME II.

460. *SOIT formée une Table, dont le premier rang parallele étant composé de deux parties x & y , tous les autres le soient aussi selon cette regle ; la premiere partie de tel rang parallele qu'on voudra, vaut la premiere partie du rang parallele qui le precede immédiatement, multipliée par x , moins la seconde partie du même rang multipliée par y : & la seconde partie vaut la même premiere partie multipliée par y , plus la même seconde multipliée par x . Soit de plus un arc de cercle quelconque AR moindre que la demie circonference divisé en autant de parties égales qu'on voudra, aux points D, E, F, G , &c. Je dis que si le diamètre $AB=1$, & les deux premieres cordes $BD=x$, $AD=y$; toutes les autres cordes BE, BF, BG &c, seront exprimées par les premieres parties du deuxième, troisième, quatrième, &c. rang parallele, &*

FIG. 278.

les autres cordes correspondantes AE , AF , AG , &c, par les secondes parties des mêmes rangs. Ainsi BG étant la quatrième corde, vaut la première partie $x^4 - 6yyxx + y^4$ du quatrième rang parallele, & sa correspondante AG vaut la seconde partie $4yx^3 - 4y^3x$ du même rang.

1 ^e	x	y
2 ^e	$xx - yy$	$2yx$
3 ^e	$x^3 - 3yyx$	$3yx^2 - y^3$
4 ^e	$x^4 - 6yyxx + y^4$	$4yx^3 - 4y^3x$
5 ^e	$x^5 - 10yyx^3 + 5y^4x$	$5yx^4 - 10y^3xx + y^5$
6 ^e	$x^6 - 15yyx^4 + 15y^4xx - y^6$	$6yx^5 - 10y^3x^3 + 6y^5x$
7 ^e	$x^7 - 21yyx^5 + 15y^4x^3 - 7y^6x$	$7yx^6 - 35y^3x^4 + 21y^5xx - x^7$

Car il est clair selon le Lemme precedent que le produit d'une corde quelconque BF par la première corde BD (x), moins le produit de la corde correspondante AF , par l'autre première corde AD (y) exprime la valeur de la corde BG qui suit immédiatement BF ; & aussi que la corde AG vaut $BI * AD$ (y) $+ AF * BD$ (x). Donc &c.

COROLLAIRE.

461. S, l'on ajoûte ensemble les deux parties de chaque rang parallele de la Table precedente, en mettant par ordre tous les termes qui les composent selon les differens degrez des puissances de x , on formera cette nouvelle Table qui contiendra par ordre les termes de toutes les puissances du binome $x + y$: en observant que le premier & le second terme doivent être pris affirmativement, le troisième & le quatrième négativement, & ainsi alternativement de deux en deux jusqu'au dernier. Ainsi le troisième rang parallele contiendra $x^3 + 3yx^2 - 3yyx - y^3$; c'est-à-dire le cube du binome $x + y$, dont on prend les deux premiers termes affirmativement, & les deux derniers négativement: de même le cinquième rang parallele contiendra $x^5 + 5yx^4 - 10yyx^3 - 10y^3xx + 5y^4x + y^5$, qui est la cinquième

puissance du binome $x + y$, dont le premier & le second terme sont pris affirmativement, le troisième & le quatrième négativement, le cinquième & le sixième affirmativement; & il en est ainsi de tous les autres rangs à l'infini.

$$\begin{array}{lcl}
 1^{\text{er}} & x & + y \\
 2^{\text{e}} & xx + 2xy & - yy \\
 3^{\text{e}} & x^3 + 3xx - 3yyx & - y^3 \\
 4^{\text{e}} & x^4 + 4x^3 - 6xyx^2 - 4y^2x & + y^4 \\
 5^{\text{e}} & x^5 + 5x^4 - 10xyx^3 - 10y^2xx + 5y^3x & + y^5 \\
 6^{\text{e}} & x^6 + 6x^5 - 15xyx^4 - 20y^2x^3 + 15y^3xx + 6y^4x & - y^6 \\
 7^{\text{e}} & x^7 + 7yx^6 - 21yyx^5 - 35y^2x^4 + 35y^3x^3 + 21y^4xx - 7y^5x & - y^7
 \end{array}$$

Car si l'on fait attention à la manière dont la Table précédente est formée, on verra que tous les termes de chacun de ses rangs parallèles sont formés par ceux du rang parallèle qui le précède, multiples par x & par y , & joints par des signes $+$ & $-$, en telle sorte que les termes des deux parties qui composent chaque rang, étant mis par ordre, selon les différens degrés de l'inconnue x , il y a de suite deux signes $+$, & après deux signes $-$; & ainsi alternativement jusqu'au dernier.

REMARQUE.

462. IL est visible dans cette dernière Table, que tous les termes du premier rang perpendiculaire, ont chacun pour coefficient l'unité, que ceux du second rang ont pour coefficients les nombres naturels 1, 2, 3, 4, &c, qui se forment par l'addition continue des unités; que ceux du troisième rang ont pour coefficients les nombres triangulaires 1, 3, 6, 10, &c, qui se forment par l'addition continue des nombres naturels; que ceux du quatrième rang ont pour coefficients les nombres pyramidaux 1, 4, 10, 20, &c, qui se forment par l'addition continue des triangulaires; & ainsi à l'infini de rang en rang en avançant vers la droite, les nombres d'un

ordre supérieur, se forment par l'addition continue de ceux de l'ordre immédiatement précédent.

EXEMPLE XIII.

463. UN arc de cercle AR étant donné ; le divi- FIG. 178.
ser en autant de parties égales qu'on voudra, aux points
 D, E, F, G &c ; par une méthode différente de celle de
l'Exemple dixième.

Ayant nommé le diamètre $AB, 1$; les cordes données BR, a ; AR, b ; qui terminent l'arc donné AR ; & les cordes inconnues BD, x ; AD, y ; qui terminent l'arc cherché AD ; on élèvera le binôme $x + y$ à une puissance dont l'exposant soit égal au nombre des divisions. On formera deux égalités, dont la première aura pour l'un de ses membres la donnée a , & pour l'autre tous les termes impairs de la puissance de $x + y$, joints par des signes $+$ & $-$ alternatifs ; & la seconde aura pour l'un de ses membres la donnée b , & pour l'autre tous les autres termes de la même puissance du binôme $x + y$, joints encore ensemble par des signes alternatifs $+$ & $-$. On fera évanouir l'une ou l'autre des inconnues x ou y , par le moyen de l'égalité $xx = 1 - yy$ ou $yy = 1 - xx$, qui se tire du triangle ADB rectangle en D : ce qui donnera enfin une dernière égalité où il n'y aura qu'une seule inconnue x ou y , dont la résolution fournira la valeur de cette inconnue BD ou AD qui termine l'arc cherché AD .

Qu'il faille, par exemple, diviser l'arc cherché AR en sept parties égales aux points D, E, F, G, H, I . Je prends la septième puissance $x^7 + 7yx^6 + 21yyx^5 + 35y^2x^4 + 35y^3x^3 + 21y^4xx + 7y^5x + y^7$ du binôme $x + y$, de laquelle je forme les deux égalités $a = x^7 - 21yyx^5 + 35y^2x^3 - 7y^4x$, & $b = 7yx^6 - 35y^2x^4 + 21y^3x^2 - y^7$. Et faisant évanouir dans la première de ces deux égalités l'inconnue y , ou dans la seconde l'inconnue x , par le moyen de l'égalité $yy = 1 - xx$ ou $xx = 1 - yy$,

je forme l'une de ces deux nouvelles égalités $a = 64x^7 - 112x^5 + 56x^3 - 7x$ ou $b = 7y - 56y^3 + 112y^5 - 63y^7$, qui ne renferme plus qu'une seule inconnue, & dont la résolution qui se fera selon les regles du Livre precedent, fournira pour l'une de ses racines x ou y , une valeur BD ou AD qui servira à déterminer la premiere des parties égales demandées. Tout cela est une suite des deux articles precedens.

Il est à remarquer que si l'arc AR étoit plus grand que la demie circonference, celle des deux égalités precedentes qui a pour l'un de ses membres $+b$ sert également sans y rien changer, mais dans l'autre il faut changer le membre $+a$ en $-a$; dont la raison est que la corde BR (a) passant de l'autre côté du point B devient negative de positive qu'elle étoit, au lieu que la corde AR ne repassant point de l'autre côté du point A demeure toujours positive.

L E M M E I.

464. *QUE dans un quarré quelconque de cellules on remplisse de la lettre a, toutes les cellules du premier rang parallele; de la lettre b, toutes les cellules du premier rang perpendiculaire, excepté la premiere; & ensuite toutes les autres cellules par le moyen de cette regle; c'est à sçavoir qu'une cellule doit toujours être égale à celle qui est au dessus plus à celle qui est à gauche: de cette sorte on aura le quarré de cellules qu'on voit ici. Or cela posé;*

	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.
1.	a	a	a	a	a	a	a
2.	b	$a+b$	$2a+b$	$3a+b$	$4a+b$	$5a+b$	$6a+b$
3.	b	$a+2b$	$3a+3b$	$6a+4b$	$10a+5b$	$15a+6b$	$21a+7b$
4.	b	$a+3b$	$4a+6b$	$10a+10b$	$20a+15b$	$35a+21b$	$56a+28b$
5.	b	$a+4b$	$5a+10b$	$15a+20b$	$35a+35b$	$70a+56b$	$126a+84b$
6.	b	$a+5b$	$6a+15b$	$21a+35b$	$56a+70b$	$126a+126b$	$252a+210b$
7.	b	$a+6b$	$7a+21b$	$28a+56b$	$84a+126b$	$210a+252b$	$462a+462b$

Je dis qu'une cellule quelconque est égale à la cellule qui est

à gauche plus à toutes celles qui sont au dessus : c'est à dire, par exemple, que la quatrième cellule $4a + 6b$ du troisième rang perpendiculaire, est égale à la cellule $a + 3b$ qui est à gauche, & qui par conséquent est la quatrième du second rang perpendiculaire, plus à toutes les autres $a + 2b$, $a + b$, a , qui sont au dessus d'elle dans ce second rang.

Car supposant que a, c, d, e , expriment les quatre premières cellules du second rang perpendiculaire, & a, f, g, h , les quatre premiers du troisième rang, on aura par la formation du quarré de cellules $h = e + g$, $g = d + f$, $f = c + a$, & partant $h = e + d + c + a$; ce qu'il falloit prouver. Or il est visible que cette démonstration se peut appliquer à tel nombre de cellules qu'on voudra de deux rang, perpendiculaires voisins. Donc &c.

COROLLAIRE.

465. PUISQUE toutes les cellules excepté celles du premier rang parallèle & celle du premier rang perpendiculaire, sont composées de deux termes dans le premier desquels se trouve la lettre a , & dans le second la lettre b ; il s'ensuit 1°. Que le terme où se trouve la lettre a , est égal au terme où se trouve la même lettre a dans la cellule gauche, plus à tous les termes où elle se rencontre dans les cellules qui sont au dessus de celle-ci. 2°. Que le terme où se trouve la lettre b , est égal au terme où se trouve la même lettre b dans la cellule à gauche, plus à tous ceux où elle se trouve dans les cellules qui sont au dessus. Ainsi le terme $15a$ de la cinquième cellule du quatrième rang perpendiculaire, est égal au terme $5a$ de la cellule à gauche, plus aux termes $4a, 3a, 2a, 1a$, qui se trouvent dans les cellules qui sont au dessus de celle-ci; & de même $20b$ est égal au terme $10b$ de la cellule à gauche, plus aux termes $6b, 3b, 1b$, de toutes les cellules qui sont au dessus.

LEMME II.

466. *Si l'on multiplie le terme où se trouve la lettre a dans une cellule quelconque, par la somme des exposans de son rang parallele & de son rang perpendiculaire moins 1, & qu'on divise le produit par l'exposant de son rang perpendiculaire moins 1, je dis que le quotient sera égal à ce terme plus à tous ceux qui sont au dessus de lui : c'est à dire, par exemple, que si l'on multiplie le terme 15a de la cinquième cellule du quatrième rang perpendiculaire par $5 + 4 - 1 = 8$, & qu'on divise le produit par $4 - 1 = 3$; le quotient 35a sera égal au terme 15a plus à tous les autres 10a, 6a, 3a, 1a, qui sont au dessus de lui.*

Cela est visible dans toutes les cellules du deuxième rang perpendiculaire, puisqu'elles contiennent toutes le même terme 1a. Or je vais démontrer que supposé que cette propriété se rencontre dans un rang perpendiculaire quelconque, elle se trouve nécessairement dans celui qui est à droit; d'où il suivra que puisqu'elle se trouve dans le deuxième rang perpendiculaire, elle sera aussi dans le troisième, que puisqu'elle se rencontre dans le troisième, elle sera aussi dans le quatrième, & ainsi de suite à l'infini. Pour le prouver.

Soient a, c, d, e, f &c, autant de termes qu'on voudra de ceux où se trouve la lettre a , dans un rang perpendiculaire quelconque à commencer par le premier; a, g, h, k, l , &c un pareil nombre de termes du rang qui est à droit à commencer aussi par le premier. Soit de plus m égale à la somme des exposans moins 1 des rangs perpendiculaire & parallele de la cellule où se trouve le terme f ; & r égale à l'exposant moins 1 du rang perpendiculaire de cette cellule. Par la suppo-

* Art. 464. sition $\frac{m}{r}f = f + e + d + c + a = l$, $\frac{m-1}{r}e = e + d + c + a = k$, $\frac{m-2}{r}d = d + c + a = h$, $\frac{m-3}{r}c = c + a = g$, $\frac{m-4}{r}a = a$. Donc $l + k + h + g + a = \frac{m}{r}f +$

$+ \frac{m-1}{r} e + \frac{m-2}{r} d + \frac{m-3}{r} c + \frac{m-4}{r} a = \frac{m}{r} * f + e + d + c$
 $+ a, -\frac{1}{r} * 1e + 2d + 3c + 4a = \frac{m}{r} l, -\frac{1}{r} * k + b + g$
 $+ a$ en mettant pour $f + e + d + c + a$ sa valeur l , &
 pour $1e + 2d + 3c + 4a$ sa valeur $k + b + g + a$: trans-
 posant d'une part l & de l'autre $-\frac{1}{r} * k + b + g + a$, on
 aura $\frac{r+1}{r} * k + b + g + a = \frac{m-r}{r} l$: multipliant de part &
 d'autre par r , divisant par $r+1$; & ajoutant de part &
 d'autre l , il vient enfin $\frac{m+1}{r+1} l = l + k + b + g + a$. Mais
 comme le rang perpendiculaire de la cellule où se trouve l ,
 surpasse d'une unité celui de la cellule où se trouve f , &
 que leur rang parallele demeure le même; il est évident
 que la propriété marquée pour chaque terme où se trouve
 la lettre a dans un rang perpendiculaire quelconque, con-
 vient aussi au terme l du rang perpendiculaire qui est à
 droit. De plus puisque cette démonstration subsiste égale-
 ment tel que puisse être le nombre de termes des deux
 rangs perpendiculaires voisins, il s'ensuit que ce que l'on
 vient de montrer par rapport au terme l , sera vrai aussi à
 l'égard de tout autre de son rang perpendiculaire.

Si l'on suppose à présent que n exprime en general
 l'exposant d'un rang parallele quelconque autre que le
 premier, on verra que la premiere cellule de ce rang ne
 renferme aucun terme où la lettre a se rencontre; que
 la seconde renferme toujours $1a$; que si l'on multiplie
 $1a$ par $\frac{n+2-1}{2-1} = \frac{n}{1}$, on aura $\frac{n}{1} a$ pour le terme où se
 trouve la lettre a dans la troisième cellule; & de même
 que si l'on multiplie $\frac{n}{1} a$ par $\frac{n+3-1}{3-1} = \frac{n+1}{2}$, on aura
 $\frac{n}{1} a * \frac{n+1}{2}$ pour le terme où se trouve a dans la quatrié-
 me cellule: de sorte que cette suite $0, 1a, \frac{n}{1} a, \frac{n}{1} * \frac{n+1}{2} a,$
 $\frac{n}{1} * \frac{n+1}{2} * \frac{n+1}{3} a, \frac{n}{1} * \frac{n+1}{2} * \frac{n+2}{3} * \frac{n+3}{4} a$ &c, exprimera

par ordre tous les termes où se trouve la lettre a , dans les cellules du rang parallele dont n est l'exposant. Ainsi si $n = 5$, la suite $0, 1a, 5a, 15a, 35a$ &c, exprimera par ordre tous les termes où se trouve la lettre a dans les cellules du cinquième rang parallele.

L E M M E III.

467. *Si l'on multiplie le terme où se trouve la lettre b dans une cellule quelconque, par la somme des exposans de son rang parallele & de son rang perpendiculaire moins 2, & qu'on divise le produit par l'exposant de son rang perpendiculaire ; je dis que le quotient sera égal à ce terme plus à tous ceux qui sont au dessus de lui : c'est à dire, par exemple, que si l'on multiplie le terme $10b$ de la cinquième cellule du troisième rang perpendiculaire par $5 + 3 - 2 = 6$, & qu'on divise le produit par 3, on aura $20b$ pour la somme du terme $10b$, & de tous les autres $6b, 3b, 1b$, qui sont au dessus de lui :*

Il est visible que cette propriété se rencontre dans le premier rang perpendiculaire où toutes les cellules renferment la même valeur $1b$, excepté la première dans laquelle la lettre b ne se rencontre point. Or de cela seul l'on prouvera comme l'on vient de faire dans le Lemme precedent à l'égard des termes qui sont multiples de a , qu'elle se doit rencontrer dans le second rang perpendiculaire, dans le troisième, dans le quatrième, & ainsi dans tous les autres à l'infini. D'où l'on conclura que si n designe l'exposant d'un rang parallele quelconque autre que le premier ; la suite $1b, \frac{n-1}{1}b, \frac{n-1}{1} \times \frac{n}{2}b, \frac{n-1}{1} \times \frac{n}{2} \times \frac{n+1}{3}b, \frac{n-1}{1} \times \frac{n}{2} \times \frac{n+1}{3} \times \frac{n+2}{4}b$ &c, exprimera par ordre tous les termes où se trouve la lettre b dans les cellules du rang parallele dont n est l'exposant. Ainsi si $n = 5$, la suite $1b, 4b, 10b, 20b, 35b$, &c, exprimera par ordre tous les termes où se trouve b dans le cinquième rang parallele.

COROLLAIRE.

468. Il suit de ces deux derniers Lemmes, que si l'on ajoute par ordre tous les termes de cette suite à ceux de la précédente, on en formera une, $1b, 1a, + \frac{n-1}{1}b, \frac{n}{1}a + \frac{n-1}{1} \times \frac{n}{2}b, \frac{n}{1} \times \frac{n+1}{2}a + \frac{n-1}{1} \times \frac{n}{2} \times \frac{n+1}{3}b, \frac{n}{2} \times \frac{n-1}{2} \times \frac{n+1}{3}a + \frac{n-1}{1} \times \frac{n}{2} \times \frac{n+1}{3} \times \frac{n+2}{4}b, \&c$; ou en abregéant l'expression, $b, a + \frac{n-1}{1}b, a + \frac{n-1}{2}b \times \frac{n}{1}, a + \frac{n-1}{3}b \times \frac{n}{1} \times \frac{n+1}{2}, a + \frac{n-1}{4}b \times \frac{n}{1} \times \frac{n+1}{2} \times \frac{n+2}{3} \&c$. qui exprimera par ordre toutes les cellules du rang parallele de la Table dont n est l'exposant.

D'où l'on voit que par le moyen de cette suite, on peut trouver tout d'un coup telle cellule qu'on voudra, les exposans de son rang parallele & perpendiculaire étant donnés; puisque prenant dans la suite generale le terme qui répond à l'exposant du rang perpendiculaire, c'est-à-dire, le quatrième terme, si le rang perpendiculaire est le quatrième, le cinquième, s'il est le cinquième &c, & mettant dans ce terme à la place de n l'exposant du rang parallele, on aura la cellule que l'on cherche. Que l'on demande, par exemple, la cinquième cellule du quatrième rang perpendiculaire; ayant mis dans le quatrième terme $a + \frac{n-1}{3}b \times \frac{n}{1} \times \frac{n+1}{2}$, à la place de n l'exposant 5 du rang parallele de la cellule on trouvera $a + \frac{4}{3}b \times 15$, c'est-à-dire, $15a + 20b$ pour cette cellule; & il en est ainsi de toutes les autres.

LEMMES IV.

469. Si l'on fait $a=2$ & $b=1$ dans le quarré de cellules de l'article 464, on le changera en celui-ci; duquel je dis que le premier rang parallele contient de suite le premier terme de tous les rangs perpendiculaires de la Table de l'article 443; le second rang parallele, les seconds termes; le troisieme

K k k ij

rang, les troisièmes termes ; & ainsi de suite à l'infini.

	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.
1.	2	2	2	2	2	2	2
2.	1	3	5	7	9	11	13
3.	1	4	9	16	25	36	49
4.	1	5	14	30	55	91	140
5.	1	6	20	50	105	196	336
6.	1	7	27	77	182	378	714
7.	1	8	35	112	294	672	1386

Cela est une suite naturelle de l'article 445, & de la formation du quarré de cellules de l'article 464, expliquée dans ce même article & dans le suivant 465.

COROLLAIRE.

470. Si l'on fait $b = 1$ & $a = 1$ dans la suite générale de l'article 468. b , $a + \frac{n-1}{1}b$, $a + \frac{n-1}{2}b \times \frac{n}{1}$, $a + \frac{n-1}{3}b \times \frac{n}{1} \times \frac{n+1}{2}$, $a + \frac{n-1}{4}b \times \frac{n}{1} \times \frac{n+1}{2} \times \frac{n+2}{3}$ &c ; on la changera en cette autre 1, $\frac{n+1}{1}$, $\frac{n+1}{2} \times \frac{n}{1}$, $\frac{n+1}{3} \times \frac{n}{1} \times \frac{n+1}{2}$, $\frac{n+1}{4} \times \frac{n}{1} \times \frac{n+1}{2} \times \frac{n+2}{3}$ &c, par le moyen de laquelle on trouvera tout d'un coup le coefficient de tel terme qu'on voudra de la Table de l'article 443, son rang perpendiculaire & le quantième qu'il y occupe étant donnés. Voici la règle.

On prendra dans cette suite le terme qui répond au rang perpendiculaire donné, c'est à-dire le troisième, si c'est le troisième rang, le quatrième, si c'est le quatrième &c ; & ayant mis dans ce terme à la place de n le nombre qui expose le quantième du terme dans son rang perpendiculaire, c'est à-dire 4 s'il est le quatrième, 5, s'il est le cinquième &c, on aura le coefficient qu'on cherche. Si l'on demande, par exemple, le coefficient du quatrième terme 14 \times du troisième rang perpendiculaire

laire ; on mettra dans le troisième terme $\frac{n+3}{2} \times \frac{n}{1}$ à la place de n le nombre 4, & l'on aura 14 pour le coefficient cherché.

Car l'exposant du rang perpendiculaire du coefficient pris dans la Table de l'article 443, est le même que l'exposant du rang perpendiculaire du carré de cellules de l'article précédent ; & le quantième que ce coefficient occupe dans son rang perpendiculaire, est l'exposant du rang parallèle du carré de cellules. D'où l'on voit que cette règle n'est qu'une application de celle de l'article 468, à ce cas particulier où $a = 2$ & $b = 1$.

L E M M E V.

471. *Si l'on met 1 à la place de b, dans le carré de cellules de l'article 464 ; on le changera en celui-ci, dont je dis que les rangs perpendiculaires contiennent par ordre tous les nombres qu'on appelle Figurés : sçavoir le premier rang les nombres du premier ordre qui sont les unités, le second rang les nombres naturels ou du second ordre qui se forment par l'addition continue des unités, le troisième rang les nombres triangulaires ou du troisième ordre qui se forment par l'addition continue des naturels, le quatrième les nombres pyramidaux ou du quatrième ordre qui se forment par l'addition continue des triangulaires, & ainsi à l'infini.*

	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.
1.	1	1	1	1	1	1	1
2.	1	2	3	4	5	6	7
3.	1	3	6	10	15	21	28
4.	1	4	10	20	35	56	84
5.	1	5	15	35	70	126	210
6.	1	6	21	56	126	252	462
7.	1	7	28	84	210	462	924

Car selon le même article 464, chaque cellule est

K k k iij

égale à celle qui est à gauche, plus à toutes les autres qui sont au dessus.

M. Paschal a fait un Traité qui a pour titre Triangle Arithmetique, dans lequel il considère les propriétés de ces nombres, & fait voir qu'ils sont d'un très grand usage dans plusieurs questions d'Arithmetique.

COROLLAIRE.

472. Si l'on fait $a = 1$ & $b = 1$ dans la suite generale de l'article 468. $b, a + \frac{n-1}{1}b, a + \frac{n-1}{2}b \times \frac{n}{1}, a + \frac{n-1}{3}b \times \frac{n}{1} \times \frac{n+1}{2}, a + \frac{n-1}{4}b \times \frac{n}{1} \times \frac{n+1}{2} \times \frac{n+2}{3}$ &c ; on changera en cette autre $1, n, \frac{n}{1} \times \frac{n+1}{2}, \frac{n}{1} \times \frac{n+1}{2} \times \frac{n+2}{3}, \frac{n}{1} \times \frac{n+1}{2} \times \frac{n+2}{3} \times \frac{n+3}{4}$ &c, qui servira à trouver tout d'un coup tel nombre figuré qu'on voudra, son ordre étant donné avec le quantième qu'il y occupe. Voici comment.

On prendra dans cette dernière suite le terme qui répond à l'ordre donné, c'est à-dire le troisième, si c'est le troisième ordre, le quatrième, si c'est le quatrième ordre &c ; & ayant mis à la place de n le nombre qui expose le quantième du nombre figuré, c'est à-dire 4, s'il doit être le quatrième, 5, s'il doit être le cinquième &c, on aura ce nombre. Qu'il faille, par exemple, trouver le cinquième nombre du quatrième ordre ; je mets dans le quatrième terme $\frac{n}{1} \times \frac{n+1}{2} \times \frac{n+2}{3}$ de la suite à la place de n le nombre 5, & j'ai 35 pour le nombre cherché.

Ceci n'est autre chose que l'application de la règle de l'article 468. à ce cas particulier.

PROBLÈME I.

473. SOIT proposé de trouver une suite generale, qui exprime par ordre tous les termes d'un rang parallele quelconque, de la Table de la division des arcs de l'article 443.

Comme le troisième terme d'un rang perpendiculaire quelconque de cette Table, répond toujours au premier du rang qui est à droit; il s'en suit que si $m+1$ exprime en general l'exposant du rang parallele, il faudra trouver dans le premier rang perpendiculaire, le coefficient du terme dont le quantième est $m+1$; dans le deuxième, le coefficient du terme dont le quantième est $m+1-2$ ou $m-1$; dans le troisième, le coefficient du terme dont le quantième est $m-1-2$ ou $m-3$, & ainsi de suite en diminuant toujours de 2 le quantième du terme, à mesure que le rang perpendiculaire avance vers la droite. Il faudra donc selon la regle de l'article 470. mettre dans le second terme $\frac{n+1}{1}$

à la place de n le nombre $m-1$; dans le troisième terme $\frac{n+1}{2} \times \frac{n}{1}$ à la place de n le nombre $m-3$, dans le quatrième terme $\frac{n+1}{3} \times \frac{n+1}{2}$ à la place de n le nombre $m-5$; dans le cinquième $\frac{n+1}{4} \times \frac{n}{1} \times \frac{n+1}{2} \times \frac{n+1}{3}$ à la place de n le nombre $m-7$; &c: ce qui donnera pour la suite des coefficients 1, m , $\frac{m}{2} \times \frac{m-1}{1}$, $\frac{m}{3} \times \frac{m-1}{1} \times \frac{m-2}{2}$, $\frac{m}{4} \times \frac{m-1}{1} \times \frac{m-2}{2} \times \frac{m-3}{3}$, &c.

Or comme les signes des termes d'un rang parallele quelconque de la Table sont toujours alternatifs; & que le premier terme est toujours l'inconnue x élevée à une puissance dont l'exposant est moindre d'une unité que celui du rang parallele; & que tous les autres termes renferment des puissances de x dont les exposans diminuent continuellement de 2, en observant que $x^0 = 1$: il s'en suit qu'on aura

$x^m - m x^{m-1} + \frac{m}{2} \times \frac{m-1}{1} x^{m-2} - \frac{m}{3} \times \frac{m-1}{1} \times \frac{m-2}{2} x^{m-3} + \frac{m}{4} \times \frac{m-1}{1} \times \frac{m-2}{2} \times \frac{m-3}{3} x^{m-4}$ &c, pour l'expression generale du rang parallele de la Table, dont l'exposant est $m+1$. Ce qui étoit proposé.

Lorsqu'on a les premiers termes de ces sortes de suites, il est facile d'observer la loy qui y regne par tout,

& qui sert à les continuer autant que l'on veut. Si l'on suppose, par exemple, dans celle-ci, que r exprime le quantième du terme dont on veut avoir le coefficient; il sera exprimé par la fraction générale $\frac{m \times m - r \times m - r - 1 \times m - r - 2 \text{ \&c.}}{r - 1 \times r - 2 \times r - 3 \times r - 4 \text{ \&c.}}$, en observant que le numérateur & le dénominateur doivent avoir chacun autant de termes, que le nombre $r - 1$ contient d'unités. Ainsi si $r = 5$, on aura pour le coefficient du cinquième terme, la fraction $\frac{m \times m - 5 \times m - 6 \times m - 7}{4 \times 3 \times 2 \times 1}$; si $r = 4$, on aura $\frac{m \times m - 4 \times m - 5}{3 \times 2 \times 1}$.

Il faut remarquer que le nombre des termes de cette suite est toujours déterminé, de sorte qu'il est égal à la plus grande moitié de l'exposant du rang parallèle qu'elle exprime, lorsque cet exposant est impair, & à sa moitié au juste lorsqu'il est pair. Ainsi elle n'a que trois termes, lorsqu'elle exprime le cinquième ou le sixième rang parallèle, elle n'en a que quatre, lorsqu'elle exprime le septième ou le huitième rang parallèle, &c.

PROBLÈME II.

474. *SOIT proposé de trouver une suite générale qui exprime par ordre tous les termes de tel rang parallèle qu'on voudra, de la Table de l'inscription des polygones réguliers de l'article 457.*

- Comme le second terme de chaque rang perpendiculaire répond au premier de celui qui est à droit, il s'ensuit * que si $m - 1$ est l'exposant d'un rang parallèle quelconque de cette Table, les coefficients des quatre premiers termes de ce rang seront 1, 1, $m - 1$, $m - 2$; le coefficient du cinquième terme sera le nombre triangulaire dont le quantième est $m - 3$, c'est à dire * $\frac{m-3}{1}$ * $\frac{m-2}{1}$; celui du sixième rang sera le nombre triangulaire dont le quantième est $m - 4$, c'est à dire $\frac{m-4}{1}$ * $\frac{m-3}{2}$; celui du septième terme sera le nombre pyramidal

midal dont le quantième est $m-5$, c'est à dire $\frac{m-5}{1}$
 $\times \frac{m-4}{2} \times \frac{m-3}{3}$; celui du huitième terme sera le nombre
 pyramidal dont le quantième est $m-6$, c'est à dire,
 $\frac{m-6}{1} \times \frac{m-5}{2} \times \frac{m-4}{3}$; celui du neuvième terme sera le
 nombre du cinquième ordre dont le quantième est
 $m-7$, c'est-à-dire $\frac{m-7}{1} \times \frac{m-6}{2} \times \frac{m-5}{3} \times \frac{m-4}{4}$; & ainsi
 à l'infini. Si donc l'on joint à ces coefficients les puissances
 de z qu'ils affectent, en faisant preceder le second &
 le troisieme terme du signe $-$, le quatrième & le cinquième
 du signe $+$, le sixieme & le septieme du signe $-$, &
 ainsi alternativement de deux en deux; on aura cette
 suite generale $z^m - z^{m-1} - \frac{m-1}{1} z^{m-2} + \frac{m-2}{1} \times \frac{m-3}{2} z^{m-3}$
 $+ \frac{m-3}{1} \times \frac{m-2}{2} z^{m-4} - \frac{m-4}{1} \times \frac{m-3}{2} z^{m-5} - \frac{m-5}{1} \times \frac{m-4}{2}$
 $\times \frac{m-3}{3} z^{m-6} + \frac{m-6}{1} \times \frac{m-5}{2} \times \frac{m-4}{3} z^{m-7} + \frac{m-7}{1} \times \frac{m-6}{2}$
 $\times \frac{m-5}{3} \times \frac{m-4}{4} z^{m-8}$ &c, qui exprime par ordre tous les
 termes du rang parallele de la Table de l'article 457
 dont l'exposant est $m+1$: où l'on doit observer de ne
 prendre qu'autant de termes que le nombre $m+1$ con-
 tient d'unités.

PROBLEME III.

475. **T**ROUVER une suite generale, qui exprime par
 ordre, les coefficients de tous les termes, de tel rang parallele
 qu'on voudra, de la Table de l'article 460; ou (ce qui est la
 même chose) d'une puissance quelconque du binome $x+y$.

Soit en general m l'exposant d'un rang parallele quel-
 conque de cette Table, il est clair que les coefficients
 des deux premiers termes de ce rang seront toujours * * Art. 461.
 $1, m$; comme le second terme de chaque rang perpen-
 diculaire à commencer par le second, répond au pre-
 mier terme du rang qui est à droit, il s'ensuit que le
 coefficient du troisieme terme du rang parallele sera * * Art. 462.

le nombre triangulaire dont le quantième est $m-1$,
 * Art. 472. c'est-à-dire $\frac{m-1}{1} \times \frac{m}{2}$; que celui du quatrième terme
 sera le nombre pyramidal dont le quantième est $m-2$,
 c'est à dire $\frac{m-2}{1} \times \frac{m-1}{2} \times \frac{m}{3}$; que celui du cinquième
 terme sera le nombre du cinquième ordre dont le quan-
 tième est $m-3$, c'est-à-dire $\frac{m-3}{1} \times \frac{m-2}{2} \times \frac{m-1}{3} \times \frac{m}{4}$;
 • & ainsi à l'infini. On aura donc pour la suite générale
 qu'on demande $1, m, \frac{m}{1} \times \frac{m-1}{2}, \frac{m}{1} \times \frac{m-1}{2} \times \frac{m-2}{3}, \frac{m}{1}$
 $\times \frac{m-1}{2} \times \frac{m-2}{3} \times \frac{m-3}{4}$ &c.

COROLLAIRE.

476. D E-L A il suit que $x \mp y^n = x^n \mp \frac{m}{1} y x^{n-1}$
 $+ \frac{m \times m-1}{1 \times 2} y y x^{n-2} \mp \frac{m \times m-1 \times m-2}{1 \times 2 \times 3} y^3 x^{n-3}$
 $+ \frac{m \times m-1 \times m-2 \times m-3}{1 \times 2 \times 3 \times 4} y^4 x^{n-4} \mp \frac{m \times m-1 \times m-2 \times m-3 \times m-4}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5}$
 $y^5 x^{n-5}$ &c.

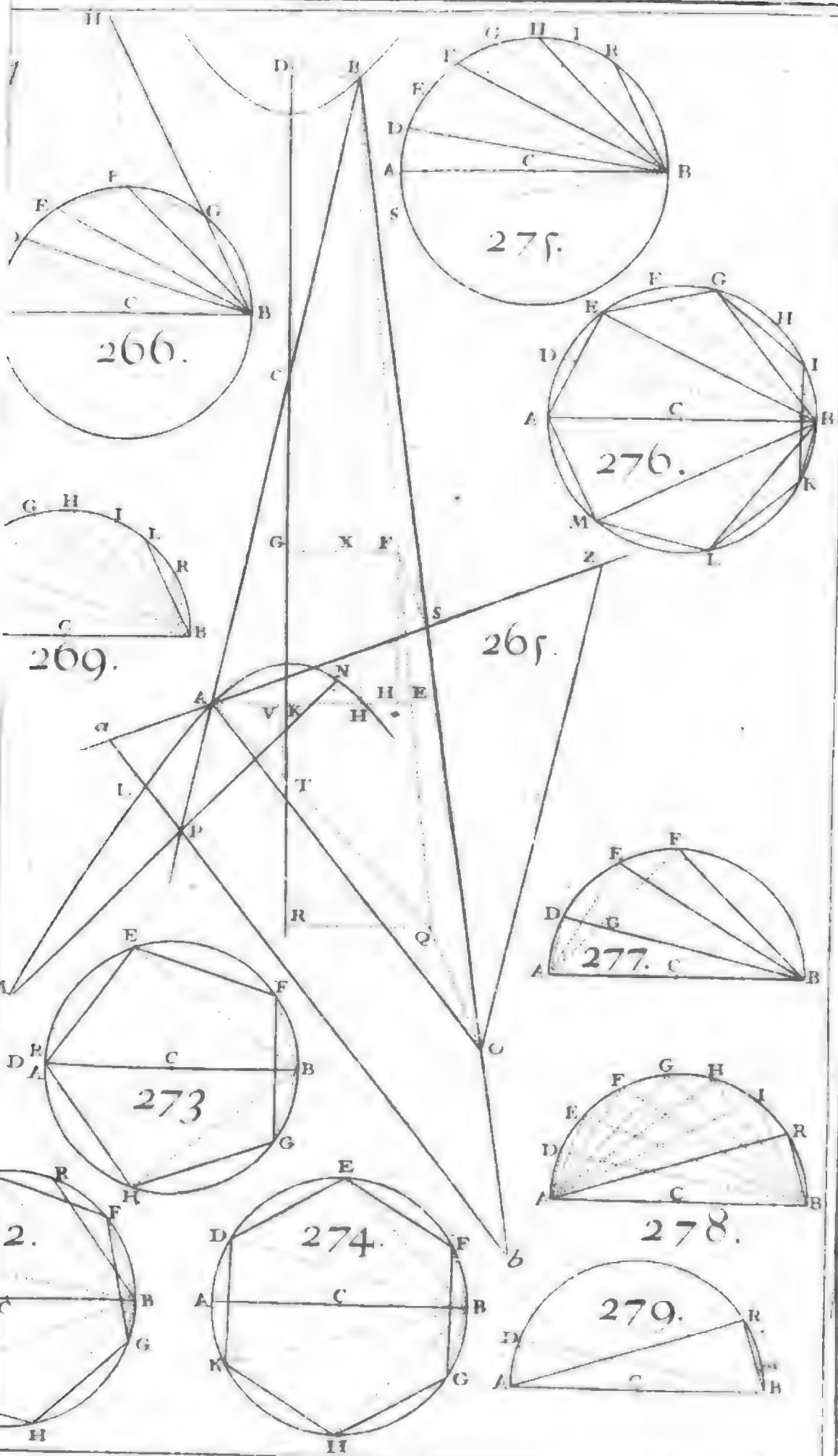
PROBLÈME IV.

477. T ROUVER une équation générale qui serve à
 diviser un arc de cercle donné AR, en autant de parties éga-
 les qu'on voudra.

PREMIÈRE MANIÈRE.

FIG. 279. Soit en général m le nombre des parties égales, l'arc
 AD la première de ces parties; soit tiré le diamètre
 AB, & les cordes BD, BR; & soit le rayon CA ou
 CB = 1, la corde donnée BR = a , la corde cherchée

* Art. 444 BD = x . On aura * $\mp a = x^n - m x^{n-1} + \frac{m \times m-1}{2 \times 1} x^{n-2}$
 473. $- \frac{m \times m-1 \times m-2}{3 \times 1 \times 2} x^{n-3} + \frac{m \times m-1 \times m-2 \times m-3}{4 \times 1 \times 2 \times 3} x^{n-4}$ &c,
 (sçavoir $+ a$ lorsque l'arc donné AR est moindre que
 la demie circonférence, & $- a$ lorsqu'il est plus grand.)



DES PROBLEMES DÉTERMINÉS. 451

pour l'équation generale qu'on demande ; de laquelle il ne faut prendre qu'autant de termes , que la moitié du nombre m lorsqu'il est pair , ou la plus grande moitié lorsqu'il est impair contient d'unités ; parce que le terme qui suivroit seroit nul ou zero.

Si $m = 5$, il vient $\overline{+}a = x^5 - 5x^3 + 5x$; si $m = 7$, on trouve $\overline{+}a = x^7 - 7x^5 + 14x^3 - 7x$.

SECONDE MANIÈRE.

Soit tiré le diametre AB , & les cordes BR , AR , BD , AD , qui terminent l'arc donné AR , & l'arc cherché AD . Soit m le nombre des parties égales, le diametre $AB = 1$, les cordes données $BR = a$, $AR = b$; & les cordes inconnues $BD = x$, $AD = y$. On aura * ces deux égalités generales $\overline{+}a = x^m$ * Art. 463.

$$= \frac{m \times m - 1}{1 \times 2} y y x^{m-1} + \frac{m \times m - 1 \times m - 2 \times m - 3}{1 \times 2 \times 3 \times 4} y^4 x^{m-4} \&c, 475.$$

$$b = \frac{m}{1} y x^{m-1} - \frac{m \times m - 1 \times m - 2}{1 \times 2 \times 3} y^3 x^{m-3} + \dots$$

$$\frac{m \times m - 1 \times m - 2 \times m - 3 \times m - 4}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5} y^5 x^{m-5} \&c, \text{ dans lesquelles}$$

mettant à la place de m , le nombre de parties égales dans lesquelles l'arc AR doit être divisé, il en vient deux autres particulieres, dont la resolution fournit la valeur cherchée de la corde $BD (x)$ ou $AD (y)$, après avoir fait évanouir l'inconnue y ou x , par le moyen de l'équation $yy = 1 - xx$ ou $xx = 1 - yy$.

Soit par exemple $m = 7$. On aura $\overline{+}a = x^7 - 11yyx^5 + 35y^4x^3 - 7y^6x$, & $b = 7yx^6 - 35y^3x^4 + 11y^5xx - y^7$, & l'on achevera le reste comme dans l'article 462.

PROBLEME V.

478. TROUVER une équation generale, qui serve à FIG. 280. inscrire dans un cercle donné, un polygone regulier quelconque ADEFGHK &c.

Soit tiré le diametre AB , & la corde BD qui terminent le premier côté du polygone ; soit le rayon

donné CA ou $CB = 1$, la corde inconnue $BD = x$, & en general m la plus petite moitié du nombre des côtés du poligone, que je suppose être impair. On

* Art. 457. aura * $0 = x^m - x^{m-1} - \frac{m-1}{1} x^{m-2} + \frac{m-2}{1} x^{m-3} + \frac{m-3}{1}$

474.

$$\times \frac{m-2}{2} x^{m-4} - \frac{m-4}{1} \times \frac{m-3}{2} x^{m-5} - \frac{m-5}{1} \times \frac{m-4}{2} \times \frac{m-3}{3} x^{m-6} + \frac{m-6}{1} \times \frac{m-5}{2} \times \frac{m-4}{3} x^{m-7} + \frac{m-7}{1} \times \frac{m-6}{2} \times \frac{m-5}{3} \times \frac{m-4}{4} x^{m-8} \&c,$$

pour l'équation generale qu'on demande ; de laquelle il ne faut prendre qu'autant de termes que le nombre $m + 1$ contient d'unités, parce que celui qui suivroit seroit nul ou zero.

Soit par exemple 7 le nombre des côtés du poligone à inscrire, on aura $m = 3$; & partant $0 = x^3 - x^2 - 2x + 1$, dont la plus grande racine x exprimera la corde BD , qui termine l'arc AD , qui a pour corde le premier côté AD du poligone. De même si le nombre des côtes est 11, on aura $m = 5$; & par consequent l'équation generale devient $0 = x^5 - x^4 - 4x^3 + 3x^2 + 3x - 1$, dont la plus grande des racines est $x = BD$.

PROBLEME VI.

FIG. 281.
282.

479. **D**IVISER un angle donné en un nombre quelconque impair de parties égales, par le moyen d'un instrument.

1°. Soit proposé de diviser l'angle donné ECF en trois parties égales. Il faut avoir un rhombe $ABCD$, dont les quatre côtés soient mobiles autour de ses quatre angles, & duquel les deux côtés AB , AD , soient indéfiniment prolongés vers X & Z ; attacher l'angle C du rhombe, dans le sommet C de l'angle donné ECF ; marquer sur les côtés CE , CF , les points E , F , en sorte que CE & CF soient égales chacune au côté CB ou CD ou DA ou AB du rhombe. Cela fait, il faut ouvrir ou resserer les côtés AX , AZ , de l'angle BAD , en sorte qu'ils passent par les points E , F ; &

l'angle BAD sera la troisième partie de l'angle ECF .

Car les triangles ABC , BCE , étant isocèles, l'angle externe CBE ou son égal CEB , qui vaut les deux internes opposés BAC , BCA , sera double de l'angle BAC ; & dans le triangle ECA , l'angle externe ECY , qui vaut l'angle CEA plus l'angle BAC , sera triple de l'angle BAC . On démontrera de même que l'angle FCY est triple de l'angle DAC . D'où il suit que l'angle donné ECF est triple de l'angle BAD . *Ce qu'il falloit &c.*

1°. Soit proposé de diviser l'angle donné HGK , en FIG. 183.
cinq parties égales. On attachera dans l'angle C du 284.
rhombe $ABCD$ de l'instrument précédent, un autre
rhombe $CEGF$, dont les côtés seront égaux à ceux du
premier & mobiles aussi autour de leurs angles. On fi-
chera l'angle G de ce dernier rhombe, dans le sommet
 G de l'angle donné HGK ; & ayant pris sur les côtés
de cet angle les parties GH , GK , égales chacune au
côté GE de l'un des rhombes, on ouvrira ou fermera
l'angle XAZ mobile autour du point A , en sorte que
ses côtés AX , AZ , touchent les angles E , F , & pas-
sent en même temps par les points marqués H , K . Je
dis que l'angle XAZ ou BAD sera la cinquième par-
tie cherchée de l'angle donné HGK .

Car ayant mené dans le rhombe $ABCD$ la diago-
nale AC , prolongée indéfiniment vers Y ; elle passera
par le point G , puisque les angles ECY , FCY , étant
triples des angles égaux BAC , DAC , seront aussi
égaux entr'eux. Or dans le triangle EGA , l'angle ex-
terne HEG , qui vaut les deux internes opposés BAC ,
 EGA , ou ECY (à cause du triangle isocèle CEG)
sera quadruple de l'angle BAC . Et partant dans le
triangle AHG , l'angle externe HGY , qui vaut les
deux internes opposés BAC , GHA ou GEH (à cau-
se du triangle isocèle EGH) sera le quintuple de l'an-
gle BAC . On prouvera de même que l'angle KGY
sera quintuple de l'angle DAC ; d'où il est évident

que l'angle entier $H G K$ sera quintuple de l'angle entier $B A D$ ou $X A Z$.

S'il falloit diviser un angle donné en sept parties égales, il n'y aura qu'à joindre aux deux rhombes précédens, un troisième rhombe égal & construit de la même manière; & ainsi de suite de deux en deux. Car la pratique & la démonstration se fera toujours de la même manière.

EXEMPLE.

480. **T**ROUVER entre deux lignes données a & b , autant de moyennes proportionnelles qu'on voudra.

Soit l'inconnue x la première des moyennes proportionnelles qu'il est question de trouver; & l'on aura la progression geometrique continuë $a, x, \frac{x^2}{a}, \frac{x^3}{a^2}, \frac{x^4}{a^3}, \frac{x^5}{a^4}$ &c, de laquelle on prendra le terme dont le quantième surpasse de 2 le nombre donné des moyennes proportionnelles, & l'égalant à la donnée b on formera une égalité, dont la résolution fournira la valeur de l'inconnue x qui est la première des moyennes proportionnelles que l'on cherche.

Qu'il faille, par exemple, trouver deux moyennes proportionnelles. On prendra dans la progression geometrique le quatrième terme $\frac{x^3}{a^2}$, qui étant égalé à la ligne b , donne $x^3 = a^2 b$; & de même si l'on demande quatre moyennes proportionnelles, l'on aura $x^5 = a^4 b$. D'où il est facile de voir que si n marque en general le nombre des moyennes proportionnelles qu'il faut trouver entre les données a & b , on aura $x^{n+1} = a^n b$ pour l'égalité generale qu'il faut résoudre. Or cela posé.

Soit 1^o. $x^{10} = a^9 b$ qui sert à trouver seize moyennes proportionnelles. Je multiplie les deux membres de cette égalité par x^1 , afin d'avoir $x^{11} = a^9 b x^1$, dont la plus haute dimension 10 est le produit des deux nombres 4 & 5 qui se suivent immédiatement. Je prends l'é-

quation $x' = a'y$; ce qui donne en élevant chaque membre à la puissance quatrième $x'' = a''y' = a''bx'$, d'où je tire une autre équation $y' = bx'$, dont le lieu étant construit séparément, donnera par son intersection avec celui de la supposée $x' = a'y$, la valeur de l'inconnue x . Ou bien je prends l'équation $x' = a'y$, dont j'éleve chaque membre à la quatrième puissance ; & les multipliant ensuite par x , j'ai $x'' = a''y'x = a''b$, d'où je tire $y'x = a'b$, dont le lieu étant construit séparément avec celui de l'équation $x' = a'y$, donnera par son intersection la valeur cherchée de l'inconnue x .

Soit 2°. $x'' = a''b$ qui sert à trouver trente moyennes proportionnelles. Je multiplie de part & d'autre par x' , afin d'avoir $x''' = a'''bx'$, dont la plus haute dimension 36 est le carré de 6 : c'est pourquoi faisant $x' = a'y$, & prenant de part & d'autre la sixième puissance, j'ai $x''' = a'''y'$, $y' = a''by'$, d'où je tire $x' = by'$, dont le lieu étant construit séparément avec celui de l'équation que j'ai prise d'abord $x' = a'y$, donnera par son intersection la valeur de l'inconnue x . Ou bien ayant pris comme ci dessus l'équation $x' = a'y$, je l'éleve à la cinquième puissance, & la multipliant ensuite par x , j'ai $x''' = a'''y'x = a''b$, ce qui donne $y'x = a'b$. D'où l'on voit que le lieu de l'équation $x' = a'y$, étant construit séparément avec le lieu de l'autre équation $y'x = a'b$, donnera la résolution de l'égalité proposée $x'' = a''b$; de sorte que l'on peut choisir entre les deux lieux $y'x = bx'$, ou $y'x = a'b$, celui qu'on jugera le plus simple. Il en est ainsi de tous les autres exemples qu'on peut se former à plaisir.

Il est à remarquer que si la dimension de l'inconnue x n'étoit pas un nombre premier, l'égalité proposée se pourroit toujours abaisser. Si l'on avoit, par exemple, $x^3 = a^3b$, qui sert à trouver huit moyennes proportionnelles ; on trouveroit en extrayant de part & d'autre la racine cubique $x' = \sqrt[3]{a^3b}$. Or afin que le nombre a^3b soit un cube, il n'y a qu'à trouver une ligne z dont le

cube $z^3 = aab$, ou ce qui est la même chose de trouver entre a & b deux moyennes proportionnelles ; car mettant à la place de aab la valeur z^3 , on aura $x^3 = a^2 z^3$ ou $x^3 = a^2 z$, de sorte qu'en résolvant ces deux égalités $z^3 = aab$, & ensuite $x^3 = aaz$ qui ne sont que du troisième degré, on trouvera la valeur de l'inconnue x , qui est la première des huit moyennes proportionnelles entre les extrêmes a & b . De même si l'on avoit $x^4 = a^3 b$ qui sert à trouver treize moyennes proportionnelles, il viendrait en extrayant de part & d'autre la racine quarrée $x^2 = \sqrt{a^3 b}$. Or afin que $\sqrt{a^3 b}$ soit un quarré, il faut trouver une ligne z dont le quarré $zz = ab$; car substituant à la place de ab , le quarré zz dans l'égalité proposée, on aura $x^4 = a^3 zz$ ou $x^4 = a^2 z$; c'est pourquoi il n'y aura qu'à résoudre d'abord l'égalité du second degré $zz = ab$, & ensuite celle du septième $x^7 = a^2 z$.

On doit encore remarquer que ces sortes d'égalités qui servent à trouver des moyennes proportionnelles, & dont la dimension de l'inconnue est un nombre premier, n'ont qu'une racine réelle & toutes les autres imaginaires ; dont la raison est qu'il ne peut y avoir qu'une seule ligne qui soit la première des moyennes proportionnelles cherchées.

REMARQUE.

Fig. 185.

481. ON peut résoudre le Problème précédent par le moyen d'un instrument geometrique dont la construction est telle. Soient deux lignes indefinies XY , YZ , mobiles autour du point Y , en sorte qu'elles se puissent ouvrir & fermer. Soit attachée au point quelconque fixe B du côté YX , une perpendiculaire indefinie BC sur ce côté, laquelle chasse devant elle (pendant que l'angle XYZ s'ouvre) par le point C où elle rencontre l'autre côté YZ , la perpendiculaire indefinie CD sur ce dernier côté ; qui chasse de même par

par le point D où elle rencontre le côté YX , la perpendiculaire indéfinie DE ; qui chasse encore de même par le point E où elle rencontre le côté YZ , la perpendiculaire indéfinie EF ; qui chassera par le point F où elle rencontre le côté YX , la perpendiculaire FG ; qui chasse encore par le point G où elle rencontre le côté YZ , la perpendiculaire GH ; & ainsi de suite à l'infini, en augmentant autant que l'on voudra le nombre des perpendiculaires sur les côtés YX & YZ . Cela fait, soit proposé, par exemple, de trouver quatre moyennes proportionnelles entre les deux lignes droites données a & b . Ayant pris sur le côté YZ la partie YG quatrième proportionnelle aux trois lignes a , b , YB , on ouvrira le côté XY de l'instrument, jusqu'à ce que la cinquième perpendiculaire FG (parce qu'il est question de trouver quatre moyennes proportionnelles) passe par le point G ; & alors les lignes YC , YD , YE , YF , seront les quatre moyennes proportionnelles entre les extrêmes YB , YG ; & partant la quatrième proportionnelles aux trois lignes YB , YC , a sera la première des quatre moyennes proportionnelles demandées.

Car les triangles rectangles YBC , YCD , YDE , YEF , YFG , étant tous semblables; leurs côtés YB , YC , YD , YE , YF , YG , seront en progression géométrique continuë. Donc &c.

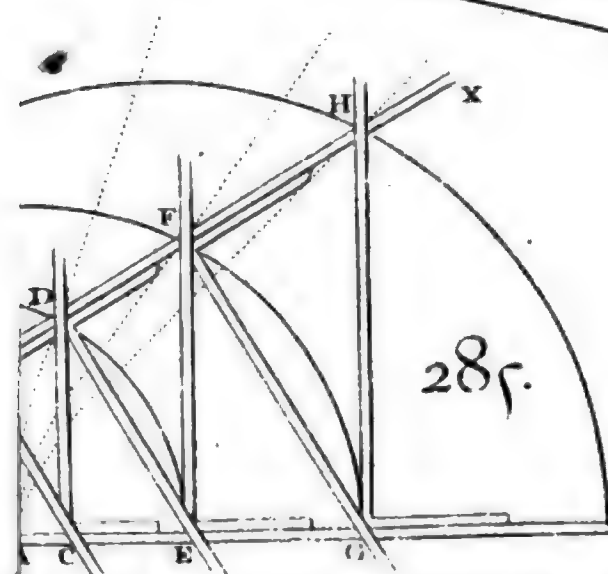
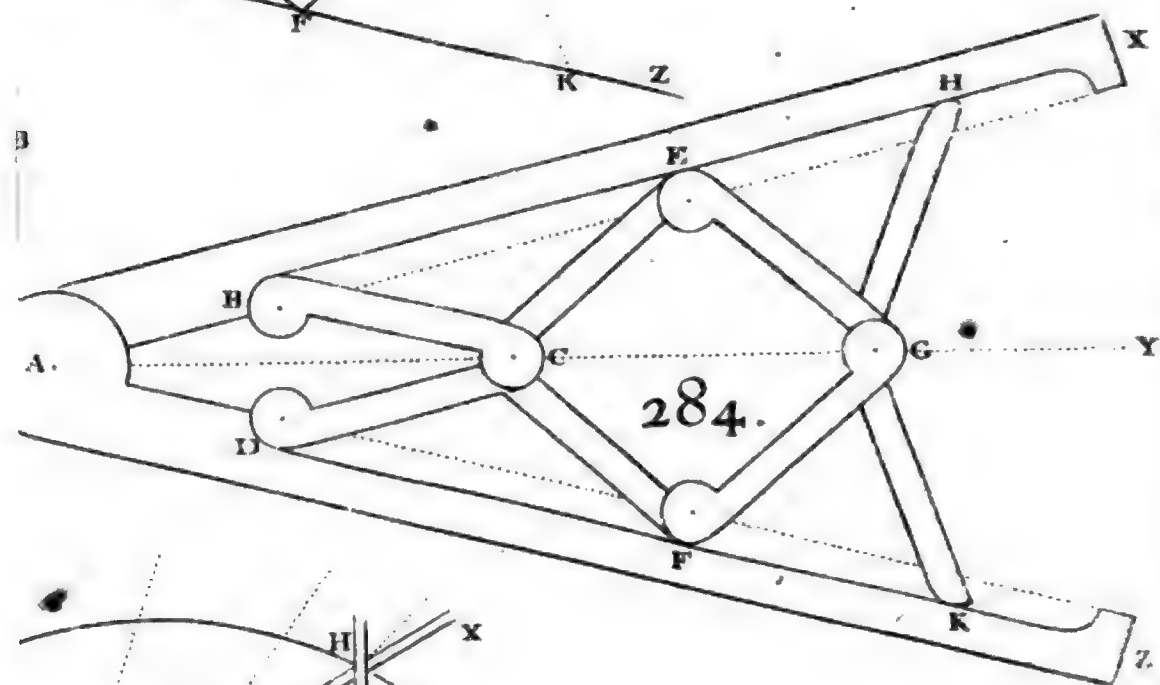
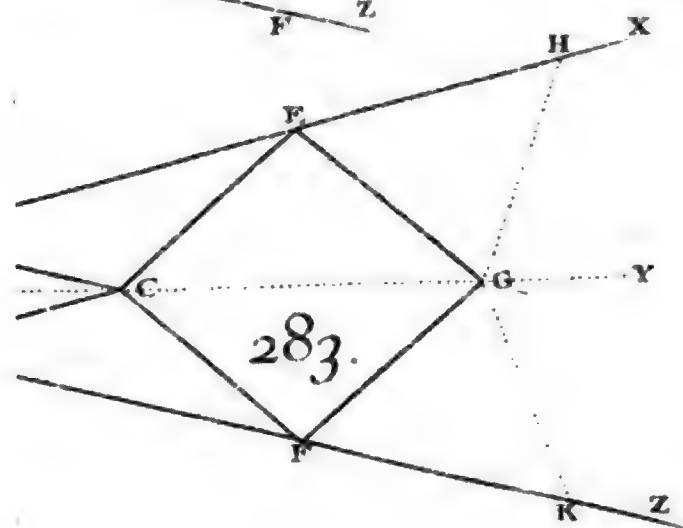
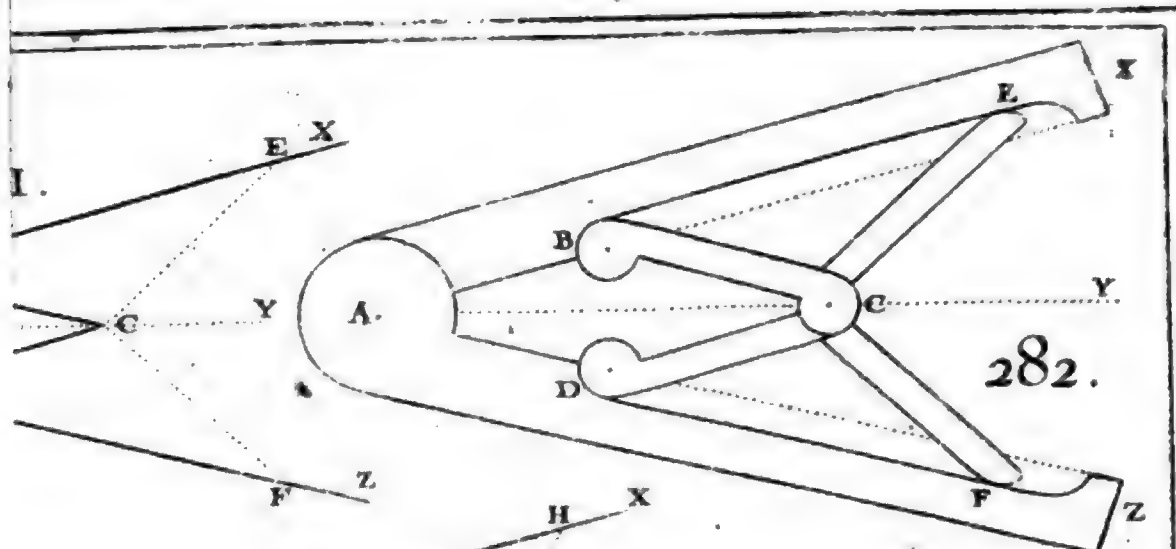
Il est clair que pendant que l'angle XYZ s'ouvre de plus en plus, le point B décrit un arc de cercle AB ; & que les intersections continuelles D , F , H , des perpendiculaires CD , EF , GH , sur le côté YZ , avec l'autre côté YX , décrivent des lignes courbes AD , AF , AH , qui servent à trouver autant de moyennes proportionnelles qu'on voudra. Car si l'on décrit, par exemple, du diamètre YE un demi cercle, il coupera la courbe AD en un point D , tel que YD est la seconde des deux moyennes proportionnelles, entre les ex-

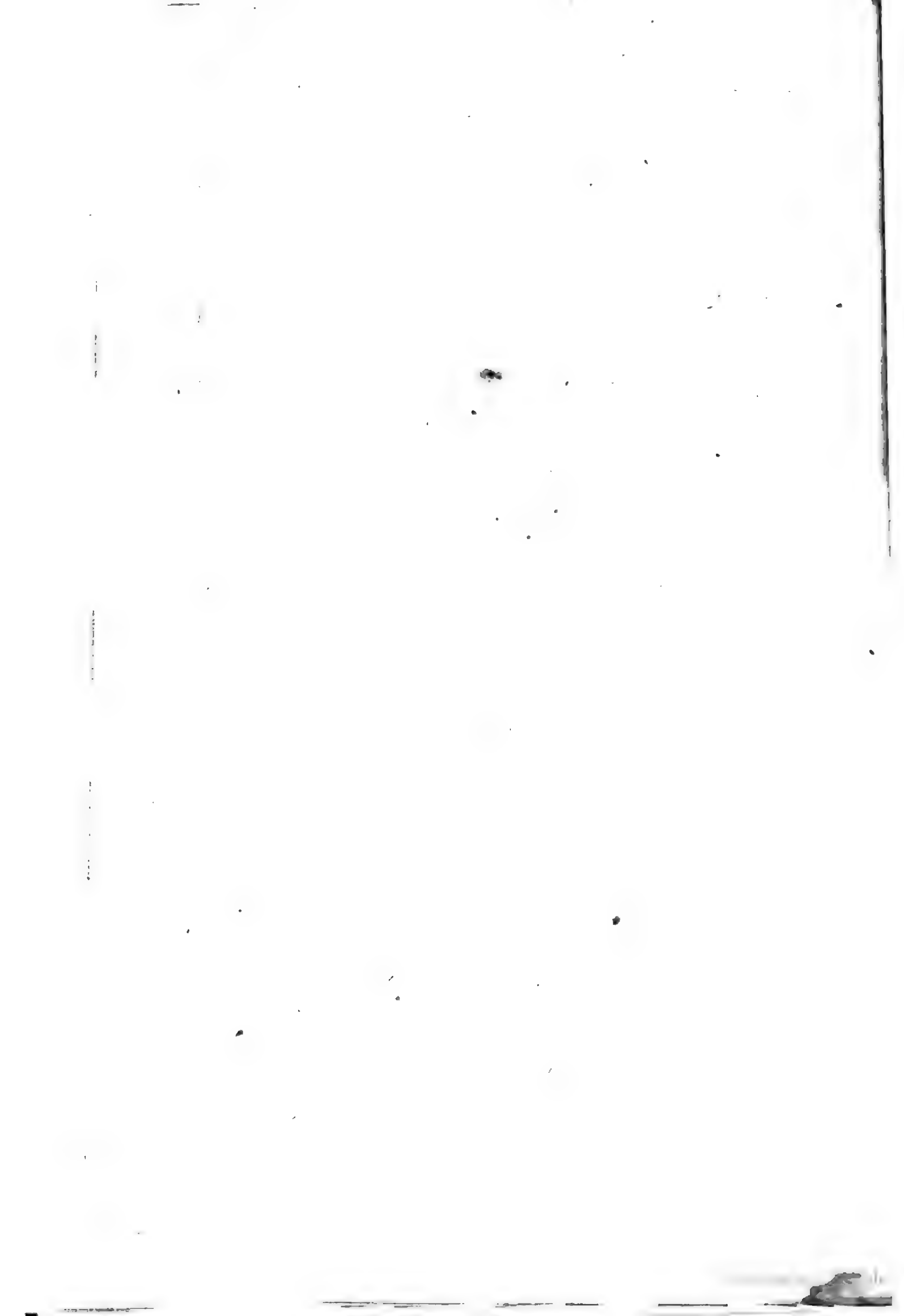
M m m

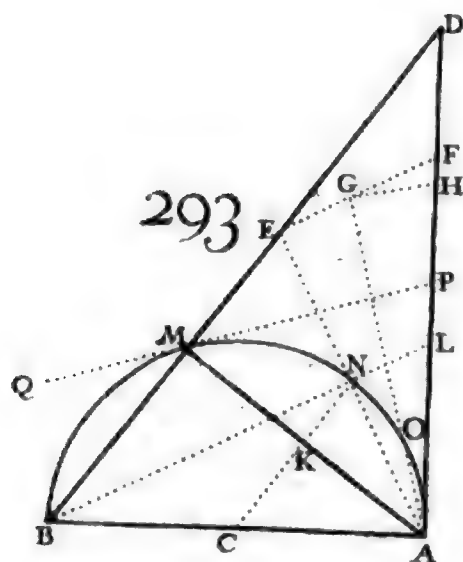
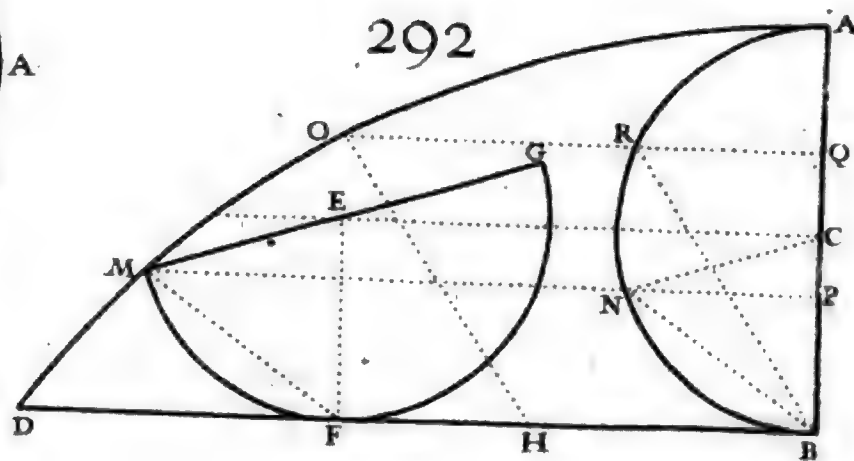
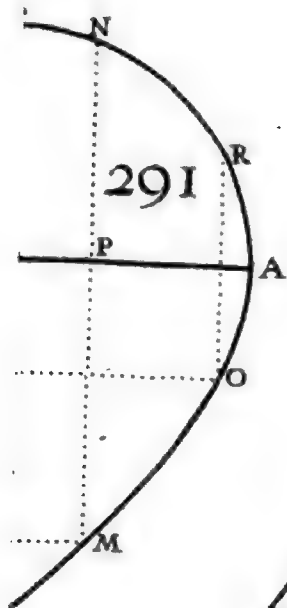
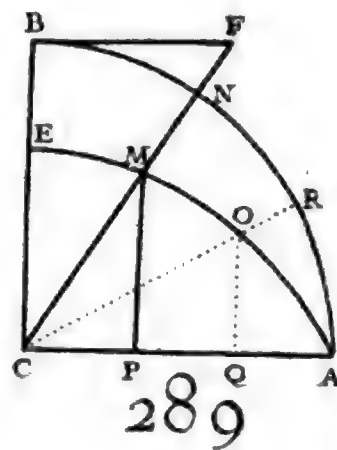
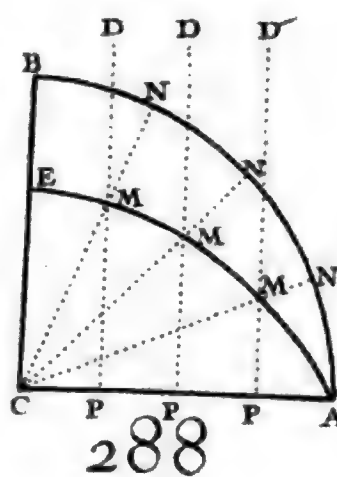
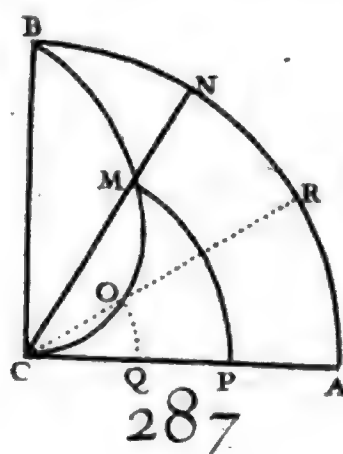
trêmes YB ou YA & YE ; & de même si l'on décrit un demi cercle du diametre YG , il coupera la ligne courbe AF en un point F , tel que YF est la dernière des quatre moyennes proportionnelles entre YA & YG &c. Sur quoi il est à propos de remarquer que la ligne courbe AD est du quatrième degré ; la ligne courbe AF du huitième ; la courbe AH du seizième, &c ; ce que je prouve ainsi.

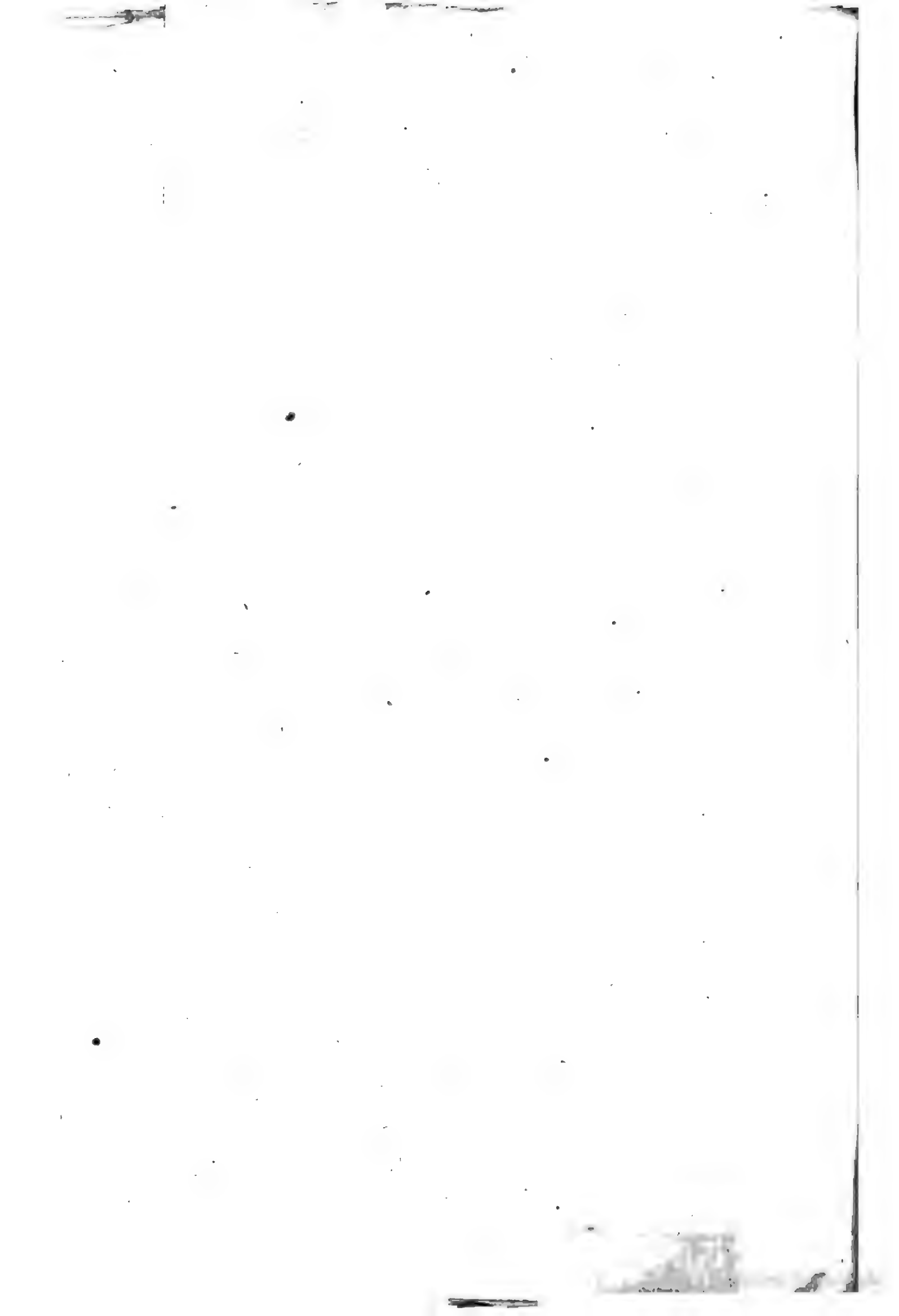
Soient 1°. les inconnues & indéterminées $YC = x$, $CD = y$, $YD = z$, & la connue YA ou $YB = a$, on aura à cause des triangles rectangles semblables YCD , YBC , cette équation $YB(a) = \frac{x^2}{z}$, & à cause du triangle rectangle YCD cette autre $yy + xx = zz$, dans laquelle mettant à la place de z la valeur $\frac{x^2}{a}$ trouvée par le moyen de la première équation, il vient $aa yy = x^4 - aa xx$; ce qui fait voir que la courbe AD est un lieu du quatrième degré. Soient 2°. les inconnues & indéterminées $YE = x$, $EF = y$, $YF = z$, & la connue YA ou $YB = a$; on aura à cause des triangles rectangles semblables YFE , YED , YDC , YCB , cette équation $YB(a) = \frac{x^2}{z}$, & à cause du triangle rectangle YEF cette autre $yy + xx = zz$, dans laquelle faisant évanouir l'inconnue z par le moyen de la première équation, & ôtant les incommensurables, on trouve $aa y^4 + 3aa xxy^2 + 3aa x^3yy - aa x^5 = x^8$; d'où l'on voit que la courbe AF est un lieu du huitième degré. On prouvera de même que la courbe AH est un lieu du seizième degré, &c.

Maintenant puisque selon l'exemple on peut trouver deux moyennes proportionnelles, en n'employant que deux lignes du second degré ; quatre moyennes proportionnelles, en se servant du lieu du second degré, & d'un autre du troisième ; au lieu qu'ici il faut dans le premier cas un lieu du quatrième, qui









DES PROBLEMES DÉTERMINE'S. 459

est la ligne AD , & un lieu du second qui est le cercle YDE ; & dans le second un lieu du huitième, sçavoir: la ligne courbe AF , & un lieu du second, sçavoir le cercle YFG : il s'ensuit que ces lignes courbes AD , AF , AH , sont beaucoup trop composées pour résoudre ce Problème. Cependant la facilité de la construction & de la démonstration, récompense en quelque sorte ce défaut.

F I N.

M m m ij

PRIVILEGE DU ROY.

LOUIS PAR LA GRACE DE DIEU ROY DE FRANCE
ET DE NAVARRE : A nos amez & feaux Conseillers les
Gens tenans nos Cours de Parlement, Maîtres des Requêtes ordi-
naires de nôtre Hôtel, Grand Conseil, Prevôt de Paris, Baillifs,
Senechaux, leurs Lieutenans Civils, & autres nos Justiciers qu'il
appartiendra : **SALUT.** Nôtre Academie Royale des Sciences Nous
ayant très-humblement fait exposer, que depuis qu'il Nous a plu
luy donner par un Reglement nouveau de nouvelles marques de
nôtre aff.ction, Elle s'est appliquée avec plus de soin à cultiver les
Sciences qui font l'objet de ses exercices ; en sorte qu'outre les Ou-
vrages qu'elle a déjà donnez au public, Elle seroit en état d'en pro-
duire encore d'autres, s'il Nous plaisoit luy accorder de nouvelles
Lettres de Privilege, attendu que celles que Nous luy avons accor-
dées en date du 6. Avril 1699. n'ayant point de tems limité, ont
été déclarées nulles par un Arrêt de nôtre Conseil d'Etat du 11. du
mois d'Aoust dernier. Et desirant donner à ladite Academie en
corps, & en particulier à chacun de ceux qui la composent, toutes
les facilitez & les moyens qui peuvent contribuer à rendre leurs tra-
vaux utiles au public ; Nous avons permis & permettons par ces
Presentes à ladite Academie, de faire imprimer, vendre & debiter
dans tous les lieux de nôtre Obéissance, par tel Imprimeur qu'Elle
voudra choisir, en telle forme, marge, caractère, & autant de fois
que bon luy semblera : *Toutes les Recherches ou Observations jour-
nalieres, & Relations annuelles de tout ce qui aura été fait dans les
Assemblées de l'Academie Royale des Sciences ; comme aussi les Ou-
vrages, Memoires ou Traitez de chacun des Particuliers qui la com-
posent, & generalement tout ce que ladite Academie voudra faire
paroître sous son nom, lorsqu'après avoir examiné & approuvé les-
dits Ouvrages aux termes de l'article xxx. dudit Reglement, elle
les jugera dignes d'être imprimez : & ce pendant le tems de dix
années consecutives, à compter du jour de la date desdites Pre-
sentes. Faisons très-expresses défenses à tous Imprimeurs, Librai-
res, & à toutes sortes de personnes de quelque qualité & condition
que ce soit, d'imprimer, faire imprimer en tout ni en partie, au-
cun des Ouvrages imprimez par l'Imprimeur de ladite Academie ;
comme aussi d'en introduire, vendre & debiter d'impression étran-
gere dans nôtre Royaume sans le consentement par écrit de ladite
Academie ou de ses ayans cause, à peine contre chacun des contre-
venans de confiscation des Exemplaires contrefaits au profit de son-*

dit Imprimeur, de trois mille livres d'amende, dont un tiers à l'Hôtel-Dieu de Paris, un tiers audit Imprimeur, & l'autre tiers au Dénonciateur, & de tous dépens, dommages & intérêts : à condition que ces Presentes seront enregistrées tout au long sur le Registre de la Communauté des Imprimeurs-Libraires de Paris, & ce dans trois mois de ce jour ; Que l'impression de chacun desdits Ouvrages sera faite dans notre Royaume & non ailleurs, & ce en bon papier & en beaux caractères, conformément aux Reglemens de la Librairie ; & qu'avant que de les exposer en vente il en sera mis de chacun deux Exemplaires dans notre Bibliothèque publique, un dans celle de notre Château du Louvre, & un dans celle de notre très-cher & feal Chevalier Chancelier de France le Sieur Phelypeaux Comte de Pontchartrain, Commandeur de nos Ordres, le tout à peine de nullité des Presentes ; du contenu desquelles Vous mendonns & enjoignons de faire jouir ladite Academie ou ses ayans cause pleinement & paisiblement, sans souffrir qu'il leur soit fait aucun trouble ou empêchemens. Voulons que la copie desdites Presentes qui sera imprimée au commencement ou à la fin desdits Ouvrages soit tenue pour dûement signifiée, & qu'aux copies collationnées par l'un de nos amez & feaux Conseillers & Secretaires foy soit ajoutée comme à l'original : Commandons au premier notre Huissier ou Sergent de faire pour l'exécution d'icelles tous actes requis & necessaires sans autre permission, & nonobstant Clameur de Haro, Chartre Normande & Lettres à ce contraires : CAR tel est notre plaisir. DONNE à Versailles le neuvième jour de Fevrier, l'an de grace mil sept cens quatre, & de notre Règne le soixante & unième. Par le Roy en son Conseil, LE COMTE.

L'Academie Royale des Sciences par Délibération du 13. Fevrier 1704. a cédé le present Privilege à JEAN BOUDOT son Libraire, pour en jouir conformément au Traité fait par l'Academie avec ledit Boudot le 13. Juillet 1699. En foy de quoy j'ay signé, à Paris ce 15. Fevrier 1704.

FONTENELLE, *Secretaire de l'Academie
Royale des Sciences.*

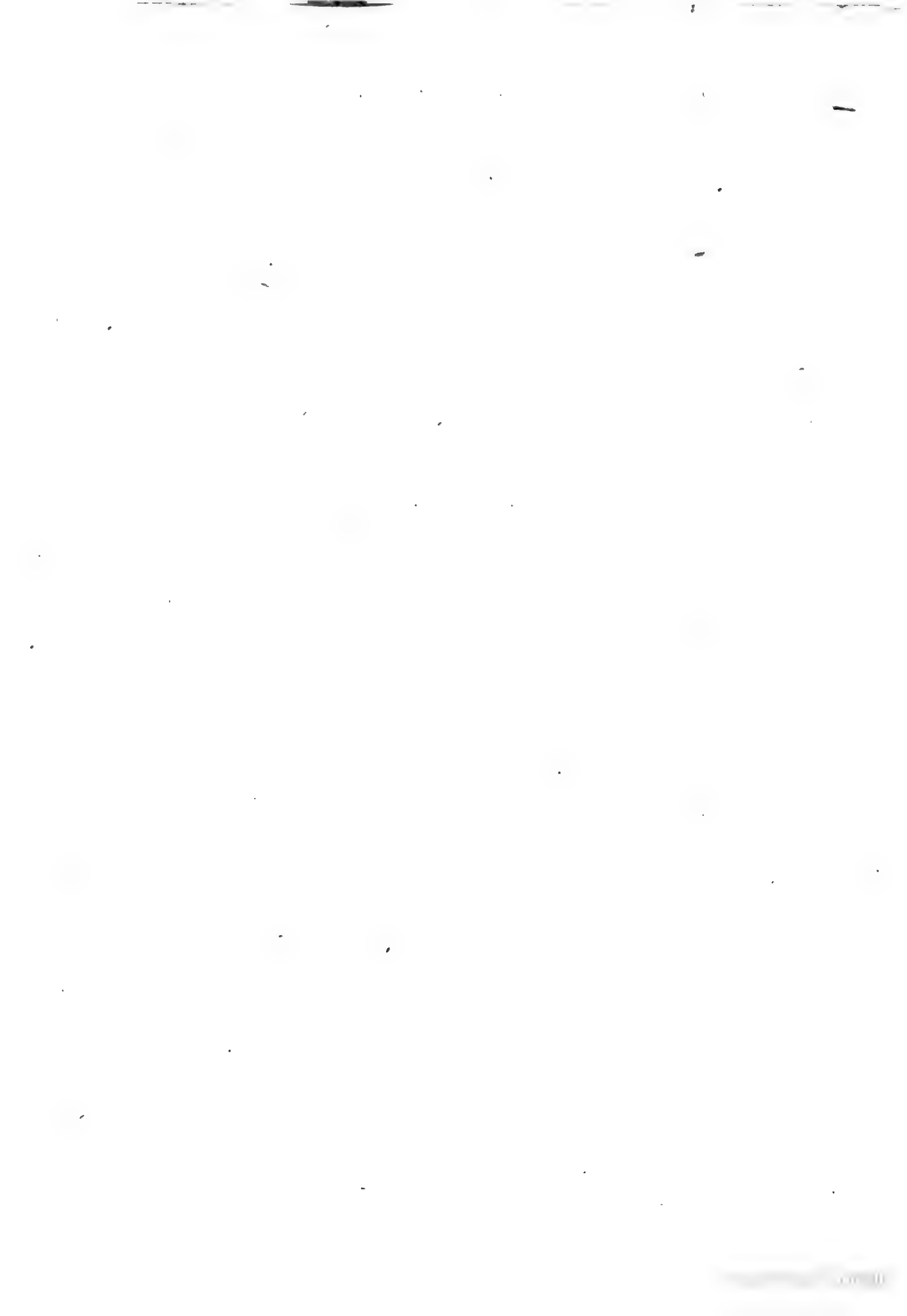
Registré sur le Livre de la Communauté des Libraires & Imprimeurs de Paris, Numero cv 1, page 136. conformément aux Reglemens, & notamment à l'Arrest du Conseil du 13. Aoust dernier. A Paris, ce 13. Fevrier 1704.

P. EMERY, *Syndic.*

Je sous-signé, en conformité du Traité fait avec M. Hochereau,
M m m 11j

le 25 Aoust dernier , qui avoit acquis du Sieur Boudot , Libraire de l'Academie , le droit du Privilege des Sections Coniques de M. le Marquis de l'Hôpital ; de même encore que l'Agrement du Sieur Rigaud pour la jouissance dudit Privilege : déclare & reconnois tout ce que dessus avoir cédé cejourd'hui au Sieur Montalant , que je substitue en mon lieu & prerogatives , moyennant l'accord fait entre nous , à Paris ce treizième Novembre mil sept cens dix-neuf.

C. JOMBERT.



En 1707 il y eut une première édition de cet ouvrage.

1707

une première édition

de cet ouvrage





